CYCLES ET NON-LINÉARITÉ

Michel ÉMERY[1]

(C.N.R.S. et Université de Strasbourg)

La célèbre *Loi de l'Emm... Maximal* est un principe universel, s'appliquant non seulement dans toutes les sciences (humaines, inhumaines et autres) mais aussi et surtout dans la vie quotidienne. Comme tout principe, elle est indémontrable et se vérifie par ses conséquences. Celles-ci sont innombrables[2] ; certaines d'entre elles, ressortissant aux sciences exactes, peuvent être démontrées; c'est le cas par exemple du fameux *théorème de la tartine de beurre*[3]. Notre propos est d'énoncer et de démontrer une autre conséquence, peut-être moins connue, de cette loi, le *théorème du vent en face.*

Vous partez à vélo pour un pique-nique dans les Vosges. En pédalant le matin contre le vent d'ouest, vous êtes en droit d'espérer, au retour, un vent favorable. Eh bien non! Vous aurez l'après-midi à peiner contre un vent d'est. Vous en tirez la leçon : ce doit être une particularité du régime éolien en plaine rhénane. Mais si la fois suivante vous tentez de mettre cette observation à profit en allant pique-niquer en Forêt-Noire, vous serez le matin face à un vent d'est et lutterez au retour contre le vent d'ouest.

Bien sûr, ceci est un peu caricatural, et il vous est déjà arrivé de savourer un bon vent dans le dos (par exemple, lors des tourbillonnements qui précèdent l'orage; mais ceci est un autre domaine d'application de la L. E. M.); cependant, en rassemblant vos souvenirs, vous conviendrez sans doute avoir été plus souvent gêné que porté par le vent. Il y a à cela une raison évidente : aidé par le vent, on roule plus vite, et cela dure donc moins longtemps (pour la même raison, on passe bien plus de temps dans les montées que dans les descentes). Mais cela n'explique pas tout, par exemple les nombreuses fois où l'on a le vent dans le nez aussi bien à l'aller qu'au retour.

THÉORÈME. — *Un cycliste donné trouvera gênants plus de la moitié des vents possibles. Dualement, un vent donné gêne plus de la moitié des cyclistes.*

---

1. Je remercie H. Rubenthaler pour ses commentaires et sa participation aux travaux pratiques.

2. Voir par exemple *Murphy's Law and other reasons why things go wrong,* par Arthur Bloch, édité par Price/Stern/Sloan, Los Angeles 1977, et *Murphy's Law Book Two, more reasons why things go wrong,* même auteur, même éditeur, 1980.

3. Une démonstration de ce théorème, due à R. Matthiews, est expliquée par I. Stewart dans *The Anthropomurphic Principle,* Scientific American, décembre 1995 (traduction française : *Le principe anthropomurphyque,* Pour la Science, janvier 1996).

Pour démontrer ceci, il faut modéliser la situation considérée; nous allons la simplifier à l'aide de deux hypothèses.

a) Le cycliste sera assimilé à une sphère. Cette hypothèse n'est guère réaliste mais elle simplifie énormément le travail, en évitant entre autres les effets d'aile ou de voile, par lesquels on pourrait par exemple prendre appui sur un vent non portant (et sur le sol) pour se propulser comme un voilier serrant le vent.[4]

b) Cette sphère placée dans un courant d'air uniforme de vitesse $\vec{u}$ subit une force $\vec{f}(\vec{u})$ de même direction et de même sens que $\vec{u}$, de module $f\big(|\vec{u}|\big)$ où f est une fonction convexe strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $f(0) = 0$. Cette hypothèse dit deux choses. D'abord, la force est constante dans le temps : nous négligeons, par exemple, les irrégularités liées aux tourbillons qui pourraient apparaître dans le sillage. Ensuite, la convexité de f : elle est inspirée par les modèles aérodynamiques les plus élémentaires, qui admettent une résistance f linéaire en deçà d'un certain seuil, puis quadratique au-delà. Nous supposerons aussi que la fonction convexe f n'est pas linéaire; plus précisément, le *seuil de non-linéarité* (le plus grand nombre r, éventuellement nul, tel que f soit linéaire sur $[0, r]$) devra être suffisamment petit pour que la non-linéarité se manifeste déjà dans le domaine de vitesses que nous considérerons.

La force subie est donnée par $\vec{f}(\vec{u}) = f\big(|\vec{u}|\big)\, \vec{u} / |\vec{u}|$; pour simplifier cette formule, nous poserons $g(s) = f(s)/s$, de sorte que $\vec{f}(\vec{u}) = g(|\vec{u}|)\, \vec{u}$; la fonction g est positive, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, constante sur $[0, r]$, strictement croissante sur $[r, \infty[$ et strictement positive sur $]0, \infty[$. (Les hypothèses sur f ne seront plus employées dans la suite; seules seront utilisées ces propriétés de g, qui sont un peu plus faibles, puisqu'elles n'entraînent pas la convexité de f.)

C'est la non-linéarité de la résistance qui sera la clé du théorème. Supposons par exemple un vent $\vec{v}$ parfaitement latéral, perpendiculaire à la vitesse $\vec{c}$ du cycliste. Le vent apparent (vitesse de l'air par rapport au cycliste) est $\vec{u} = \vec{v} - \vec{c}$. En régime linéaire, c'est-à-dire si $f(s) = ks$, la résistance $\vec{f}(\vec{u})$ est $k\vec{u} = k\vec{v} - k\vec{c}$; sa composante normale $k\vec{v}$ est compensée par la résistance du sol (inclinaison latérale du cycliste) et le cycliste lutte contre la même force $-k\vec{c}$ que s'il n'y avait pas de vent. Mais en régime non-linéaire, le coefficient constant k est remplacé par $g\big(|\vec{u}|\big)$ qui est fonction croissante de $|\vec{u}|$, donc de $|\vec{v}|$ (car $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{v}^2 + \vec{c}^2}$ varie dans le même sens que $|\vec{v}|$ à $\vec{c}$ fixé), et la résistance $-g(|\vec{u}|)\, \vec{c}$ éprouvée par le cycliste est supérieure à $-g(|\vec{c}|)\, \vec{c}$, résistance éprouvée par le même cycliste, à la même vitesse, mais en l'absence de vent latéral. Plus généralement, que $\vec{v}$ soit ou non perpendiculaire à $\vec{c}$, *la non-linéarité interdit de décomposer fictivement le vent en composantes parallèle et perpendiculaire au cycliste, car la force exercée par une somme (vectorielle) de vents n'est plus la somme (vectorielle) des forces exercées séparément par ces vents fictifs.* La composante latérale du vent a donc un effet sur la résistance longitudinale à l'avancement; c'est cet effet qu'il s'agit d'étudier.

4. De toutes façons, la recherche d'un tel effet de voile ne semble guère compatible avec l'équilibre du cycliste. (Expériences personnelles, non publiées.)

Dans toute la suite, la Fonction f (Force Freinante) sera Fixée; la Célérité $\vec{c}$ du Cycliste sera Constante (et non nulle); nous prendrons comme Variable le Vecteur Vitesse $\vec{v}$ du Vent (par rapport au sol). La projection orthogonale des vecteurs sur la direction du déplacement, direction donnée par $\vec{c}$, sera notée π.

La vitesse de l'air par rapport au cycliste (vent apparent) est $\vec{u} = \vec{v} - \vec{c}$; le cycliste subit la force $\vec{f}(\vec{u})$ et doit pédaler contre (ou avec) la force $\pi\vec{f}(\vec{u}) = \pi\vec{f}(\vec{v} - \vec{c})$, projection orthogonale de $\vec{f}(\vec{u})$ sur la direction du déplacement.

DÉFINITIONS. — *Deux vents $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ seront dits* équivalents *s'ils gênent (ou aident) autant le cycliste, c'est-à-dire si*

$$\pi\vec{f}(\vec{v}_1 - \vec{c}) = \pi\vec{f}(\vec{v}_2 - \vec{c}) .$$

Un vent $\vec{v}$ sera dit neutre *s'il est équivalent au vent nul, c'est-à-dire si*

$$\pi\vec{f}(\vec{v} - \vec{c}) = \pi\vec{f}(-\vec{c}) ;$$

il sera dit favorable *(respectivement* gênant*) s'il est équivalent à un vent de la forme $\lambda\vec{c}$ où λ est un scalaire strictement positif (respectivement strictement négatif).*

Lorsque λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la force $\vec{f}\big((\lambda-1)\,\vec{c}\big)$ due à un vent $\lambda\vec{c}$ varie de façon continue et strictement monotone de $-\infty\vec{c}$ à $+\infty\vec{c}$ (cela résulte des hypothèses sur f); elle passe donc une fois et une seule par chaque multiple de $\vec{c}$ et il en résulte que *chaque vent est équivalent à un vent parallèle à $\vec{c}$ et un seul.* En particulier, *chaque vent est soit gênant, soit neutre, soit favorable.*

Ces définitions permettent de remplacer la formulation floue du théorème par un énoncé précis.

PROPOSITION. — *Si un vent $\vec{v}$ est neutre, son opposé $-\vec{v}$ est soit neutre, soit gênant; il existe un vent neutre d'opposé gênant. Si $\vec{v}$ est favorable, $-\vec{v}$ est toujours gênant; il existe un vent gênant d'opposé gênant.*

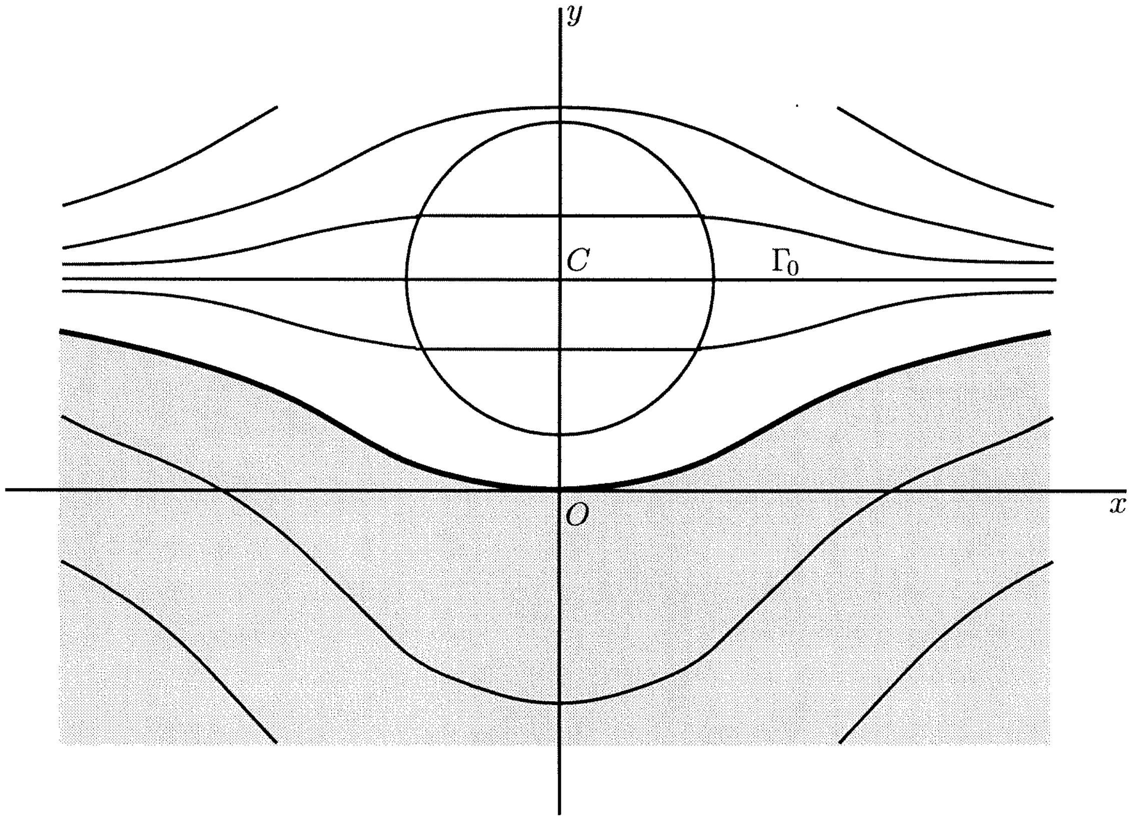
REMARQUES. — a) Cet énoncé décrit l'effet de deux vents opposés sur le même cycliste; par symétrie, il renseigne aussi sur l'action du même vent sur deux cyclistes aux célérités opposées : la dernière phrase dit qu'un vent qui m'aide lors de l'aller me gênera nécessairement au retour, mais qu'il m'arrive de l'avoir en face et à l'aller et au retour.

b) La notion de vents équivalents, dans laquelle la célérité $\vec{c}$ a été fixée, ne correspond pas à la pratique : en cas de vent j'adapte ma vitesse pour pédaler à puissance constante plutôt que de pédaler plus ou moins fort pour maintenir ma vitesse. Mais la proposition s'intéresse seulement à la trichotomie vent gênant/neutre/favorable, et ces notions sont aussi pertinentes dans les deux situations (vitesse fixée ou puissance fixée); c'est évident pour les vents neutres, sous lesquels la vitesse *et* la composante longitudinale de la résistance sont les mêmes qu'en l'absence de vent, c'est vrai aussi pour les vents gênants ou favorables : il va de soi que le même vent qui m'obligerait à dépenser plus d'énergie pour conserver ma vitesse me ralentit si je choisis de ne pas pousser plus fort sur les pédales.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. — Choisissons un repère orthonormé dans lequel les deux[5] composantes de $\vec{c}$ sont $(0, c)$ où $c > 0$; soient (x, y) celles du vent $\vec{v}$. La force due au vent est $\vec{f}(\vec{v}-\vec{c}) = g(|\vec{v}-\vec{c}|)\,(\vec{v}-\vec{c})$; sa composante longitudinale $\pi\vec{f}(\vec{v}-\vec{c})$ est donc donnée par $(y-c)g\big(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\big)$ et les vents équivalents entre eux dessinent dans l'espace vectoriel des vents les courbes Γ_a d'équations

$$(y-c)\,g\big(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\big) = a\,.$$

La figure ci-dessous (justifiée plus loin) correspond au cas où le seuil de non-linéarité r est non nul et où g est non bornée. On y voit les deux axes, la famille des courbes Γ_a, le point $C = (0, c)$ qui représente la vitesse $\vec{v} = \vec{c}$, et le cercle de rayon r centré en C. La courbe des vents neutres est tracée en gras (c'est celle des Γ_a qui passe par l'origine) et la région des vents gênants apparaît en grisé.



À l'intérieur du cercle, les courbes sont rectilignes et horizontales. Pour $a = 0$, la courbe Γ_0 est la droite d'équation $y = c$; elle représente les vents équivalents à $\vec{c}$, qui sont aussi les vents $\vec{v}$ tels que $\pi\vec{v} = \vec{c}$. Chaque Γ_a est symétrique par rapport à l'axe des y; la symétrique de Γ_a par rapport à la droite Γ_0 (et aussi au point C) est Γ_{-a}. Chaque courbe Γ_a a une asymptote horizontale, qui est la droite Γ_0 si g n'est pas bornée, et la droite d'équation $y = c + (a/\sup g)$ si g est bornée. Toutes ces propriétés se lisent facilement sur l'équation de ces courbes.

5. Même si le vent n'est pas horizontal (avez-vous déjà roulé sur les bouches d'aération du parking de la place Kléber à Strasbourg ?), on peut toujours travailler dans un plan contenant $\vec{v}$ et $\vec{c}$.

Pour x fixé, lorsque y croît de c à $+\infty$, la fonction $(y-c)\, g\big(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\big)$ varie continûment de 0 à $+\infty$ en croissant strictement (c'est le produit de deux fonctions continues, croissantes et strictement positives, dont l'une est strictement croissante) ; de même, lorsque y croît de $-\infty$ à c, $(y-c)\, g\big(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\big)$ varie continûment de $-\infty$ à 0 en croissant strictement. Il en résulte que, pour a et x fixés, il existe un y et un seul tel que $(x,y) \in \Gamma_a$, et l'équation de Γ_a peut être réécrite sous la forme $y = \phi_a(x)$, pour une fonction ϕ_a qui est évidemment paire. Il en résulte aussi que les courbes des vents favorables (respectivement gênants) sont au-dessus (respectivement au-dessous) de la courbe des vents neutres.

Enfin, pour $a < 0$, c'est-à-dire pour les courbes au-dessous de la droite Γ_0, la fonction ϕ_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la seule exception étant le cas où r est non nul et où $a \in \,]-rg(r), 0[\, = \,]-f(r), 0[$: ϕ_a est alors constante dans un intervalle autour de zéro, qui correspond au passage de la courbe Γ_a à l'intérieur du cercle. (Bien entendu, par symétrie, ces propriétés s'inversent pour $a > 0$.) En effet, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points de Γ_a tels que $0 \leqslant x_1 < x_2$ et $y_1 \geqslant y_2$, on doit avoir d'une part

$$(y_1-c)\, g\big(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}\big) = (y_2-c)\, g\big(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2}\big)$$

car les deux points sont sur une même Γ_a, d'autre part $0 > (y_1-c) \geqslant (y_2-c)$ car Γ_a est au-dessous de Γ_0, et enfin $0 < g\big(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}\big) \leqslant g\big(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2}\big)$ car g est croissante et $0 < |y_1-c| \leqslant |y_2-c|$ et $0 \leqslant x_1 < x_2$; mais ces trois conditions ne peuvent être simultanément réalisées que si l'on a à la fois $y_1 = y_2$ et $g\big(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}\big) = g\big(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2}\big)$. Les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont donc tous deux sur une même horizontale et, g étant strictement croissante sur $]r, \infty[$, tous deux dans le cercle.

Finalement, la courbe des vents neutres, obtenue pour $a = -cg(c) = -f(c)$, est entièrement contenue dans le demi-plan des $y \geqslant 0$ et ne rencontre l'axe des x qu'à l'origine ou, dans le cas où $r > c$, le long du segment $\big[-\sqrt{r^2-c^2}, +\sqrt{r^2-c^2}\big]$. La proposition en découle puisque les vents favorables (respectivement gênants) sont ceux situés au-dessus (respectivement au-dessous) de cette courbe. ∎

EXERCICE. — Soit $\vec{v}$ un vent gênant vérifiant $y > 0$ (on a vu qu'il en existe). Montrer que pour tout $\lambda > 0$ assez petit (respectivement assez grand), le vent $\lambda\vec{v}$ est favorable. (Indication : la quantité $g(\sqrt{x^2+(y-c)^2})$ va croissant lorsque l'on parcourt une Γ_a en partant d'un point de l'axe des x ; il en résulte que ϕ_a est dérivable en 0, avec $\phi_a'(0) = 0$.) Ainsi, pour des vents soufflant d'une direction donnée, l'effet sur le cycliste n'est pas une fonction monotone de la vitesse du vent. Expliquer pourquoi ceci n'est pas contradictoire avec la fin de la remarque b) deux pages plus haut.

On remarquera que la non-linéarité ne se manifeste qu'à l'extérieur du cercle : si le seuil de non-linéarité r est assez grand pour que les vitesses des vents rencontrés en pratique soient toutes dans le cercle, le phénomène n'a pas lieu.

On voit aussi sur ces courbes que le phénomène est d'autant plus marqué que la composante latérale du vent est plus importante ; en fin de compte, si l'on a le vent dans le nez aussi bien en allant vers les Vosges que vers la Forêt-Noire, c'est parce que, dans le couloir rhénan, il souffle souvent du nord ou du sud.