NOMBRES SUPERABONDANTS

Eric Kern

(Maître de Conférences à l'U.F.R. de Mathématiques - Strasbourg)

'*L'Ouvert*' a déjà parlé des nombres parfaits à deux occasions :
– dans le n° 14 (fév. 78), un article de J. Lefort sous le joli titre "Amitié",
– dans le n° 32 (sept. 83), un article de E. Ehrhart intitulé "Une suite remarquable".
Il s'agit de la suite (u_n)

$$u_n = \frac{\sigma_n}{n} \text{ où } \sigma_n \text{ est la somme des diviseurs de l'entier } n.$$

Aujourd'hui, nous vous proposons dans le même ordre d'idée un problème posé et résolu par E. Kern sur les nombres superabondants. Comme les articles évoqués plus haut remontent assez loin dans le temps, il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelques définitions et informations historiques concernant les nombres abondants (aussi appelés surabondants), déficients, parfaits.

Nicomaque de Gérase (II[e] siècle) décrit ainsi ces trois types de nombres dans son "Introduction arithmétique" :

"*...Parmi les nombres simplement pairs, les uns sont surabondants, les autres déficients : ces deux classes sont comme deux extrêmes opposés l'un à l'autre; quant à ceux qui occupent le milieu entre les deux, ils sont dits parfaits. Et ceux que l'on dit opposés les uns aux autres, surabondants et déficients, se répartissent, à l'intérieur de leur condition qui est l'inégalité, entre le trop et le trop peu. En effet, on ne peut concevoir un autre mode de l'inégalité distinct de ces deux-là – ni un vice ou une maladie, ni une disproportion ou un manque de convenance ou toute autre chose de ce genre. Du côté du trop, en effet, se produisent les excès, les superfluités, les exagérations et les abus; du côté du trop peu les manques, les défauts, les privations et les insuffisances; et dans ce qui se trouve entre le trop et le trop peu, c'est-à-dire l'égal, se produisent les vertus, les justes mesures, les convenances et les beautés et les choses du même genre – dont la forme la plus exemplaire est l'espèce de nombre que l'on appelle parfait.*

Donc le nombre surabondant est celui qui, outre les parties qui lui conviennent et qui lui échoient, en a d'autres plus nombreuses, comme si un animal adulte était formé de trop de parties ou de membres, "ayant dix langues", comme le dit le poète, et dix bouches, ou neuf lèvres, et pourvu de trois rangées de dents; ou à cent bras, ou ayant trop de doigts à l'une des deux mains. De même un nombre, si, après qu'on a rencensé toutes les parties qui sont en lui, qu'on les a récapitulées en un seul ensemble, et qu'on l'a confronté à elles, on trouve qu'il a des parties propres qui le surpassent, ce nombre est appelé surabondant; en effet il dépasse *la mesure du parfait à l'égard de ses parties. Tels sont 12, 24 et d'autres; en effet 12 a une moitié, 6, un tiers, 4, un quart, 3, un sixième, 2, un douzième, 1, lesquels récapitulés ensemble font 16, qui est plus que le 12 initial; donc ses parties surpassent le tout. Quant à 24, il a lui aussi une moitié, un tiers, un quart, un sixième, un huitième, un douzième, un vingt-quatrième, qui se trouvent être 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1; or, récapitulés ensemble ils forment 36, qui lorsqu'on le compare au 24 initial, est trouvé plus grand que celui-ci, quoiqu'il soit composé uniquement de ses parties; donc, ici encore, les parties surpassent le tout...*"

Au début du Livre VII des **Eléments** (définition 23) Euclide définit le nombre parfait :
"*Le nombre parfait est égal à ses parties*" et les successeurs d'Euclide précisaient "*parties aliquotes*".

Ainsi 6 est parfait car $6 = 3 + 2 + 1$
28 est parfait car $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$

Dans la dernière proposition du Livre IX des **Eléments**, Euclide énonce et démontre un très beau théorème que l'on formule ainsi aujourd'hui :
Si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait ($n \geq 2$). On obtient de cette façon les premiers nombres parfaits suivants :

n	nombre parfait
2	6
3	28
5	496
7	8 128
9	1 130 816
11	2 096 128
13	33 550 336
(15)	...
17	8 589 869 056
19	137 438 691 328
(21)	...
23	35 184 367 894 528

En se référant spécifiquement aux quatre premiers, Nicomaque signalait qu'ils se terminaient alternativement par 6 et 8, et que le premier était compris ente 1 et 10, le second entre 10 et 100, le troisième entre 100 et 1 000, le quatrième entre 1 000 et 10 000. Ces observations furent bientôt extrapolées par Jamblique (III^e – IV^e s.) qui affirma qu'entre chaque puissance de dix et la suivante se trouvait toujours un nombre parfait et que tous ceux-ci se terminaient alternativement par 6 et par 8, affirmations acceptées et répétées durant tout le Moyen Age et la Renaissance en Occident. Mais cette affirmation avait déjà été contredite par Abu Tahir al-Baghdadi (XI^e – XII^{e}s.) qui faisait remarquer qu'il n'y a pas de nombre parfait entre 10 000 et 100 000. Par ailleurs on observera que $n = 15$ ne donne pas un nombre parfait

$$(2^{15} - 1 = 32\ 767 = 7 \times 31 \times 151 \text{ n'est pas premier})$$

et que l'alternance 6 - 8 - 6 - 8 est rompue.

Les nombres parfaits donnés par le théorème d'Euclide sont forcément pairs ce qui pose deux questions :
1) Tous les nombres parfaits pairs sont-ils de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$?
2) Existe-t-il des nombres parfaits impairs?

Euler (1707 - 1783) répondit par l'affirmative à la première question et le démontra. Quant à la seconde elle reste ouverte.

Voici deux références bibliographiques (qui en contiennent beaucoup d'autres) pour ceux qui voudraient approfondir cette question :

Ettore PICCUTTI "*Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits*", Historia Mathematica 16 (1989), pp. 123-136.

Michel CRUBELLIER et Jacky SIP "*A la recherche des nombres parfaits*" dans Histoires de problèmes, histoire des mathématiques, Commission Inter-IREM, éd. Ellipses (1993).

Problème

Soient $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r < \ldots$ la suite des premiers rangés par ordre croissant. Si $n \geq 1$ est un entier on pose $\sigma(n) = \Sigma_{d|n} d$. Ainsi, par exemple, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. On dira que $n \geq 1$ est superabondant (*) si $\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(n)}{n}$ pour tout $1 \leq k < n$. Montrer que si n est superabondant on a

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \text{ avec } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1.$$

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers superabondants.

Solution

On remarque d'abord que $\sigma(n)$ est multiplicative dans le sens suivant : si pgcd $(n_1, n_2) = 1$ on a $\sigma(n_1 n_2) = \sigma(n_1)\sigma(n_2)$. En effet, on a $d|n_1 n_2$ si et seulement si $d = d_1 d_2$ avec $d_1|n_1$ et $d_2|n_2$ et on a donc bien $\sigma(n_1 n_2) = \Sigma_{d_1|n_1} \Sigma_{d_2|n_2} d_1 d_2 = (\Sigma_{d_1|n_1} d_1) \times (\Sigma_{d_2|n_2} d_2) = \sigma(n_1)\sigma(n_2)$. Posons alors pour simplifier $\omega(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ qui est donc aussi multiplicative, i.e. pgcd $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow \omega(n_1 n_2) = \omega(n_1)\omega(n_2)$. Soit maintenant $n \geq 2$ un entier superabondant. Soit $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_r^{\alpha_r}, q_1 < \ldots < q_r$ la décomposition en facteurs premiers de n (donc $r \geq 1$ et $\alpha_i \geq 1$ si $1 \leq i \leq r$). Nous allons montrer que l'on a $(q_1, \ldots, q_r) = (p_1, \ldots p_r)$. Supposons que l'égalité n'ait pas lieu. Posons $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ et soit $1 \leq i \leq r$ le plus petit indice t.q. $\alpha_1 \neq \alpha_i$. On aura donc $p_j < q_j$ si $1 \leq i \leq j \leq r$. Posons $m_1 = \Pi_{1 \leq k < i}\, p_k^{\alpha_k}$, avec

(*) La notion de superabondant ne coïncide donc pas avec celle de surabondant. Exemple : 96 est surabondant, mais non pas superabondant.

$m_1 = 1$ si $i = 1$. On a donc $m = m_1 \times \Pi_{i \leq j \leq k}\, p_j^{\alpha_j}$ et $n = m_1 \times \Pi_{i \leq j \leq k}\, q_j^{\alpha_j}$ de sorte que $m < n$.
D'autre part on a

$$\omega(m) = \omega(m_1) \times \Pi_{i \leq j \leq k}\, \omega(p_j^{\alpha_j})\ ;\ \omega(n) = \omega(m_1) \times \Pi_{i \leq j \leq k} \omega(q_j^{\alpha_j})$$

et on a donc $\omega(m) > \omega(n)$ car si $p < q$ premiers et $\alpha \geq 1$ on a

$$\omega(p^\alpha) = \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{1 + p + \ldots + p^\alpha}{p^\alpha} = 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^\alpha},$$

donc $\omega(q^\alpha) < \omega(p^\alpha)$. Comme $m < n$ et que $\omega(m) > \omega(n)$ ceci contredit le fait que n est superabondant. On a donc bien $(p_1, \ldots, p_r) = (q_1, \ldots, q_r)$. Remarquons que le cas $n = 1$ correspondant simplement à $r = 0$, i.e. pas de facteurs, on a $r = 1, \alpha_1 = 0$ et la conclusion reste trivialement valable dans ce cas. Montrons maintenant que si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \geq 2, \alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ est superabondant, alors on a $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1$. S'il n'en est pas ainsi il existe donc un $1 \leq i < j \leq r$ t.p. $\alpha_i < \alpha_j$. Si on pose

$$n_1 = \Pi_{1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j}\, p_k^{\alpha_k} \text{ et } m = n_1 \times p_i^{\alpha_j} p_j^{\alpha_i}$$

donc $n = n_1 \times p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$ tout revient à montrer que l'on a $m < n$ mais que $\omega(m) \geq \omega(n)$ et ceci résultera du lemme suivant :

> *Lemme : Si $2 \leq p < q$ sont des premiers et si $1 \leq \alpha < \beta$ sont des entiers alors on a*
> $$p^\beta . q^\alpha < p^\alpha q^\beta \text{ et } \omega(p^\beta . q^\alpha) > \omega(p^\alpha . q^\beta).$$

Tout d'abord la condition $p^\beta . q^\alpha < p^\alpha q^\beta$ s'écrit aussi $p^{\beta - \alpha} < q^{\beta - \alpha}$ qui est vraie car $p < q$ et $\beta - \alpha \geq 1$.
Reste maintenant à vérifier que l'on a bien $\omega(p^\beta q^\alpha) > \omega(p^\alpha q^\beta)$. Or on a

$$\omega(p^\lambda) = 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{p^{\lambda+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

et tout revient donc à montrer que l'on a

$$(*) \qquad (1 - \frac{1}{p^{\alpha+1}})(1 - \frac{1}{q^{\beta+1}}) < (1 - \frac{1}{p^{\beta+1}})(1 - \frac{1}{q^{\alpha+1}}).$$

Posons pour simplifier $\gamma = \alpha + 1 \geq 2$ et $r = \beta - \alpha \geq 1$. L'inégalité (*) s'écrit alors

$$(1 - \frac{1}{p^\gamma})(1 - \frac{1}{q^{\gamma+r}}) < (1 - \frac{1}{p^{\gamma+r}})(1 - \frac{1}{q^\gamma})$$

i.e.

$$1 - \frac{1}{p^\gamma} - \frac{1}{q^{\gamma+r}} + \frac{1}{p^\gamma q^{\gamma+r}} < 1 - \frac{1}{p^{\gamma+r}} - \frac{1}{q^\gamma} + \frac{1}{p^{\gamma+r} q^\gamma}$$

i.e.
$$\frac{1}{p^{\gamma+r}}+\frac{1}{q^{\gamma}}+\frac{1}{p^{\gamma}q^{\gamma+r}}<\frac{1}{p^{\gamma}}+\frac{1}{q^{\gamma+r}}+\frac{1}{p^{\gamma+r}q^{\gamma}}$$
i.e. en multipliant par $p^{\gamma+r}\times q^{\gamma+r}$
$$q^{\gamma+r}+q^{r}p^{\gamma+r}+p^{r}<p^{r}q^{\gamma+r}+p^{\gamma+r}+q^{r}$$
et comme $p^r<q^r$ il suffit de montrer que l'on a
$$q^{\gamma+r}+q^{p\,\gamma+r}<p^{r}q^{\gamma+r}+p^{\gamma+r}$$
i.e.
$$p^{\gamma+r}(q^{r}-1)<q^{\gamma+r}(p^{r}-1)$$
i.e.
$$\frac{q^{r}-1}{p^{r}-1}<\frac{q^{\gamma+r}}{p^{\gamma+r}}$$
et comme $\gamma=\alpha+1\geq 2$ et que $\frac{q}{p}>1$ il suffit de montrer que
$$\frac{q^{r}-1}{p^{r}-1}<\frac{q^{r+2}}{p^{r+2}}$$
i.e.
$$(q^{r}-1)p^{r+2}<(p^{r}-1)p^{r+2}.$$
Considérons alors la fonction de la variable réelle $x\geq p$
$$\begin{aligned}
f(x)&=(p^{r}-1)x^{r+2}-(x^{r}-1)p^{r+2}.\text{ On a } f(p)=0.\text{ D'autre part}\\
f'(x)&=(p^{r}-1(r+2)x^{r+1}-rx^{r-1}p^{r+2}\\
&=x^{r-1}[(p^{r}-1)(r+2)x^{2}-rp^{r+2}]\\
&\geq x^{r-1}[(p^{r}-1)(r+2)p^{2}-rp^{r+2}]\\
&=x^{r-1}\times p^{2}[(p^{r}-1)(r+2)-rp^{r}]\\
&=x^{r-1}\times p^{2}[2p^{r}-(r+2)]\geq x^{r-1}\times p^{2}[2^{r+1}-(r+2)]
\end{aligned}$$
Donc $f'(x)>0$ dès que $2^{r+1}-(r+2)>0$ ce qui est vrai si $r\geq 1$, car en considérant $\varphi(x)=2^{x+1}-(x+2)$ on a $\varphi(1)=2^2-3=1>0$ et $\varphi'(x)=\ln(2)\times 2^{x+1}-1$, donc $\varphi'(x)\geq 0$ si $2^{x+1}\geq\frac{1}{\ln 2}$ i.e. $(x+1)\ln 2\geq\ln(\frac{1}{\ln 2})$ i.e. $x\geq-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln(2)}-1\simeq-0,47$. Donc $f(x)$ est strictement croissante sur les $x\geq p$ et on a donc bien $f(q)>0$ si $q>p$, ce qui démontre le lemme.

Montrons enfin qu'il existe une infinité d'entiers superabondants. On rappelle que la série $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ est divergente (résultat classique de la théorie des nombres). On en déduit que $\Pi_{k=1}^{\infty}\omega(p_k)=+\infty$ car
$$\ln\left(\omega(p_k)\right)=\ln(1+\frac{1}{p_k})\sim\frac{1}{p_k}.$$

Si on pose $n_r = p_1 \dots p_r$ on a $\omega(n_r) = \omega(p_1) \dots \omega(p_r) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$, donc lim $\sup_{n \to +\infty} \omega(n) = +\infty$.

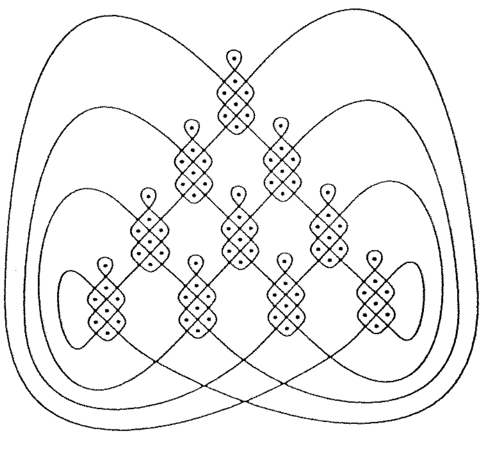
Par conséquent si n est un entier superabondant, il existe un plus petit entier $n < m$ t.q. $\omega(n) < \omega(m)$ et m est alors superabondant, donc l'ensemble des superabondants est infini.

Question subsidiaire

Si $n \geq 1$ est un entier, on dit qu'un diviseur $1 \leq d \leq n$ de n est unitaire si pgcd $(d, \frac{n}{d}) = 1$. On pose alors $\sigma^*(n) = \Sigma_{d/n} d$. On dit que n est unitairement superabondant si $\frac{\sigma^*(k)}{k} < \frac{\sigma^*(n)}{n}$ pour $1 \leq k < n$. Déterminer les entiers unitairement surabondants.

Solution (abrégée)

La fonction $\sigma^*(n)$ est multiplicative i.e. si $n = n_1.n_2$ et pgcd $(n_1, n_2) = 1$ alors $\sigma^*(n) = \sigma^*(n_1).\sigma^*(n_2)$ puisque, comme on le vérifie aisément, si $d = d_1 \times d_2$ avec $d_1 | n_1$ et $d_2 | n_2$ alors d est un diviseur unitaire de n si et seulement si α_1 est un diviseur unitaire de n_1 et d_2 est un diviseur unitaire de n_2. Il en est donc de même de $\omega^*(n) = \frac{\sigma^*(n)}{n}$. Si p est premier et si $\alpha \geq 1$, on a $\omega(p^\alpha) = \frac{1+p^\alpha}{p^\alpha} = 1 + \frac{1}{p^\alpha}$. Si $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r} \geq 2$, $q_1 < \dots < q_r$, $\alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ est la décomposition en facteurs premiers de n et si on pose $m = p_1 \dots p_r$ et si $(q_1, \dots, q_r) \neq (p_1 \dots p_r)$ ou si l'un des $\alpha_i est \geq 2$ on a $m < n$ et $\omega^*(m) > \omega^*(n)$. Donc si $n \geq 2$ est unitairement superabondant on a $n = p_1 p_2 \dots p_r$. Réciproquement il est facile de voir que si $n = p_1 p_2 \dots p_r$ alors n est unitairement superabondant, en effet, sinon il existerait un $2 \leq m < n$ t.p. $\omega^*(m) \geq \omega^*(n)$. Or on a $m = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}, q_1 < \dots < q_s, \alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq s$. En posant $t = q_1 \dots q_s$ on a $t \leq m < n$ et $\omega^*(n) < \omega^*(m) < \omega^*(t)$. Comme $\omega^*(n) = (1 + \frac{1}{p_1}) \dots (1 + \frac{1}{p_r})$ et que $\omega^*(t) = (1 + \frac{1}{q_1}) \dots (1 + \frac{1}{q_s})$. On en déduit aisément une contradiction car $q_i \geq p_i$, donc $s < r$ etc... Les unitairement superabondants sont donc les entiers $n = 1$ et $n = p_1 \dots p_r$ $(r \geq 1)$.



Dessin symétrique et 2-linéaire extrait de l'ouvrage
"Une tradition géométrique en Afrique
Les dessins sur le sable"
éd. L'Harmattan (1995)
de Paulus GERDES

- Tome 1 : Analyse et reconstruction.
- Tome 2 : Exploration éducative et mathématique.
- Tome 3 : Analyse comparative.

Table des premiers nombres superabondants

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 \quad \text{déficient}\\
4 &= 2^2 \quad \text{déficient}\\
6 &= 2 \times 3 \quad \text{parfait}\\
12 &= 2^2 \times 3\\
24 &= 2^3 \times 3\\
36 &= 2^2 \times 3^2\\
48 &= 2^4 \times 3\\
60 &= 2^2 \times 3 \times 5\\
102 &= 2^3 \times 3 \times 5\\
180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5\\
240 &= 2^4 \times 3 \times 5\\
360 &= 2^3 \times 3^2 \times 5\\
720 &= 2^4 \times 3^2 \times 5\\
840 &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7\\
1\ 260 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7\\
1\ 680 &= 2^4 \times 3 \times 5 \times 7\\
2\ 520 &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7\\
5\ 040 &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7\\
10\ 080 &= 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7\\
15\ 120 &= 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7\\
25\ 200 &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7\\
27\ 720 &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11\\
55\ 440 &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11\\
110\ 880 &= 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11\\
116\ 320 &= 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11\\
277\ 200 &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11\\
332\ 640 &= 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11\\
554\ 400 &= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11\\
665\ 280 &= 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11\\
720\ 720 &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13\\
1\ 441\ 440 &= 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13\\
2\ 162\ 160 &= 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13\\
3\ 603\ 600 &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13\\
4\ 324\ 320 &= 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13\\
7\ 207\ 200 &= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13\\
8\ 648\ 640 &= 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13\\
10\ 810\ 800 &= 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13\\
21\ 621\ 600 &= 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13\\
36\ 756\ 720 &= 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17.
\end{aligned}
$$