Excursions et incursions dans l'Analyse Harmonique d'hier et d'aujourd'hui (II)

Olivier GEBUHRER

Nous avons établi plus haut la formule $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(r, \theta)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| \hat{f}(n) \right|^2 r^{2n}$ pour $r < 1$

où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ ($n \in \mathbf{Z}$) ; c'est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier ;

et $F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt$ avec $P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$; c'est le "noyau de Poisson".

Maintenant nous savons que $F(r, \theta) \rightarrow f(\theta)$ uniformément sur le tore lorsque $r \rightarrow 1$. De la sorte on peut passer à la limite dans les deux membres de cette égalité et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| \hat{f}(n) \right|^2$$

Théorème :

L'application linéaire $f \mapsto \left(\hat{f}(n) \right)_{n \in \mathbf{Z}}$ de $C(\mathbf{T})$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ est une isométrie lorsque $C(\mathbf{T})$ est

muni de la norme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \|\hat{f}(n)\|_2^2$

En particulier, si $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \in (\mathbf{Z})$ (f continue) alors $f = 0$.

Corollaire :

Soit f une fonction $C^\infty(\mathbf{T})$. Alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbf{T}$ et cette propriété s'étend aux dérivées de tout ordre de f .

Démonstration :

Si $f \in C^\infty(\mathbf{T})$ et si $S_N(f)(\theta) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ alors $S_N(f)$ converge uniformément ainsi que toutes

ses dérivées d'après ce qu'on a vu sur le comportement des coefficients de Fourier de f . La limite $S(f)$ de $S_N(f)$ est une fonction C^∞ dont les coefficients de Fourier sont ceux de f .

On peut donc obtenir par cette méthode toute fonction $C^2(\mathbb{T})$. L'avocat général commence maintenant à être sur le grill. Fourier avait-il eu raison?

Le mémoire de Fourier date de 1807. Les études de d'Alembert datent de 1747, celles de Bernoulli datent de 1755. En 1829, Lejeune-Dirichlet décida de mettre un terme aux interrogations multiples sur la convergence de la série de Fourier vers la fonction lorsque celle-ci est continue. Pourquoi son résultat est-il intéressant? Justement pas à cause du résultat, comme on va le voir et il demeure incompréhensible que ce théorème, dont nous allons parler soit exposé SANS COMMENTAIRES comme un achèvement de la théorie jusqu'à la fin du DEUG, et en classes préparatoires!

Le résultat de Dirichlet est TRES DECEVANT. Il produit une réponse pour une situation intermédiaire entre $C^2(\mathbb{T})$ et $C(\mathbb{T})$! Or ce n'est pas le résultat qui est intéressant mais la méthode et la comparaison avec celle qui précède!

Le théorème de Dirichlet est superbement exposé en français dans le Journal de Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik (4), 1829, p.157-169) et repris in extenso dans un nouveau livre à paraître de Jean-Pierre Kahane et Pierre-Gilles Lemarié traitant à la fois des aspects historiques et de certains développements contemporains fastueux (à paraître chez Gordon and Breach). Nous y renvoyons sans hésiter la lectrice (le lecteur) qui y trouvera bien d'autres éléments de fascination que dans ce petit essai.

Nous nous bornerons à citer deux passages essentiels de cette démonstration. Dirichlet reprend le problème à son début ; il n'y a plus de fonctions analytiques mais la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{inx}$ où les a_n

sont les coefficients de Fourier d'une fonction que l'on va préciser.

Dirichlet remarque alors que si $S_N(f;x) = \sum_{n \leq N} a_n(f) e^{inx}$ on peut écrire

$$S_N(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{in(x-\theta)} f(\theta) d\theta$$

Il est donc tout naturellement conduit à CALCULER $D_N(x) = \sum_{n \leq N} e^{inx}$

Ce qui donne $D_N(x) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$. De la sorte,

$$S_N(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-\theta) f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(x-\theta)}{\sin \frac{x-\theta}{2}} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{u}{2}} f(x-u) du$$

Dirichlet commence par observer que l'un des théorèmes de Cauchy relatif à cette question de la convergence de la série de Fourier vers la fonction repose sur une démonstration fautive :

"Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est même pas suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croît applicable" (1)

L'auteur de cette remarque incisive note que pour une fonction "QUELCONQUE", soit φ , le prolongement de cette fonction aux valeurs complexes de la variable est "quelque peu sujet à caution". Ceci indique que Cauchy, sans y parvenir, cherchait une voie vers la convergence de la série de Fourier PAR LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Ce n'est pas du tout l'esprit de Dirichlet qui ne voit rien d'intéressant dans cette voie (et pour cause!) et il poursuit sa critique par une seconde observation qui RUINE MATHEMATIQUEMENT la "démonstration" de Cauchy.

Voici le passage incriminé :

"Le rapport du terme dont le rang est n, à la quantité $A \frac{\sin nx}{n}$ ne diffère de l'unité prise positivement que d'une quantité qui diminue indéfiniment à mesure que n devient plus grand."

Or la série $\sum \frac{\sin nx}{n}$ étant convergente, Cauchy croit pouvoir en déduire que la série comparée est aussi convergente, ce qui est notoirement faux si les séries comparées n'ont pas des termes de même ordre, de signe identique. Cauchy pense que si $\frac{a_n}{b_n} - 1$ tend vers 0 et si (a_n) est une série convergente, il en est de même de (b_n) .

Dirichlet indique le cas de $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et de $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

C'est donc en analysant une preuve ERRONEE que Dirichlet a construit une ETUDE NOUVELLE ET PLUS PROFONDE; Cela étant, Dirichlet ajoute : *"Je vais commencer par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ramenés"*. (Il se trompe lourdement lui aussi, comme on le verra).

Tout le conduit à examiner le comportement de $\int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ lorsque $k \rightarrow \infty$, où $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Le sagace Dirichlet commence par observer que tout devient plus simple si ON SIMPLIFIE LA VIE de la fonction f. **Il la suppose monotone décroissante de 0 à α et positive.**

On fait cette hypothèse dans ce qui suit.

On peut écrire $\int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{N(\alpha,k)-1} \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{N\pi}{k}}^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ où $N(\alpha,k)$ est le plus

grand entier n tel que $\frac{n\pi}{k} \leq \alpha$

Posons $u_n = \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$, observons que $\lim_{k \rightarrow \infty} N(\alpha,k) = +\infty$ et que $(N(\alpha,k))_k$ est une suite

croissante d'entiers. Dirichlet remarque que u_n est de signe contraire à u_{n+1} (ce qui est aisé à vérifier), que $|u_n| \leq |u_{n-1}|$ ce qui est tout aussi simple compte tenu de l'hypothèse faite sur f et

enfin que le terme singulier $\int_{\frac{n\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ est en valeur absolue plus petit que $|u_N|$: en effet, on

peut écrire $u_n = \rho_n R_n$ où $\rho_n \in \left[f\left(\frac{(n+1)\pi}{k}\right), f\left(\frac{n\pi}{k}\right) \right]$ et $R_n = \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} d\theta$

Quand au terme singulier il s'écrit $\rho_N = \int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ et il est trivial de comparer

$$\int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} d\theta \text{ à } \int_{\frac{N\pi}{k}}^{\frac{(N+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} d\theta$$

De la sorte, $\int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{N(\alpha,k)-1} \rho_n R_n + \rho_N \gamma_N$ où $\gamma_N = \int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} d\theta$

Enfin, par suite du caractère alterné de la série de droite, pour tout entier m fixé on a

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^m \rho_n R_n + \lambda_{m+1} \text{ où } |\lambda_{m+1}| \leq \rho_m |R_m|$$

Dirichlet justifie ceci par la merveilleuse preuve suivante :

"Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être formulé de cette manière. Les lettres A, A', A'', ... désignant les quantités positives en nombre quelconque et telle que $A > A' > A'' > \dots$, etc, ... la quantité $A - A' + A'' - A''' + \dots$ est positive et inférieure à A. Cela résulte immédiatement de ce que la quantité précédente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes

$$(A - A') + (A'' - A''') + \dots$$

$$A - (A' - A'') - (A''' - A''') - \dots$$

Nous nous sommes permis des abus de langage ; maintenant il faut être plus précis :

$$R_n(k) = \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} d\theta = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin \theta}{k \sin \frac{\theta}{k}} d\theta$$

Il est alors "évident" (dixit Dirichlet) que $\lim_{k \rightarrow \infty} R_n(k) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta$ pour tout n et il est connu de

lui que $\int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_n(k) = f(0)$ pour tout n .

Il ne reste plus qu'à cueillir, ce que fait Dirichlet avec une maestria certaine dans l'esquive d'une difficulté que peu de lecteurs semblent avoir noté. Comme le résultat est correct et que par ailleurs, on peut faire beaucoup mieux, cela n'a pas une grande importance¹

L'entier m restant fixé, on a donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \rho_n(k) R_n(k) = f(0) \sum_{n=0}^m \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta = f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta$$

Maintenant

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \leq \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta - \sum_{n=0}^m \rho_n(k) R_n(k) \right| + \left| \sum_{n=0}^m \rho_n(k) R_n(k) - f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta \right| + f(0) \left| \int_{(m+1)\pi}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta \right|$$

$$\text{Et } \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta - \sum_{n=0}^m \rho_n(k) R_n(k) \right| \leq |\lambda_{m+1}(k)| \text{ où } |\lambda_{m+1}(k)| \leq \rho_{m+1}(k) |R_{m+1}(k)|$$

$$\text{D'où } \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \rho_{m+1}(k) |R_{m+1}(k)| + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^m \rho_n(k) R_n(k) - f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta \right| + f(0) \left| \int_{(m+1)\pi}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta \right|$$

(On rappelle que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_n \sup_{m \geq n} u_m$)

Or le second terme du membre de droite de cette inégalité est NUL d'après ce que nous avons vu plus haut.

¹ Jean-Pierre Kahane, à qui j'ai fait part de cette observation, maintient que la preuve de Dirichlet est correcte de bout en bout. Après test effectué avec d'autres collègues, on peut se ranger à son avis OU MAINTENIR L'OPINION INVERSE. Ce qui me porte à cette deuxième alternative est simple : Dirichlet prend un soin extrême à justifier des passages, que l'on jugerait évidents aujourd'hui (mais qui n'allaient pas de soi à l'époque) ; or ce dernier passage, DELICAT, est curieusement escamoté.

$$\text{Donc } \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \leq f(0) \left[\int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta + \int_{(m+1)\pi}^\infty \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \right]$$

Maintenant le terme de gauche ne dépend pas de m, et celui de droite ne dépend pas de k.

$$\text{Par suite, } \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| = 0.$$

Dirichlet ignore l'utilisation de la $\overline{\lim}$ mais ce n'est pas le point important : son raisonnement utilise comme si cela allait de soi la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin \theta}{k \sin \frac{\theta}{k}} d\theta = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \text{ uniformément par rapport à } m!$$

Ceci est vrai mais non complètement trivial (la convergence dominée n'est ici d'aucun secours!).

Voyons maintenant brièvement la fin du raisonnement de Dirichlet : rappelons-nous que

$$S_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-u) f(u) du.$$

$$\text{Donc, en écrivant, } S_N(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-u)}{2 \sin \frac{x-u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^x + \int_x^{\pi} \right].$$

et en faisant le changement de variable $u \rightarrow x-2v$ dans la première intégrale $u \rightarrow x+2v$ dans la seconde, il vient :

$$P_N(f; x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}(x+\pi)} \frac{\sin(2N+1)v}{\sin v} f(x-2v) dv + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2N+1)v}{\sin v} f(x+2v) dv \right]$$

Considérons la seconde intégrale $\frac{1}{2}(\pi-x) \in [0, \pi]$; supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$; la fonction $v \mapsto f(x+2v)$ peut présenter plusieurs minima et maxima. ON SUPPOSE QUE CEUX-CI SONT EN NOMBRE FINI dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}(\pi-x)]$; ordonnons ces points en une suite

croissante $\ell_0 = 0 < \ell_1 < \dots < \ell_r < \ell_{r+1} = \frac{1}{2}(\pi-x)$. Par découpage on se ramène sur chaque sous-intervalle

à une intégrale du type déjà étudié : c'est trivialement vrai pour

$$\int_0^{\ell_1} \frac{\sin(2N+1)v}{\sin v} f(x+2v) dv ; \text{ pour } \int_{\ell_k}^{\ell_{k+1}} \frac{\sin(2N+1)v}{\sin v} f(x+2v) dv \text{ on remarque que } \ell_{k+1} \leq \frac{\pi}{2} \text{ et que}$$

$$\int_{\ell_k}^{\ell_{k+1}} = \int_{\ell_k}^0 + \int_0^{\ell_{k+1}}$$

Par suite toutes les intégrales restantes (en NOMBRE FINI) convergent vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Finalement, un dernier changement de variable dans la première intégrale nous permet d'énoncer le :

Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction continue par morceaux, 2π -périodique et n'admettant qu'un nombre fini de minima et de maxima ; alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_N(f, x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$

Nous retrouvons alors nos deux compères :

L'avocat général : quel travail pour si peu! Comment vérifier facilement qu'une fonction $C^1(\mathbf{T})$ vérifie les hypothèses de Dirichlet?

L'avocat : vous avez marqué un nouveau point. Mais vous ne ferez croire à personne qu'un travail aussi délicat se révèle si futile!

L'avocat général : En tout cas, nous sommes bien loin du résultat annoncé par Fourier, c'est ce qui compte.

L'avocat : Mais patientez! Voici Mr Camille Jordan qui va vous montrer quelque chose d'intéressant.

Camille Jordan (1838–1922) était un mathématicien français qui n'écrivit qu'une seule étude courte d'Analyse : il était spécialiste de théorie des groupes, et de géométrie reliée à l'algèbre. En 1881, cinquante ans APRES DIRICHLET, Jordan observe que si la propriété de Dirichlet est vraie pour les fonctions CONTINUES PERIODIQUES MONOTONES CROISSANTES, ELLE EST VRAI POUR LA DIFFERENCE DE DEUX TELLES FONCTIONS. Quelle idée banale!

Il y a toujours au moins deux façons de regarder la chute d'une pomme. Car ce que Jordan met en lumière c'est la structure d'espace vectoriel des fonctions vérifiant le théorème de Dirichlet.

Jordan observe trivialement que si $f = f_1 - f_2$ où f_1 et f_2 sont monotones croissantes alors

$\text{Var}(f) = \sup_{\sigma} \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < +\infty$ où $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ désigne une suite finie arbitraire de points strictement croissante telle que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$.

Les fonctions à variation bornée viennent de naître. De plus, on peut poser $\|f\|_v = \text{Var}(f)$ et on voit que si on définit $\mathcal{J} = \{f, 2\pi\text{-périodique} / \text{Var}(f) < +\infty\}$, alors $\|f\|_v$ définit une semi-norme sur $\mathcal{J}$, dont le noyau est réduit aux fonctions constantes. Evidemment, Jordan ne s'arrête pas en si bon chemin : si $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{J}$, lorsque f_1, f_2 sont monotones croissantes, que dire des éléments de $\mathcal{J}$?

Théorème

Toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions croissantes ; la décomposition est unique et de plus si f est continue à variation bornée, f s'écrit comme différence de deux fonctions CONTINUES MONOTONES CROISSANTES.

Ce théorème est aisé pour la première partie, non trivial pour la seconde. Jordan commence par **prolonger** la notion d'intégrale à L'ESPACE VECTORIEL $\mathcal{J}$! Ce qui se fait sans trop de mal.

Evidemment il observe que si Dirichlet pense que toute fonction continue s'écrit comme différence de deux fonctions monotones croissantes continues, il se trompe lourdement. Ensuite il donne une démonstration nouvelle du théorème précédent, qu'on peut énoncer ainsi :

Théorème :

Soit f une fonction à variation bornée 2π -périodique. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f;x) = \frac{1}{2} (f(x+0)+f(x-0))$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

L'Avocat : Alors? Qu'en dites-vous?

L'Avocat général : Soit, soit. Mais enfin on approche du XX^{ème} siècle et on ne sait toujours RIEN dire du cas des fonctions continues. Et de plus pouvez-vous me montrer que le théorème de Jordan étend le théorème à des situations plus générales que $C^2(\mathbb{T})$?

L'Avocat : Mais évidemment! Mr Jordan nous indique que si $|f(s)-f(t)| \leq M|s-t|$ pour $s, t \in [0, 2\pi]$, alors $f \in \mathcal{C}^1$. Or cela est vrai pour toute fonction $C^1(\mathbb{T})$! Vous voyez...

L'avocat général : Vous pensez bien que je ne vous ai pas torturé de cette façon par hasard. Voici venir Monsieur du Bois-Reymond qui va clore ce procès définitivement. Nous sommes en 1876, c'est à dire peu de temps avant votre Mr Jordan.

L'argument qui suit est en fait dû à Henri Lebesgue, mais le premier exemple construit est dû à du Bois-Reymond.

Posons $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(n_k \theta) \chi_{I_k}(\theta)$, $\theta \in]0, \pi[$; où les α_k tendent vers 0, et où

$$\chi_{I_k}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \notin]\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}] \\ 1 & \text{si } \theta \in]\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}] \end{cases} \quad \text{c'est à dire } \chi_{I_k}(\theta) \text{ fonction caractéristique de l'intervalle } I_k =]\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}]$$

et où les entiers (n_k) forment une suite strictement croissante à définir ($n_0=1$).

Tout d'abord, f est continue sur $]0, \pi[$ car chaque θ n'appartient qu'à l'un des intervalles $] \frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}]$; et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ car $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$.

On choisit $\alpha_1=1$, $n_2=2$, de sorte que $f(\pi)=0$ et on prolonge f par parité en une fonction 2π -périodique continue.

On va maintenant préciser les α_k et les n_k . Supposons choisis $n_1 < \dots < n_{k-1}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ et les intervalles I_j associés sont définis ($I_1 =]\frac{\pi}{2}, \pi]$)

Posons $\Phi_k(\theta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \sin(n_j \theta) \chi_{I_j}(\theta) & \text{si } \theta \in]\frac{\pi}{n_k}, \pi] \\ 0 & \text{sinon sur } [0, \pi] \end{cases}$ et prolongée par parité à $[-\pi, \pi]$ puis par périodicité à $\mathbb{R}$

Alors $\frac{\Phi_k(\theta)}{\theta}$ est continue, prolongée de façon à être 2π -périodique et **par le théorème de**

Riemann $\left| \widehat{f}(n) \right| \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow \infty$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0; \pi]} \frac{\Phi_k(\theta)}{\theta} \sin n\theta d\theta = 0$ (Φ_k est supposée paire!).

On choisit alors $n_k = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{k-1} \cdot N_k$ où $N_k \geq 2k$ assez grand pour que $\left| \frac{2}{\pi} \int_{[0; \pi]} \frac{\Phi_k(\theta)}{\theta} \sin(n_k \theta) d\theta \right| < 1$

Avec ce choix de n_k , on a $I_k =]\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}]$ et on pose : $f(\theta) = \alpha_k \sin(n_k \theta)$ dans I_k .

On doit encore choisir $\alpha_k < 1$. On va estimer les sommes partielles $S_{n_k}(f, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{[0; \pi]} f(\theta) \sin(n_k \theta) \frac{d\theta}{\theta} &= \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\int_{[0; \frac{\pi}{n_k}]} + \int_{[\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}]} + \int_{[\frac{\pi}{n_{k-1}}, \pi]} \right] \\ &= A_k + B_k + C_k \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $C_k = O(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Mais $|f(\theta)| \leq 1$ pour tout θ ; par suite, indépendamment du choix des α_k , on a

$$|A_k| \leq \int_{[0; \frac{\pi}{n_k}]} |\sin(n_k \theta)| \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = O(1) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty$$

Finalement, reste à voir B_k :

$$B_k = \alpha_k \int_{I_k} (\sin(n_k \theta))^2 \frac{d\theta}{\theta} = \alpha_k \int_{I_k} \frac{1 - \cos 2n_k \theta}{2\theta} d\theta = \alpha_k \times \frac{1}{2} \times \int_{I_k} \frac{dt}{t} - \alpha_k \int_{I_k} \cos(2n_k t) \frac{dt}{t} = B'_k - B''_k$$

Choisissons $\alpha_k = (\text{Log } N_k)^{-\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < 1$).

Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, $B'_k = \frac{1}{2} (\text{Log } N_k)^{1-\varepsilon} \rightarrow \infty$ et si on examine B''_k , on trouve :

$$\left[\frac{\sin(2n_k \theta)}{2n_k \theta} \right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} + \int_{I_k} \frac{\sin 2n_k \theta}{2n_k} \frac{d\theta}{\theta^2}$$

Le choix des n_k montre que la partie intégrée est nulle. L'intégrale restante est dominée par

$$\frac{1}{2n_k} \int_{[\frac{\pi}{n_k}, \infty[} \frac{dt}{t^2} = O(1) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

On voit donc que $S_{N_k}(f, 0) \sim \frac{1}{2} (\text{Log } N_k)^{1-\varepsilon} + O(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Par conséquent, on a trouvé une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas en 0 vers la fonction. Evidemment, elle n'est pas à variation bornée en 0 comme on peut le vérifier trivialement.

Au point où nous en sommes, résumons-nous car à partir de cet instant, nous quittons le "procès de Fourier" pour entrer dans la période contemporaine.

1) Si $f \in C(\mathbf{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum \left| \hat{f}(n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \hat{f}(n) \right| = 0$ si $|n| \rightarrow \infty$

2) Si $f \in C(\mathbf{T})$ il existe une suite de polynômes $(P_N(f))_{N \in \mathbf{N}}$ trigonométriques qui converge uniformément vers f sur $\mathbf{T}$.

3) Si f est continue à variation bornée, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f; x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{T}$

En outre on peut même prouver que dans ce cas, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_\infty = 0$, (ce qui précise 2) lorsque f est à variation bornée.

4) Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas vers la fonction (et même est non bornée en un point!).

Pendant toute la période envisagée, la notion d'intégrale s'est faite plus précise. **On abandonne progressivement l'idée de primitive** et on considère des approximations discrètes dont le point culminant sera donné par B. Riemann dans un unique Mémoire éblouissant où il soulèvera une question promise à une histoire dont nous ne connaissons pas le terme : la conjecture de Riemann associée à la fonction $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n^{-s}$; $\text{Re}(s) > 1$.

Pendant une courte période, certaines recherches conduisent à raffiner encore le travail de Jordan.

Voici deux résultats de ce type ; pour des raisons liées au développement historique nous ne démontrons que le premier.

Commençons d'abord par quelques propriétés de D_N :

$$\tilde{D}_N(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq N} e^{inx}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{D}_N dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{D}_N dt = 1 \text{ pour tout } N ; \left| \tilde{D}_N(t) \right| \leq N + \frac{1}{2} \text{ pour tout } N.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \leq \frac{\pi}{2t} \text{ pour } t \in]0, \pi[, \left| \tilde{D}_N(t) \right| \leq \frac{\pi}{2|t|}, |t| \in]0, \pi[\text{ pour tout } N.$$

Il est utile et essentiel de remplacer $\tilde{D}_N$ par une autre expression :

$$D_N^*(t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{D}_{N-1}(t) + \tilde{D}_N(t) \right) = \frac{\sin Nt}{2 \text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

De plus $\tilde{D}_N(t) - D_N^*(t) = \frac{[D_N(t) - D_{N-1}(t)]}{2} = \cos Nt$. De la sorte,

$$S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \tilde{D}_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N^*(x-t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos N(x-t) dt$$

Par le théorème de Riemann, $(\left| \hat{f}(n) \right| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty)$ on voit que

$$S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N^*(x-t) dt + o(1) \text{ (où } o(1) \text{ est UNIFORME en } x)$$

Supposons maintenant qu'il existe une constante A telle que pour UN $x \in \mathbb{T}$ on ait

$$\int_{[0, \pi]} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right] \frac{dt}{t} < +\infty ; \text{ Nous avons } S_N^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N^*(x-t) dt \text{ et}$$

$$S_N^*(f, x) - A = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right] \frac{\sin Nt}{2t \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$$

Notre hypothèse sur f équivaut maintenant à dire que $\int_{\mathbb{T}} \left| \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right] \frac{1}{2t \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt < +\infty$

C'est beaucoup moins fort que de demander que la fonction

$$F_x(t) = \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right) \frac{1}{2t \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \text{ soit continue même si } f \text{ est continue.}$$

On est donc ramené à la question suivante : si $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt < +\infty$ s'ensuit-il que

$$\lim_{|N| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-iNt} dt = 0 ?$$

Il y a une foule de problèmes cachés derrière la question. Enfin, si on accepte de parler de façon un peu vague et que l'on admet la dernière propriété (Extension du théorème de

Riemann) on voit que : $\lim_{|N| \rightarrow \infty} S_N^*(f, x) - A = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N(f, x) - A) = 0$

Théorème (Dini)

Soit f une fonction sur le tore "*intégrable*". Supposons l'existence d'un nombre A tel que pour

$$\text{un } x \in \mathbf{T} \int_{\pi} \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A \right] \frac{dt}{t} < +\infty. \text{ Alors } \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f, x) = A$$

Nous avons signalé plus haut que peu à peu la notion d'intégrale s'était évadée de son sens premier : la primitive d'une fonction.

C'est Henri Lebesgue qui tente le premier d'y voir clair en cherchant à COMPRENDRE LE PROBLEME DE LA DERIVABILITE D'UNE FONCTION.

Définition : On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles $I_k =]a_k, b_k[$ (le fait qu'ils soient ouverts, fermés ou non n'a aucune importance ici) telle que $\sum_k (b_k - a_k) \leq \varepsilon$ et que $\bigcup_k I_k \supset A$.

Il est immédiat qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Lebesgue nulle est encore de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème : soit f une fonction monotone sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable en tout point à l'exception peut-être d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Ce résultat remarquable et profond demande trop de place pour être démontré ici. Il repose sur un lemme remarquablement simple au nom évocateur : le lemme du soleil couchant (ou levant selon l'humeur). On en trouvera un exposé superbe dans le livre "*Leçons d'Analyse Fonctionnelle*" de B. Riesz et S. Nagy.

Autrement dit toute fonction à variation bornée est dérivable presque partout! C'est vraiment le point culminant de la théorie à ce stade. On est donc infiniment loin avec le théorème de Dirichlet, de Jordan, de Dini, d'atteindre l'ensemble des fonctions continues et on a vu par ailleurs (du Bois-Reymond) que la classe des fonctions continues reste mystérieuse pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier.

Le théorème de Lebesgue change le paysage du tout au tout. SI LES ENSEMBLES EXCEPTIONNELS DE LA DERIVATION SONT LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE, IL DOIT ETRE POSSIBLE D'INTEGRER DES FONCTIONS QUI NE SONT DEFINIES QUE PRESQUE PARTOUT!

Le changement de point de vue est total ; le début du XX^{ème} siècle en verra d'autres ; je ne crains pas d'affirmer que la théorie de l'intégration de Lebesgue représente la même volte conceptuelle que la théorie de la relativité dont elle est contemporaine.

Il ne serait pas juste de ne pas mentionner que le Mémoire déjà cité de Riemann, uniquement préoccupé de légitimer le procédé d'intégration par un passage à la limite trouve, 40 ans avant Lebesgue la même condition pour qu'une fonction soit intégrable (au sens ancien) : la fonction ne doit avoir de points de discontinuité que sur un ensemble négligeable.

Mais Riemann ne fait RIEN de cette condition et C'EST COMPREHENSIBLE. toute la période historique antérieure conduit à chercher des RAFFINEMENTS successifs et à LEGITIMER pour des classes plus vastes de fonctions, les résultats anciens. Il ne pouvait PAS VENIR A L'IDEE DE RIEMANN que la condition ainsi trouvée était fondamentale : il ne sert à rien et on ne peut rien trouver en cherchant à INTEGRER DES FONCTIONS DE PLUS EN PLUS DISCONTINUES.

Par exemple $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos 2\pi n! x)^m$ est discontinue en tout point et pourtant "provient" de fonctions continues. Elle n'est pas intégrable Riemann. Ce qui évidemment condamne ipso facto cette conception. Que peut on faire d'une intégrale qui n'autorise pas les passages à la limite les plus simples?

Pour Riemann, la condition trouvée était jolie et elle lui PROUVAIT que la classe naturelle des fonctions "les plus générales de l'analyse" était constitué par les fonctions CONTINUES.

Une fois l'intégration de Lebesgue mise au point les choses allèrent très vite : d'abord on s'aperçoit que l'espace vectoriel $C[a,b]$ des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \text{ pour } p \in [1, \infty] \text{ admet un complété qui est UN NOUVEL ESPACE DE FONCTIONS DEFINIES PRESQUE PARTOUT.}$$

On étendit très vite à l'espace $L^2(\mathbf{T})$ le théorème suivant :

Théorème : Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$ et $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \text{ et } f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f) \text{ au sens de la norme précédente : } \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0.$$

De là on tire le

Corollaire :

Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$; il existe une suite strictement croissante (N_k) d'entiers telle que $S_{N_k}(f) \rightarrow f$ presque partout.

N'eût été le résultat de du Bois-Reymond, on aurait pu se demander **si, lorsque** $f \in C(\mathbf{T})$ il existe une suite (N_k) d'entiers telle que $S_{N_k}(f) \rightarrow f$ **partout**. Les choses prirent une autre tournure. Le mathématicien russe Kolmogorov prouva autour des années 40 le résultat suivant.

Théorème : Il existe une fonction $f \in L^1(\mathbf{T})$ telle que $S_N(f)$ diverge en tout point du tore.

Avec ce résultat, le mystère des fonctions continues rebondissait à une hauteur jamais atteinte (continues partout, nulle part dérivables, elles avaient cessé depuis longtemps d'être des

monstres pour devenir l'objet GÉNÉRIQUE FONCTION CONTINUE : avez vous déjà vu une fonction continue? Voilà un beau thème de méditation! **Prouver** qu'il vous est impossible d'en TRACER UNE AU TABLEAU MÊME SI VOUS VOUS PERSUADEZ QUE VOUS AVEZ UN TRAC MONSTRE...).

Toute fonction continue n'est-elle pas $L^1(\mathbf{T})$? Est-ce que l'exemple de du Bois-Reymond pouvait signifier qu'il existe des fonctions CONTINUES dont la série de Fourier DIVERGE partout? Horresco referens! Evidemment l'exemple de Kolmogorov ne prouvait rien car elle n'était pas voisine d'une fonction continue!

Ce problème tourmenta des générations de mathématiciens tous plus brillants les uns que les autres.

En 1966 paru dans la revue "*Acta Mathematica*" un article du (alors jeune) mathématicien Lennart Carlson qui prouvait le

THEOREME :

Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$. Alors $S_N(f) \rightarrow f$ presque partout.

Ce théorème, achèvement temporaire d'une série de questions sur le tore, lui valut la médaille Fields. Une démonstration exhibable en Licence est encore attendue à ce jour.

Ce résultat fut vite complété par le

THEOREME : Soit $f \in L^p(\mathbf{T})$, $p \in]1, +\infty]$; alors $S_N(f) \rightarrow f$ presque partout.

Ce résultat est dû à Hunt. Le cas $p = +\infty$ est **inclus** dans le théorème de Carlson de façon triviale.

Signalons une conséquence amusante de ce résultat EXTRAORDINAIRE. En 1988–1989, parut dans la RMS un curieux article sur les fonctions analytiques. L'auteur, cherchant sans doute à allécher le lecteur, posa deux questions d'entrée de jeu : les voici.

1) Peut-on trouver une série entière de rayon de convergence 1 prolongeable en une fonction continue au disque fermé dont la série de Fourier associée diverge partout? A défaut, une série uniformément bornée sur le disque fermé admettant la même propriété.

2) Peut-on trouver une série entière **partout** convergente sur le cercle (de rayon de convergence égal à 1) dont la série de Fourier associée ne soit pas la série d'une fonction de $L^1(\mathbf{T})$?

Ces deux questions (l'article abonde de bizarreries) sont étranges. Voici pourquoi. **La réponse à la question 1) est NON** et cela résulte immédiatement du THEOREME DE Carlson.

Si j'ai bien compris la question on se donne $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à 1 et

on suppose que φ se prolonge en une fonction $\tilde{\varphi}$ continue sur le disque unité fermé.

Regardons $\|\varphi_r\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$. Comme φ est bornée dans $\overline{\mathbf{D}}$, un passage à la limite de convergence dominée donne

$$\|\tilde{\varphi}\|_2^2 = \sum |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

où par abus de notations on a noté $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ au

cercle unité. Les coefficients de $\tilde{\varphi}$ sont donc les a_n et par le théorème de Carlson $S_N(\varphi) \rightarrow \tilde{\varphi}$ presque partout.

On peut faire de même pour une série uniformément bornée par un raisonnement à peine plus compliqué (il faut utiliser la compacité faible des boules de $L^\infty(\mathbf{T})$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Comment un élève de Spéciales même génial pourrait-il avoir l'idée d'une pareille propriété?

Quant à la seconde question, il est évident que le problème est aussi peu naturel que possible car la propriété indiquée (convergence PARTOUT) n'est pas un invariant de la classe de la fonction dans $L^1(\mathbf{T})$. Enfin, on peut certainement trouver un exemple (qui n'apporte RIEN à la théorie).

Il est connu que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{\text{Log}(1+n)}$ converge partout et sa somme définit une fonction sur le tore qui n'appartient pas à $L^1(\mathbf{T})$.

Si on pose $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\text{Log}(1+n)}$, φ est une série entière de rayon de convergence égal à 1 et

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\text{Log}(1+n)}$$

converge partout sauf au point 0 ($\equiv 2\pi$).

La série converge donc presque partout pour la mesure de Lebesgue et par suite répond PRESQUE à la question posée. Si on veut éviter le problème en $\theta=0$ ($\equiv 2\pi$) il suffit de prendre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{in\theta}}{\text{Log}(1+n)}$$

dont la partie imaginaire est $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\theta)}{\text{Log}(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sinn}(\theta+\pi)}{\text{Log}(1+n)}$ et

donc n'appartient pas à $L^1(\mathbf{T})$!

Il n'est donc pas inutile de noter à ce propos qu'il n'est pas SAIN de proposer des thèmes de réflexion à la RMS qui, ou bien dépassent de très loin le NIVEAU éventuel de CONNAISSANCES des élèves, ou sont des problèmes formels dont on ne s'est pas ASSURE DE L'intérêt MATHEMATIQUE!

In fine, je ne peux que prendre la balle au bond à propos d'un très vieux serpent de mer puisque la RMS à réouvert le débat récemment. Doit-on enseigner l'intégrale de Lebesgue dès le premier cycle?

Mon opinion est qu'on y a trop facilement renoncé MÊME SI CELA DEMANDE UN EFFORT PEDAGOGIQUE CONSIDERABLE. En tout cas, rien n'est pire que de construire

la $n^{\text{ième}}$ (n grand) intégrale intermédiaire entre Riemann et Lebesgue. **Rien n'est pire car cela fausse complètement les idées.** Il ne vient à l'idée de personne de construire une mécanique intermédiaire entre la mécanique galiléenne et la théorie de la relativité restreinte même si l'enseignement de celle-ci est loin d'être parfaite.

Au bout de ce périple, il nous reste à signaler au lecteur (à la lectrice) des ouvrages à mes yeux fondamentaux ET TRES LISIBLES (crayon en main).

1) R.E. EDWARDS : Fourier series, a Modern Introduction, 2 tomes (Springer Graduate Texts in Mathematics).

Ce livre où ABONDENT les sujets intéressants y compris en exercices est la version moderne de l'ouvrage immortel de Antoni Zygmund. Le premier tome traite du point de vue classique, le second du point de vue contemporain (dont nous traitons dans la seconde partie).

2) T.W. KÖRNER : Fourier Analysis ; Cambridge University Press

Itinéraire très plaisant et varié, tout en restant élémentaire, avec des notes historiques.

3) J.P. KAHANE et R. SALEM : Ensembles parfaits et séries trigonométriques ; Herman, Nouvelles Editions).

Monographie classique écrite de façon superbe montrant les liens entre l'Analyse Harmonique classique et la théorie des nombres.

4) J.P. KAHANE ; P.G. LEMARIE-RIEUSSET : Fourier series and Wavelets ; à paraître en 1995 chez Gordman and Breach).

Cet ouvrage renouvelle complètement le style des livres de mathématiques ; la première partie est un itinéraire historique très documenté dans l'Analyse de Fourier classique et contemporaine, la seconde rassemble une étude approfondie du dernier sujet découvert qui implique aussi un bouleversement complet de notre conception des séries de Fourier : les Ondelettes.

5) A. TORCHINSKY : Real Harmonic Analysis (Academic Press)

Ce livre, très intéressant, introduit aux questions actuelles des intégrales singulières : il fait le point des résultats les plus importants obtenus récemment, tout en partant d'un niveau raisonnable, de sorte qu'on peut le lire sans trop de peine. Malheureusement, le texte est constellé de fautes de frappe (peut-être pire) et cela oblige à une vigilance constante.