

SONS , MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES ¹

Jean LEFORT
Lycée Blaise Pascal de Colmar

§ 1 - Le bruit

1) Nature du bruit :

Le bruit est provoqué par une succession rapide de surpression et de dépression de l'air ambiant. Le simple fait de monter ou de descendre rapidement d'altitude provoque cette variation de pression, d'où l'impression d'oreille bouchée qui se produit à cette occasion. Le bruit va donc être caractérisé par son intensité et sa fréquence. L'intensité correspond en gros à la différence de pression par rapport à la moyenne. La fréquence ou plutôt l'inverse de la fréquence caractérise la durée entre une surpression et une dépression. Pour réellement entendre un bruit, il faut que l'intensité soit suffisante et la fréquence assez forte. Un bruit devient un son si la variation de surpression et de dépression est périodique (ce qui ne veut pas dire sinusoïdale). La période en question est appelé la fondamentale du son. Un bruit quelconque présentera donc un spectre de fréquence, c'est-à-dire qu'il est la superposition de différents sons périodiques dont l'intensité pour chaque fréquence n'est pas toujours la même. Un bruit blanc est un bruit dont le spectre des fréquences est une fonction continue non nulle. Un son musical sera un son dont le spectre de fréquence sera nul sauf en un certain nombre de points correspondant à des fréquences qui sont toutes multiples d'une même fréquence : la fréquence fondamentale. Tout ceci est une première approche assez théorique. Dans la pratique il y a toujours un petit étalement même pour une fréquence pure et le son d'instruments à percussion comme les cloches ne devrait pas être qualifié de musical au sens précédent et pourtant !

2) Mesure de l'intensité :

Comme une onde qui se propage à la surface de l'eau en cercles concentriques de plus en plus grands, l'onde sonore se propage dans l'espace en sphères concentriques et la puissance sonore se répartit sur toute la surface de la sphère. Or la surface de la sphère vaut $4 \pi R^2$ où R est le rayon (environ $12,6 R^2$). Par suite, quand la distance double, le niveau de bruit est divisé par $2^2 = 4$. Ceci en l'absence de tout obstacle, le principal étant le sol.

L'unité de mesure est le Watt par mètre carré (W m^{-2}). Cela veut dire qu'on mesure une puissance par mètre carré ; c'est ce qu'on appelle l'intensité sonore.

Chacun réagit différemment, mais pour une personne possédant une ouïe normale moyenne, on trouve que le son le plus faible perceptible est d'environ $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ et que le son le plus fort supportable vaut à peu près 1 W m^{-2} .

question : À partir de quelle distance théorique un son initial de 1 W m^{-2} devient-il inaudible ? (on trouve une distance supérieure à 500 km).

Au delà de 1 W m^{-2} la sensation auditive devient douloureuse et peut même se traduire par des lésions de l'oreille.

¹ Extrait de la conférence donnée le mercredi 17 mai 1995 à 17 heures
dans les locaux des ARTISANS DU SON , 44 rue de l'Arsenal à MULHOUSE

3) Adaptation de la mesure à la physiologie de l'oreille :

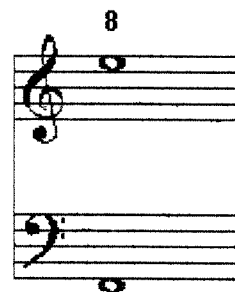
a) L'oreille n'est pas sensible aux différences d'intensité sonore, mais aux rapports. Ainsi on aura l'impression d'un même écart entre un son de 10^{-5} W m^{-2} et un son de 10^{-4} W m^{-2} qu'entre ce dernier et un son de 10^{-3} W m^{-2} . Le rapport, dans les deux cas, est de 10 alors que la différence n'est pas du tout du même ordre.

On notera donc le niveau de bruit selon une échelle dite logarithmique, c'est-à-dire en utilisant non pas le nombre de Watt par mètre carré mais l'exposant de 10 qui apparaît. Pour des raisons pratiques (envie d'attribuer le niveau 0 à un son inaudible) on ajoute 12 à cet exposant. On obtient alors le niveau sonore en Bel (B). Pour avoir le niveau sonore en décibel (dB), on multiplie naturellement le résultat par 10, d'où une échelle s'étageant essentiellement de 0 à 120.

question : Si la distance double, de combien de décibel l'intensité sonore baisse-t-elle ? (On trouve 6 dB car $4 \approx 10^{0,6}$ ou encore $1000 \approx 2^{10}$).

b) La situation est cependant un peu plus compliquée que cela puisque l'oreille ne réagit pas de la même façon aux sons graves et aux sons aigus, c'est-à-dire selon la fréquence du son ou du bruit.

Le maximum de sensibilité se situe dans les aigus au delà du DO 4, soit plus de 1000 Hz et jusque vers 5000 Hz. (Les meilleurs musiciens reconnaissent les sons entre 20 et 20 000 Hz).



Dans les graves, la sensibilité baisse rapidement et est de l'ordre de 40dB pour le LA 1 situé à 110 Hz.

Pour tenir compte de cette différence de sensibilité de l'oreille, les appareils de mesure doivent affecter d'un faible coefficient les sons graves et d'un coefficient important les sons aigus. En faisant alors la moyenne on obtient un niveau sonore exprimé en dB-A (ou encore en phone)

Voici quelques niveaux de bruit en dB-A :

Bruissement des feuilles par une brise légère	10
Studio d'enregistrement vide	20 - 25
Studio de télévision vide	25 - 35
Église vide	30
Maison à la campagne	40
Maison à la ville (en agglomération)	45
Appartement en ville (fenêtre fermée)	45 - 55
Bureaux	50 - 60
Grands magasins	55 - 65
Gare ou aéroport	65
Conversation à un mètre	68
Rue passante	70
Usine ou atelier	75
Piano à 3 mètres en plein air	94

c) Quand on fait des mesures, il faut distinguer les moments de la journée et non pas faire des moyennes sur 24 heures qui n'ont pas beaucoup de sens. Le bruit de fond d'une ville la nuit est d'environ 40 dB-A ce qui est relativement bruyant alors que ce même niveau sonore est celui d'une salle de concert très attentive juste avant que ne démarre l'orchestre. Ceci montre bien que la gêne engendrée par le bruit possède une forte composante psychologique. Dans le même ordre d'idée, quand l'orchestre joue fort, le niveau peut atteindre 100 dB-A dans la salle (beaucoup plus pour les musiciens ce qui peut provoquer des surdités considérées comme des

accidents du travail). Mais ce même niveau de 100 dB-A paraît inacceptable dans d'autres conditions, par exemple lors de l'utilisation de marteaux pneumatiques ou de machines à riveter.

§ 2 - Le son sinusoïdal

1) Cas d'une onde sinusoïdale pure :

Le son sinusoïdal est le degré zéro de la musique. Il est très difficile de l'entendre et a une sonorité assez métallique. C'est à peu près le son du diapason et on sait que ce dernier est très peu intense. Dans la pratique, quand on veut écouter un diapason, on le fait résonner sur une table qui fait office de caisse de résonance ! mais du coup le son n'est plus sinusoïdal.

Un tel son peut être décrit par la formule $y = i_0 \sin(\omega t) = i_0 \sin(2\pi t/T)$. T est la période, ω est la pulsation, $1/T = \omega / 2\pi$ est la fréquence (mesurée en Hertz = s^{-1}), i_0 est l'intensité maximale. Pour le LA 3 la fréquence vaut 440 Hz, donc la période est d'environ 0,0023 s.

Au dessous d'une vingtaine d'Hertz, on entend les variations d'intensité instantanée due à la présence du sinus ; le son ne paraît plus musical. Au dessus de 80 000hz l'oreille n'entend plus le son, les battements étant tellement rapide, l'oreille ne peut s'y adapter.

2) Addition de deux ondes sinusoïdales :

C'est là qu'on fait usage d'une célèbre formule de trigonométrie : $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin[(p+q)/2] \cos[(p-q)/2]$ ce qui prouve que si on additionne deux ondes sinusoïdales très voisines alors on obtient une onde sinusoïdale variant très lentement. L'expérience est saisissante avec deux diapasons l'un à 440 Hz, l'autre à 442 Hz. On obtient ce qu'on appelle des battements. (Ici ils ont une fréquence d'un Hertz). C'est ce phénomène qu'on utilise pour accorder un piano ou un autre instrument de musique. Dans la pratique de l'accordeur, le mécanisme est plus complexe puisqu'il travaille à l'octave ou à la quinte.

$$\sin(x) + \sin(0,9x)$$

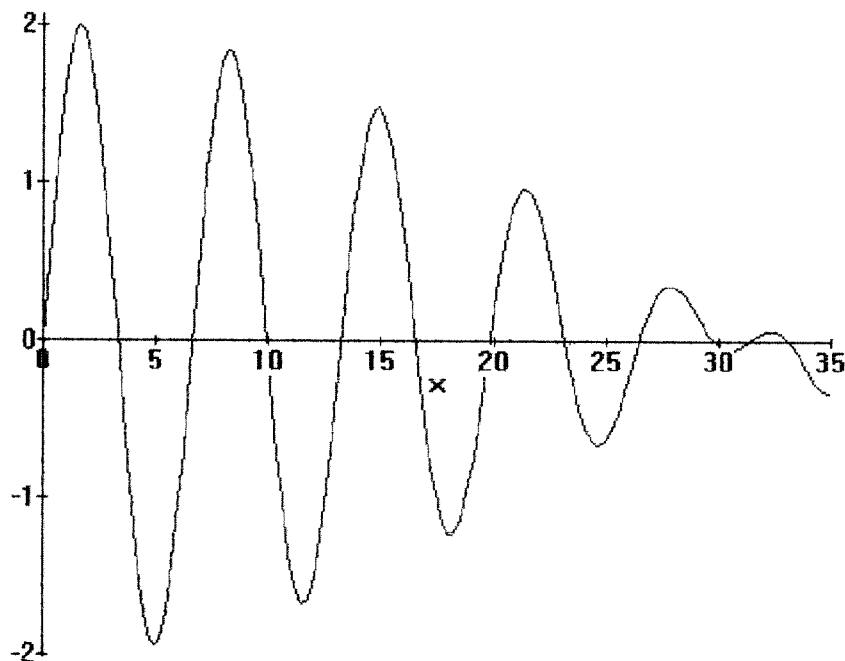


figure 1

$$\sin(x) + 1,2\sin(0,9x + 0,5) = [2,44 + 2,4\cos(0,1x - 0,5)]^{1/2} \sin(0,9x + \phi)$$

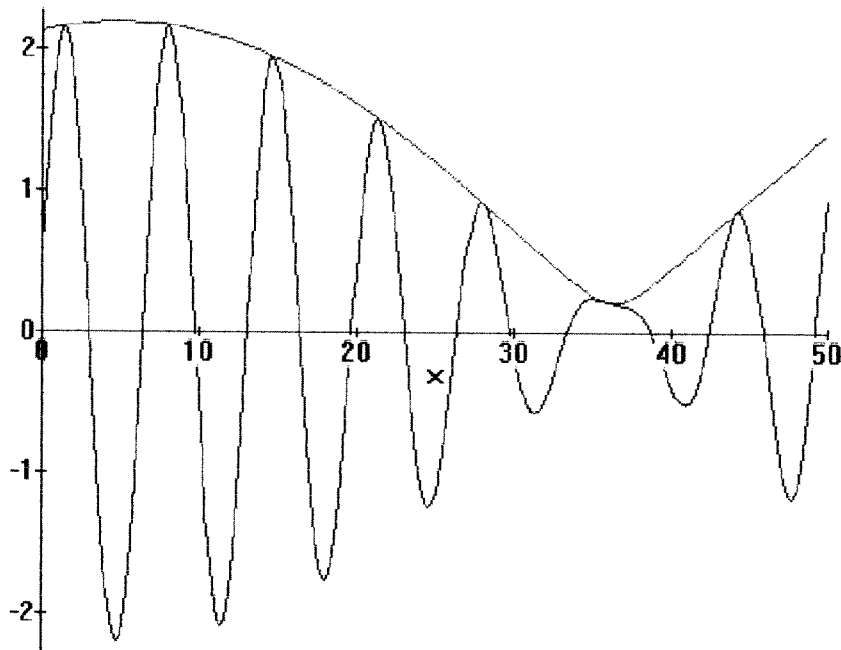


figure 2

En fait il faut étudier, non pas le cas simple donné ci-dessus, mais le cas $a \sin(\omega_1 t + \alpha) + b \sin(\omega_2 t + \beta)$, avec a et b très voisins. On retrouve alors le même phénomène mais il est beaucoup plus difficile à calculer. Nous en donnons un exemple en dessous qui montre bien ce qui se passe ; les battements ont encore lieu mais sans passage par zéro. La courbe des battements a pour équation : $y = \pm \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)}$. La période est deux fois plus petite que quand il y a des battements puisqu'il n'y a pas passage par zéro. L'angle φ qui dépend de x est défini par :

$$\begin{cases} \cos(0,1x) + 1,2 \cos(0,5) = \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)} \cos \varphi \\ \sin(0,1x) + 1,2 \sin(0,5) = \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)} \sin \varphi \end{cases}$$

On peut se demander si l'oreille entend des battements deux fois plus rapides dans un cas que dans l'autre. La réponse est non car nous sommes en dessous du seuil de sensibilité en fréquence de l'oreille qui se contente d'entendre un affaiblissement et une augmentation de l'intensité du son. Nous touchons ici un des premiers paradoxes que nous joue notre appareil auditif (oreille plus cerveau). Si nous envoyons un train d'impulsions positives de fréquence f ou un train d'impulsions alternativement positives et négatives de fréquence $f/2$, si f vaut environ 100 Hz, les deux trains d'impulsion donneront la même note, alors que si f vaut environ 200 Hz nous aurons l'impression d'un écart d'une octave (voir la figure 3). Entre les deux, nous aurons une impression ambiguë. Nous reviendrons sur ce paradoxe dans un autre paragraphe.

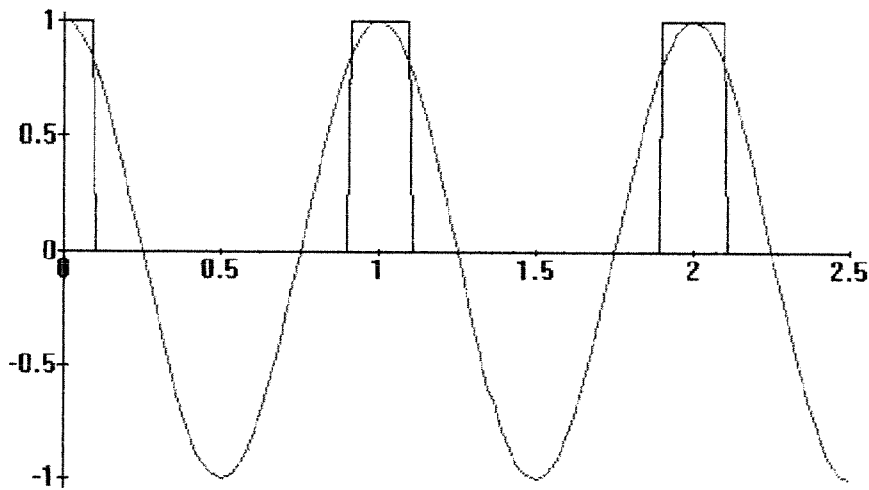


figure 3a

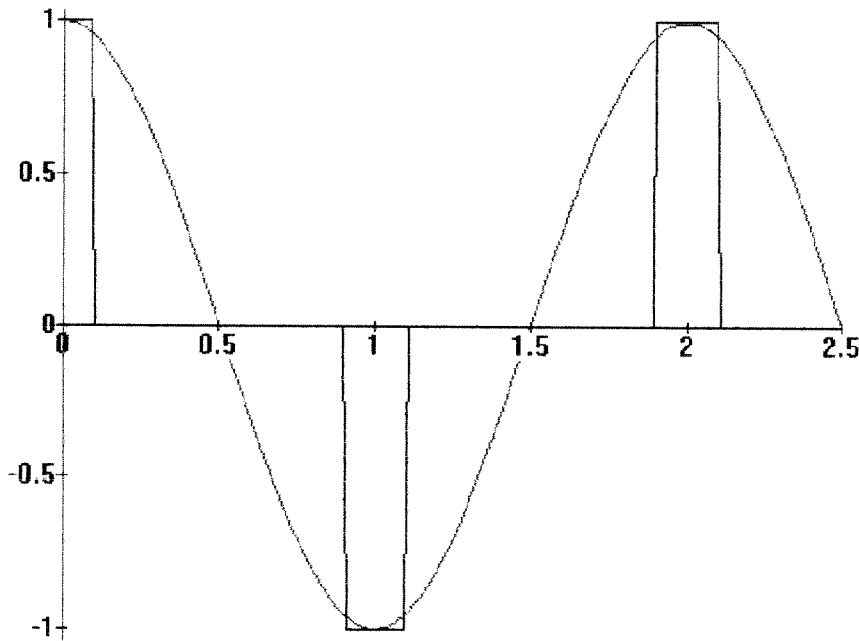


figure 3b

§ 3 - Recherche des harmoniques du son d'un instrument

Depuis Fourier essentiellement, on sait qu'il est possible de décomposer un son périodique de période T en une somme infinie de son sinusoïdaux de période multiple entier de T . Chacun de ces sons sinusoïdaux s'appelle un harmonique, le premier étant baptisé "fondamental". Il est possible de trouver les harmoniques d'un son périodique à l'aide de matériel approprié connaissant la forme de l'onde sonore. On s'aperçoit alors que les divers instruments de musique ne donnent pas la même importance aux différents harmoniques et c'est ce qui caractérise le timbre d'un instrument de musique. Plus il y a d'harmoniques et plus l'instrument paraît musical. La multiplication des harmoniques éloigne la courbe de l'allure sinusoïdale. De ce point de vue,

le diapason et le métalophone sont peu musicaux, la flûte à bec l'est un peu plus. On peut estimer, au vu des diagrammes de la figure 4 que la guitare est plus musicale que l'harmonica.

De plus, s'il est bien évident que les harmoniques ne se répartissent pas de la même façon selon la note jouée, ils ne se répartissent pas non plus de la même façon selon la force de la note (pianissimo à fortissimo). En général les harmoniques d'ordre élevé n'apparaissent qu'au dessus d'une certaine puissance. Mais aussi au bout d'un certain temps. Ainsi la figure 5a montre comment se répartissent l'intensité des différents harmoniques au cours du temps pour un Ré 4 joué par une trompette pendant 0,2 seconde (environ une double croche). Par conséquent au bout de 5/100 de seconde, l'onde sonore n'aura pas du tout la même allure qu'au bout de 1/10 de seconde. (figures 5). Ce sont les problèmes de régime transitoire. Ce problème apparaît lors des attaques ou lors d'une succession très rapide de notes. Il est alors impossible d'attribuer une périodicité aux sons qui restent cependant musicaux dans leur ensemble. Ainsi à un tempo de 120 à la noire (2 noire par seconde) correspond une durée de 1/16 s pour une triple croche ; mais le DO médium est aux environs de 250 Hz soit 16 vibrations pour une triple croche et 4 pour le DO situé 2 octaves au dessous. Les phénomènes transitoires de prise de souffle pour un instrument à vent ou de positionnement des doigts pour un instrument à cordes sont alors prépondérants. Ces phénomènes transitoires apparaissent par contraste quand on fait défiler à l'envers une bande magnétique.

Il faut noter que l'oreille est tout à fait capable de distinguer les différents harmoniques. Mais curieusement, si le son fondamental manque, l'oreille l'entend quand même ! C'est d'une certaine façon le plus grand commun diviseur de tous les harmoniques ! C'est celui qui donne la fréquence fondamentale. À noter aussi que certains instruments ne donnent que des harmoniques d'ordre impair.

Ce rôle très important des harmoniques va imposer une échelle musicale basée sur la fréquence, c'est-à-dire la hauteur des notes. Il n'y aura pas de différence entre la note fondamentale et la note de fréquence double (premier harmonique) et c'est pour cela que ces deux notes recevront le même nom. C'est l'objet du paragraphe suivant.

figure 4

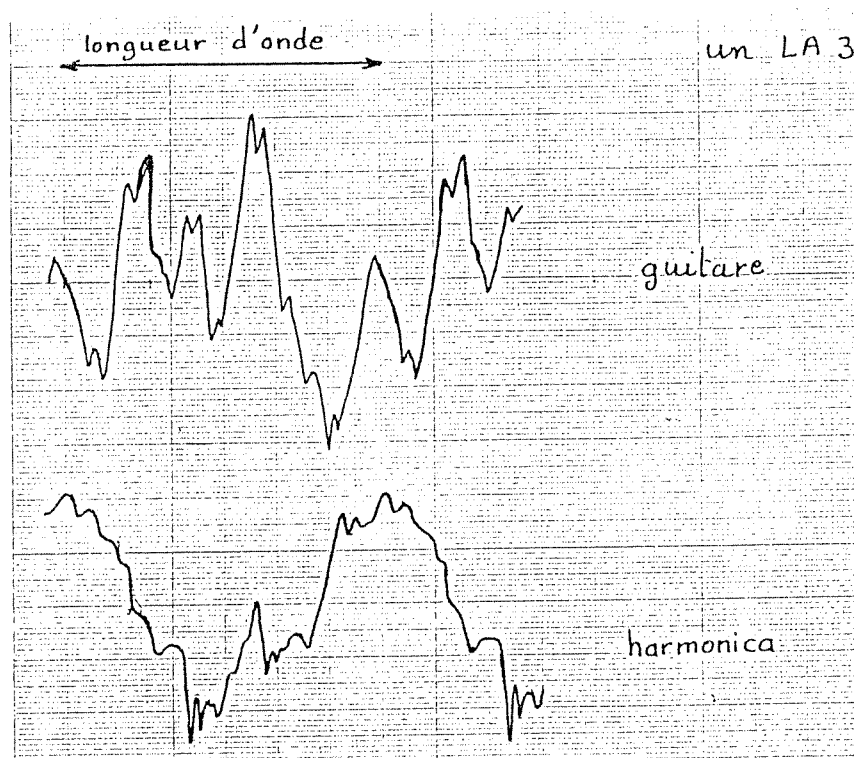


figure 5a

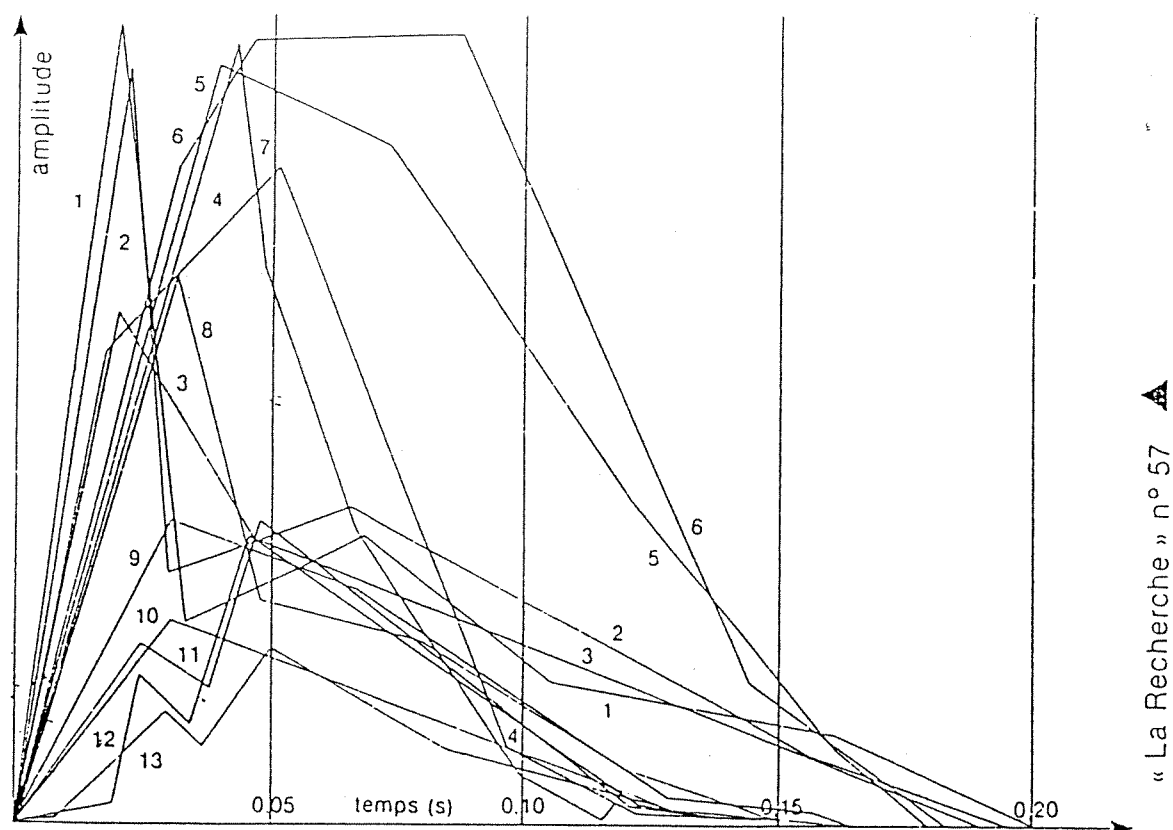
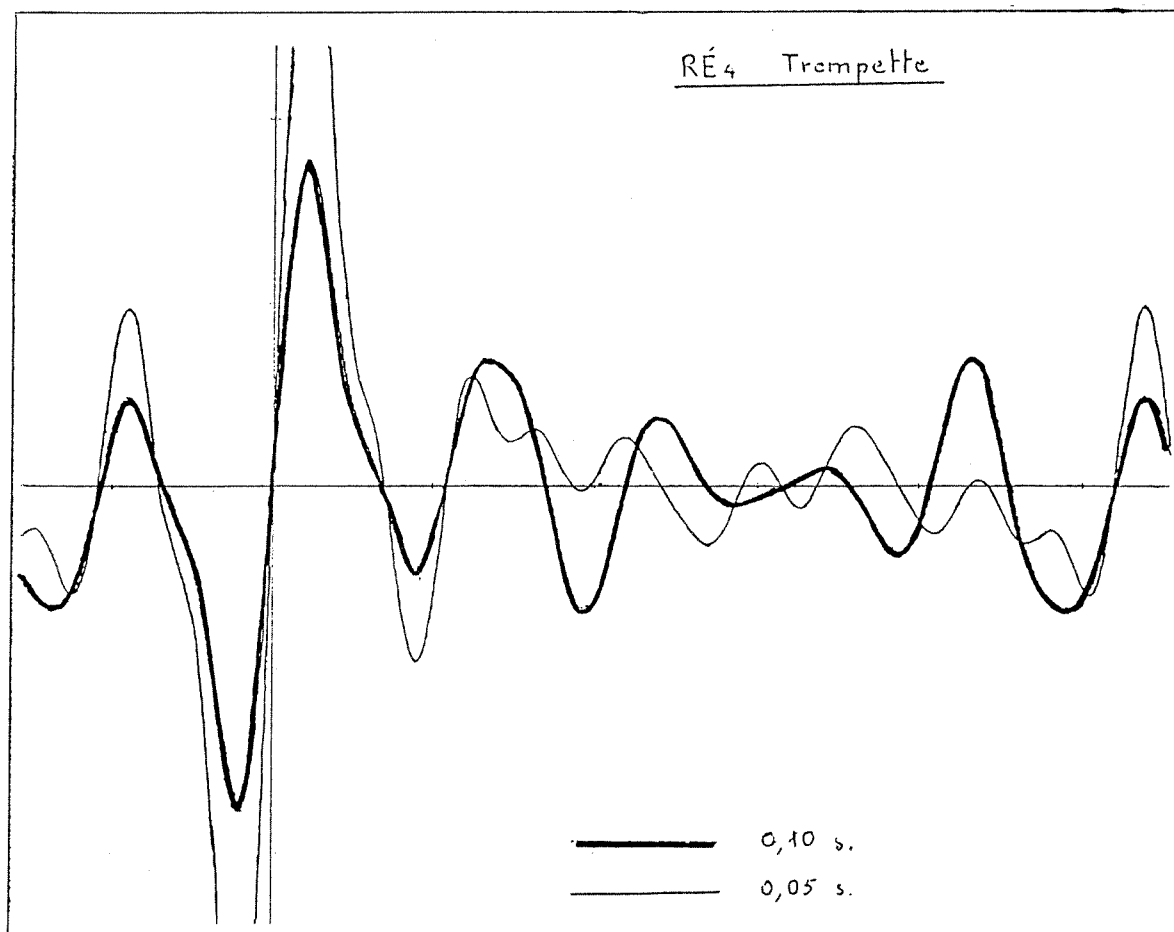


figure 5b



§ 4 - Les gammes

Considérons un son musical, c'est-à-dire périodique, de fréquence fondamentale f et possédant les harmoniques $2f, 3f, 4f, 5f \dots$. Un musicien exercé entend les harmoniques jusqu'à 7 ou 8 mais la nature même du son fait que les harmoniques les plus élevés sont aussi les plus faibles. Les harmoniques 2, 3, 4 et 5 vont donc être primordiaux. Le deuxième harmonique est tellement important pour l'oreille qu'il reçoit, comme nous l'avons déjà dit, le même nom que le fondamental. Mais comme pour les intensités, l'oreille (ou plus exactement l'appareil auditif qui va de l'oreille externe au cerveau) n'est sensible qu'au rapport des fréquences. Par suite, le quatrième harmonique recevra aussi le même nom puisque $2/1 = 4/2$, de même le huitième. Restent à "distance" raisonnable les harmoniques 3, 5 et 7 (6 n'entre pas en ligne puisque $6/4 = 3/2$, donc 3 et 6 recevront le même nom). On voit donc que pour l'oreille, il suffit de donner un nom aux fréquences comprises entre f et $2f$. Si une fréquence est en dehors de cet intervalle, on s'y ramène en la multipliant ou la divisant par 2 autant de fois que nécessaire.

Dans la musique occidentale si f correspond à l'UT alors $2f$ correspond à l'UT à l'octave. On dit que le rapport $2/1$ est une octave. Avec la même correspondance, $3f$ correspond au SOL à l'octave. On dit que le rapport $3/2$ est une quinte. La quinte donne naissance à la première note nouvelle parmi les harmoniques, d'où son importance. Il est donc assez naturel de jouer un son musical de fréquence fondamentale $f' = 3/2 f$ c'est-à-dire donnant un SOL et de chercher à savoir ce que donnera la quinte. On obtient $f'' = 9/4 f$ qu'on ramène dans l'intervalle $[f, 2f]$ soit $9/8 f$. Cela correspond au RÉ. On peut imaginer poursuivre indéfiniment cette procédure et l'on obtiendrait ainsi une infinité de notes car les puissances successives de 3 ne seront jamais égales à une puissance de 2. Heureusement l'oreille n'a pas une sensibilité infinie et on peut espérer obtenir une bonne approximation au bout d'un nombre limité d'étapes.

La théorie des fractions continues permet de trouver les meilleures approximations. Ici encore nous avons recours aux logarithmes puisqu'il s'agit de rapports. On cherche p et q tels que 3^p et 2^q soient voisins : $3^p \approx 2^q$ soit $p \ln(3) \approx q \ln(2)$ ou encore $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx \frac{q}{p}$. Or le premier

membre n'est autre que $\log_2(3)$ et vaut environ 1,58496. Les premières réduites de son développement en fractions continues donnent $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}$. Laissons tomber les

trois premières dont les approximations sont trop grossières. Nous avons donc une première possibilité avec $8/5$ ce qui correspond à 5 notes dans la gamme : UT, SOL, RÉ, LA, MI (en montant les quintes). C'est ce qu'on appelle la gamme pentatonique qui est utilisée, entre autre, dans la musique traditionnelle extrême orientale. La seconde possibilité donnée par la théorie correspond à $19/12$ soit 12 notes dans la gamme : UT, SOL, RÉ, LA, MI, SI, FA#, UT#, SOL#, RÉ#, LA#, FA. Les autres possibilités ont été étudiées théoriquement. La dernière avec 53 notes dans la gamme permet de noter la différence entre dièses et bémols ce qu'on appelle un coma Où est donc passée notre gamme habituelle avec ses 7 notes ? Il se trouve que le développement en fractions continues est un peu trop puissant et donne des encadrements très fins des nombres réels, mais la théorie permet de récupérer d'autres approximations en utilisant

la notion de barycentre. Ainsi $\frac{11}{7} = \frac{3+8}{2+5}$ ce qui prouve que l'on obtient l'isobarycentre des points de coordonnées (3 ; 2) et (8 ; 5). C'est une très bonne approximation. Elle donne les notes FA, UT, SOL, RÉ, LA, MI, SI. (on remarque qu'on part du FA).

Ce que nous venons d'étudier est ce qu'on appelle la gamme pythagoricienne. Si on attribue une fréquence unité à l'UT on passe à la quinte en multipliant par $3/2$ ou $3/4$ si on veut se ramener dans l'intervalle d'une octave. D'où les fréquences suivantes :

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
fréquence exacte	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$
valeur approchée	1	1.125	1.26563	1.33333	1.5	1.6875	1.89844

On peut construire un tableau analogue avec une gamme de douze notes. Nous ne le ferons pas ici. Si on regarde l'intervalle entre deux notes consécutives de la gamme, c'est-à-dire si on fait le rapport des fréquences de deux notes consécutives on trouve deux cas : $9/8$ et $256/243$. Ceci met en évidence le ton et le demi-ton. Mais aussi le fait que les dièses et les bémols ne seront pas à la même place puisque $(256/243)^2 < 9/8$ soit en valeur approchée $(1,10986 < 1,125)$.

Revenons aux harmoniques. Après la troisième harmonique, celle qui correspond à une nouvelle note est la cinquième. On se trouve alors en présence de deux rapports: $3/2$ déjà vu et $5/4$ (pour se ramener dans l'octave). C'est ce qu'on appelle l'accord parfait et on donne à ces notes les noms de SOL et MI (ce n'est pas le même que précédemment !). Le SOL jouant le rôle important vu précédemment, il est naturel de recommencer l'accord parfait sur le SOL comme note de base. Nous obtenons RÉ et SI. Au contraire, si nous partons en sens inverse à partir de l'UT nous obtiendrons le FA et le LA (c'est-à-dire que FA-LA-UT sonnera comme UT-MI-SOL). Construisons un tableau analogue au précédent utilisant non plus le cycle des quintes mais le cycle des accords parfaits qui font intervenir les rapports $3/2$ et $5/4$:

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
fréquence exacte	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
valeur approchée	1	1.125	1.25	1.33333	1.5	1.66666	1.875

Nous obtenons ainsi la gamme diatonique. Si nous examinons le rapport des fréquences de deux notes consécutives de cette gamme, nous trouvons $9/8$, $10/9$, $16/15$. Cette gamme paraît bien plus compliquée.

Ces deux exemples montrent qu'il ne saurait y avoir une seule gamme. Des traditions culturelles font que telle gamme semble plus juste que telle autre. Dans la musique occidentale nous avons pris l'habitude d'une gamme dite tempérée (essentiellement depuis "le clavier bien tempéré" de J.S. Bach). Il s'agit d'une gamme de douze notes chacune étant séparée de la précédente par un intervalle de même amplitude qui sera donc la racine douzième de 2. Nous obtenons alors la gamme tempérée définie par le tableau suivant :

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
valeur approchée	1	1.12246	1.25993	1.33484	1.49831	1.68179	1.88775

L'avantage de la gamme tempérée c'est de permettre de confondre les dièses et les bémols et donc de faciliter la transposition. (Nous verrons cela dans un prochain paragraphe).

Remarque : au lieu de travailler avec les rapports de fréquence, nous aurions pu travailler avec les logarithmes ce qui permet d'additionner des intervalles mais de façon beaucoup plus agréable (et plus mathématique) que ce que font habituellement les musiciens qui annoncent qu'une quinte plus une quarte (ce qui renvoie à $5 + 4$) donne une octave (qui renvoie à 8) ! On peut soit utiliser le logarithme décimal de 2 qui vaut environ 0,301 et diviser la gamme en 300 intervalles égaux, et on définit ainsi le Savart, soit diviser la gamme en 1200 intervalles égaux c'est-à-dire chaque ton en 100 et on obtient ainsi le "cent".

§ 5 - Les instruments à percussion

1) La notion de partiel :

La musique ne se contente pas d'utiliser des instruments à cordes ou à vent qui donnent des sons périodiques. De nombreux instruments à percussion sont présents dans les orchestres : tambours, cymbales, cloches, gongs, triangles,... La plupart de ces instruments ne donnent pas des sons périodiques. Cependant, sauf peut-être pour les tambours, il est possible d'attribuer une hauteur aux sons émis par ces instruments. En fait l'analyse de Fourier permet de décomposer le son d'un de ces instruments en une superposition de sons périodiques sinusoïdaux mais qui ne sont pas les multiples d'une même fréquence. Cela conduit à la notion de "partiels" jouant le rôle des harmoniques mais ne produisant pas les effets habituels de consonance et de dissonance. Voici par exemple les partiels d'une cloche-tube :

	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	7 ^e
fréquence	f	$2,76 f$	$5,40 f$	$8,93 f$	$13,34 f$	$18,64 f$	$31,87 f$
approximation		$(4,5 f)$		$2 \times 4,47$	$3 \times 4,45$	$4 \times 4,66$	$7 \times 4,55$

Nous voyons que les partiels 4 à 7 sont sensiblement les multiples d'une même fréquence sensiblement égale à $4,5 f$, fréquence qui apparaîtra comme la hauteur de la cloche. Les partiels 1, 2 et 3 seront ignorés par l'oreille, tout au moins en ce qui concerne la hauteur perçue, mais non en ce qui concerne le timbre.

La théorie des cloches-tubes est assez facile à faire et fait appel à la mécanique des vibrations (une fusée comme la fusée Ariane vibre de façon fort analogue à celui d'un tube). Supposons maintenant qu'on ovalise légèrement les tubes cylindriques d'une cloche-tube. Il va apparaître deux ensembles de partiels aux fréquences très voisines ce qui entraînera des battements. En général cela est souvent déplaisant dans des cloches, mais c'est ce qui caractérise les gongs.

Les cloches habituelles utilisées dans les églises ou les carillons sont, depuis le XVII^e siècle et les fondeurs hollandais, travaillées pour avoir des partiels bien particuliers qui correspondent à des intervalles harmoniques comme le montre le tableau ci-dessous :

	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	7 ^e
fréquence	$0,5 f$	f	$1,2 f$	$1,5 f$	$2 f$	$2,5 f$	$3 f$
nom	Fondamental	Principal	Troisième	Cinquième	Octave	Tierce supérieure	Quinte supérieure
position par rapport à f	octave inférieure		tierce mineure	quinte	octave	octave plus tierce majeure	octave plus quinte

La hauteur d'une telle cloche est celle du partiel principal (c'est-à-dire le deuxième).

Il est certain que dans tous ces instruments à percussion, l'intensité de chaque partiel joue un rôle important dans la détermination de la hauteur.

Il est remarquable que l'on puisse fabriquer des tambours dont la peau n'a pas une épaisseur uniforme et qui vibrent avec des partiels qui sont presque des harmoniques.

2) Cloches et permutations :

Un carillon est formé d'un ensemble de cloches de hauteurs différentes que l'on sonne toutes à tour de rôle mais à chaque fois dans un ordre différent. Par exemple avec 8 cloches, on sonnera d'abord l'ordre [1,2,3,4,5,6,7,8] puis [2,1,3,5,4,6,8,7] puis [1,2,5,3,6,4,7,8], etc. Avec n cloches, il est possible d'obtenir $n!$ permutations. Quand n est grand, il est impensable de sonner toutes les permutations. De plus un bon carillon respecte un certain nombre de règles :

a) Obtenir la plus grande diversité possible (donc ne jamais répéter deux fois le même ordre) ;

b) Le passage d'une permutation à une autre doit se faire en ne déplaçant aucune cloche de plus d'une place ;

c) Une cloche ne restera pas à la même position plus de deux séries de coups consécutives ;

d) Chaque cloche effectue le même travail, c'est-à-dire qu'elle passe par les mêmes positions selon la même progression (cette règle est moins impérative que les trois autres).

Si on applique ces règles à un carillon de trois cloches on n'obtient que deux rythmes différents. Il n'existe donc pas de carillon à trois cloches. Les carillons vont de 4 à 12 cloches et prennent les noms suivants :

4 : Minimus 5 : Doubles 6 : Mineur 7 : Triples 8 : Majeur 9 : Caters
10 : Royal 11 : Cinques 12 : Maximus.

Le tableau suivant étudie un exemple avec 4 cloches :

ligne	transformation depuis la ligne précédente	positions				remarques
1		1	2	3	4	Sous-groupe à 8 éléments du groupe des permutations S_4
2	α	2	1	4	3	
3	β	2	4	1	3	
4	α	4	2	3	1	
5	β	4	3	2	1	
6	α	3	4	1	2	
7	β	3	1	4	2	
8	α	1	3	2	4	
9	γ	1	3	4	2	Ce sous-groupe H est engendré par les permutations α et β
10	α	3	1	2	4	
11	β	3	2	1	4	
12	α	2	3	4	1	
13	β	2	4	3	1	
14	α	4	2	1	3	
15	β	4	1	2	3	
16	α	1	4	3	2	
17	γ	1	4	2	3	On obtient ici $H \delta$ δ est la permutation circulaire sur les trois derniers éléments
18	α	4	1	3	2	
19	β	4	3	1	2	
20	α	3	4	2	1	
21	β	3	2	4	1	
22	α	2	3	1	4	
23	β	2	1	3	4	
24	α	1	2	4	3	
1	γ	1	2	3	4	On obtient ici $H \delta^2$

α est la permutation qui échange les deux premières cloches et qui échange les deux dernières ; β est celle qui échange les cloches en positions centrales et qui conserve la première et la dernière ; γ conserve les deux premières cloches et échange les deux dernières ; quant à δ elle permute circulairement les trois dernières.

Ce tableau respecte les trois premières règles d'un carillon puisque toutes les permutations de S_4 apparaissent, que chaque cloche ne se déplace que d'une position à chaque ligne, qu'une même cloche ne reste pas plus de deux fois de suite à la même place. Par contre la dernière règle n'est qu'en partie respectée puisque seules les cloches 2, 3 et 4 font le même travail, décalé dans le temps (il est indiqué pour la cloche 4), la cloche 1 ayant un déplacement simple (ce qu'on

appelle un chassé simple), elle passe régulièrement de la première à la dernière position pour revenir tout aussi régulièrement à la première (on remarque toutefois que chaque cloche passe 6 fois par chacune des positions). Avec 4 cloches il existe 11 rythmes possibles et aucun ne respecte la dernière condition. Quand il y a beaucoup de cloches, il est impossible de respecter la première condition et on se contente de jouer un sous-groupe du groupe S_n . Le décompte des divers rythmes possibles est un exercice délicat qu'il n'est pas question de détailler dans ce court paragraphe qui n'a pour but que de donner une ouverture sur une discipline méconnue.

§ 6 - Comprendre la construction des instruments de musique

La plupart des instruments de musique sont très difficiles à analyser du point de vue théorique. Pourquoi produit-il telle note plutôt que telle autre ? Le tube d'une flûte, qui n'est pas cylindrique, pose de redoutables problèmes. Les instruments à cordes, les orgues, les flûtes de pan sont beaucoup plus simples. L'air dans un tuyau fermé vibre de façon analogue à celle d'une corde attachée à ses deux bouts, c'est-à-dire qu'il y a un nœud de vibration à chaque extrémité tandis que dans un tuyau ouvert il y a un ventre de vibration du côté de l'ouverture (de même que pour une corde dont une extrémité seule est libre). Ceci explique pourquoi il n'y a que des harmoniques impaires ainsi que le montrent les graphiques ci-dessous.

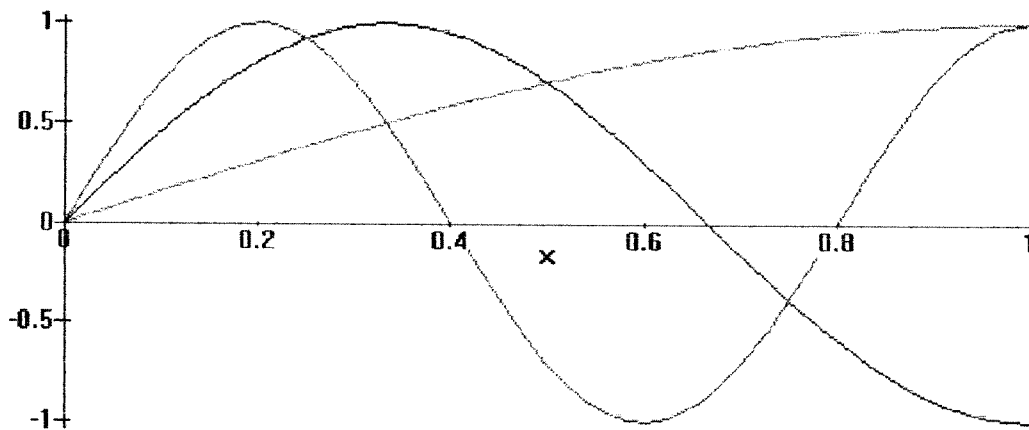


figure 6

Les trois graphiques correspondent aux fonctions : $\sin \frac{\pi x}{2}$, $\sin \frac{3\pi x}{2}$, $\sin \frac{5\pi x}{2}$.

1) La guitare

Sur une guitare, comme sur d'autres instruments à cordes, la note jouée est fonction de la longueur de la corde. Elle est aussi fonction de son matériau, de sa tension, de son épaisseur. C'est pour cela que les différentes cordes ont toute la même longueur mais ne correspondent pas à vide à la même note. L'avantage de la guitare par rapport à d'autres instruments comme le violon, c'est que la position des doigts pour jouer telle ou telle note est indiquée par des "silllets" qui bloquent la corde à la longueur exacte voulue. Schématiquement, une corde fait 64 cm. Supposons qu'elle joue un UT. Alors, si on place le doigt à 32 cm. on obtiendra l'UT à l'octave. Pour obtenir un SOL, il faut prendre les trois quart (gamme de pythagore) soit 48 cm, etc. La mesure de la longueur utile de la corde (du chevalet au silllet qui nous intéresse) est très facile et permet de vérifier la théorie et de retrouver la gamme tempérée et une suite géométrique. Voici ce qui a été obtenu sur une guitare réelle (sur la première ligne les valeurs mesurées, sur la deuxième les valeurs théoriques pour une gamme tempérée) :

mesurée	64	60.4	57	53.8	50.8	48	45.4	42.8	40.5
théorique	64.00	60.41	57.02	53.82	50.80	47.95	45.25	42.71	40.32

38.1	36	34	32	30.2	28.6	27	25.5	24	22.7
38.05	35.92	33.90	32.00	30.20	28.51	26.91	25.40	23.97	22.63

Remarquons que si cette expérience est faite en classe, les élèves ont tendance, a priori pour se faciliter la tâche, à mesurer les intervalles entre deux sillets consécutifs puis à additionner le tout. Ils ne se rendent pas compte de l'accumulation des erreurs d'arrondi et de mesure. C'est une excellente occasion de leur montrer et de leur parler de ce problème. On peut prolonger la manipulation par une étude statistique pour retrouver une valeur approchée de la racine douzième de 2 !

2) L'orgue

Dans une classe de A3 musique, j'avais parlé de ces problèmes de mathématiques et de musique en l'appliquant à la guitare comme ci-dessus. Une élève m'a alors demandé si sur une flûte cela fonctionnait pareil et de sortir une flûte traversière et à mon invite elle a commencé à en jouer. Je suis resté perplexe ! J'ai seulement dit que les flûtes de pan et les tuyaux d'orgue répondaient à ce genre de logique que je venais d'expliquer. Une autre élève s'est alors proposée pour apporter lors de la séance suivante quelques tuyaux d'orgue (j'ignorais qu'elle était en parenté avec un facteur d'orgue). Elle a ainsi apporté 5 tuyaux d'orgue en bois et nous les avons étalonnés puisque la note était marquée sur 3 d'entre eux. Vérification prise auprès du concepteur, notre étalonnage était correct, ce qui n'a pas peu remonté le prestige des mathématiques dans une classe littéraire. Il n'y a malheureusement pas toujours un facteur d'orgue disponible ! Mais on oublie trop souvent que les élèves sont des personnes ressources formidables pour peu que l'on s'intéresse à eux autrement que par leur réussite aux devoirs de maths.

§ 7 - Les paradoxes musicaux

a) Un son dont la hauteur croît indéfiniment :

Au cours des paragraphes précédents nous avons vu que le premier partiel peut être absent sans que cela modifie la perception de hauteur du son. D'une façon plus générale, la hauteur apparente d'un son n'est pas entièrement régie par les partiels qui interviennent. L'intensité de ceux-ci joue un rôle important (nous l'avons vu à propos des cloches). Ceci va permettre de créer l'illusion d'un son éternellement ascendant.

Ce son est composé d'harmoniques particulières qui sont séparées d'un nombre entier d'octaves du fondamental : $2f$, $4f$, ... $2^n f$ (le fondamental n'apparaît pas). f augmente régulièrement, par exemple par demi-tons, mais les intensités de chaque harmonique varient suivant une loi en cloche, formant ce qu'on appelle l'enveloppe des intensités.

Quand f a doublé, on retrouve le son initial mais localement l'oreille suit la montée des partiels et le son donne l'impression de devenir de plus en plus aigu. (Cf figure 7 ci-après où l'abscisse est graduée en octaves).

On peut améliorer cette illusion en déplaçant l'enveloppe des intensités vers le bas au fur et à mesure que f augmente. Le son monte la gamme et il se retrouve pourtant plus bas !

Ce genre d'illusion peut être appliqué à de simples battements qui accélèrent tout en ayant le même rythme.

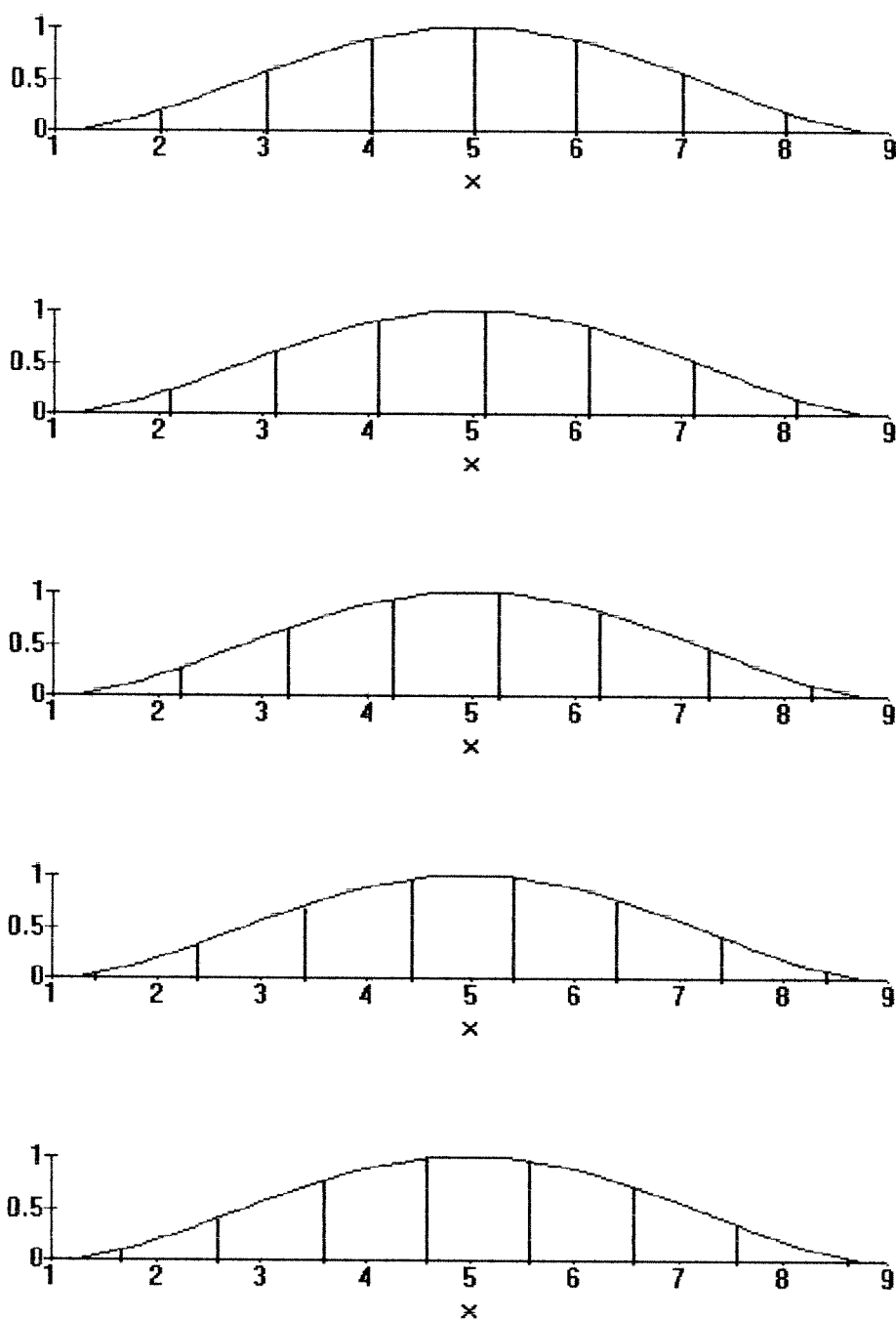


figure 7

b) Inversion de l'effet Doppler :

En utilisant non pas des harmoniques mais des partiels on peut s'arranger pour inverser l'effet Doppler. On sait qu'une source sonore qui approche a un son plus aigu qu'une source sonore qui s'éloigne. On peut remplacer cette différence de vitesse en utilisant un magnétophone qui tourne plus ou moins vite. Considérons un son formé de partiels séparés de 1,1 octave et dont l'enveloppe des intensités forme également une courbe en cloche, comme indiqué sur la première ligne du tableau ci-dessous :

f	$2^{1,1} f$	$2^{2,2} f$	$2^{3,3} f$	$2^{4,4} f$	$2^{5,5} f$	$2^{6,6} f$	
$2 f$	$2^{2,1} f$	$2^{3,2} f$	$2^{4,3} f$	$2^{5,4} f$	$2^{6,5} f$	$2^{7,6} f$	

En doublant la vitesse de rotation du magnétophone, la plupart des partiels sont remplacés par des partiels situés un dixième d'octave en dessous (deuxième ligne du tableau ci-dessus), le dernier (nouveau) est d'intensité faible et l'absence du premier n'a pas d'importance puisque l'oreille le rétablit.

c) La disymétrie des oreilles :

Un autre paradoxe peut être créé en utilisant le fait que le cerveau est disymétrique. Chez la plupart des individus, l'oreille gauche privilégie les graves et l'oreille droite les aigus (cette disymétrie ne recoupe pas exactement droitiers et gauchers).

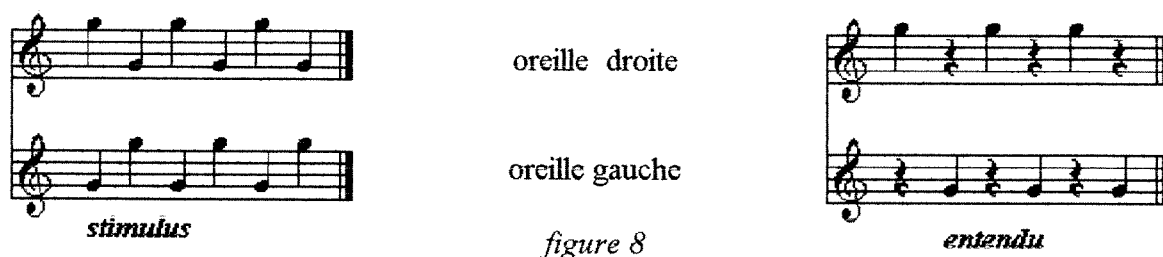


figure 8

Deux notes séparées d'une octave sont jouées alternativement selon le même rythme, mais, grâce à un casque, on présente à l'oreille droite d'abord la plus aiguë, tandis qu'à l'oreille gauche on commence par la plus grave. L'individu a l'impression d'un son alternativement aigu et grave qui saute de la droite à la gauche puis revient à droite...

Un paradoxe un peu voisin dont l'explication est difficile est le paradoxe de Wessel. Ce paradoxe fait intervenir les timbres et en cela il repose sans doute sur la disymétrie des oreilles. On joue le rythme suivant :

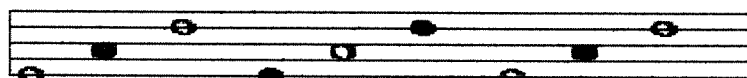


figure 9a

Si les notes marquées ● et ○ sont jouées avec le même timbre, on entend une suite de trois notes ascendantes. Par contre si elles sont jouées avec des timbres très différents, on entend, comme l'indique la partition ci-dessous, deux voix dont chacune est formée d'un motif répété de trois notes descendantes.

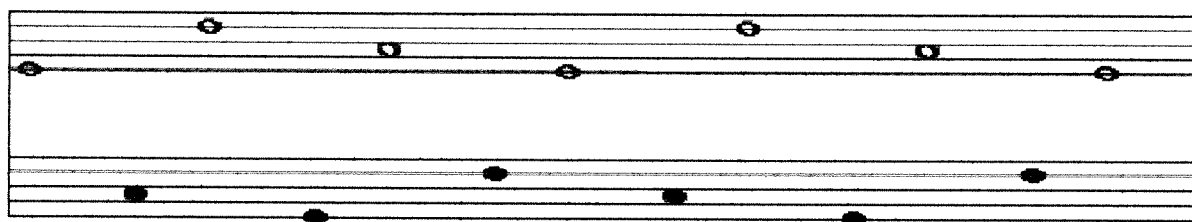


figure 9b

Ce paradoxe traduit aussi le fait que l'oreille a tendance à associer des sons de hauteur voisine et à séparer les sons présentant des écarts importants de hauteur.

§ 8 - Conclusion

Il n'est pas question dans ce texte de traiter tous les points où les mathématiques interviennent. Comme dans chaque activité humaine un tant soit peu complexe, toutes les disciplines se retrouvent. Nous sommes restés bien souvent aux lisières de la physique, nous n'avons pas

parler de la technologie de reproduction du son (disque, magnétophone, CD, ordinateur...), de l'imitation de la voix, de l'architecture antibruit ou au contraire de l'acoustique des salles de spectacles, du principe du codage d'une bande sonore et de bien d'autres points que j'oublie sans doute.

Je souhaite simplement que cet aperçu puisse donner des idées d'activités pluridisciplinaires à tous les niveaux, du collège à l'université. Ayant moi-même expérimenté plusieurs de ces points, je sais que c'est là une source d'enthousiasme pour les élèves et l'occasion de voir que les mathématiques ne sont pas une construction abstraite loin de tout usage mais au contraire une partie des outils que s'est forgé l'esprit humain pour agir sur son environnement.

Bibliographie :

- 1) Le son musical, John R. Pierce, Pour la science (Belin), 1983 (édition française 1984).
Un panorama très complet sur les sons, la musique, l'acoustique, l'architecture musicale, etc. Contient un disque présentant différents effets.
- 2) La fascination des groupes, F. J. Budden, OCDL, 1972 (édition française 1976).
Deux chapitres sur la musique : l'un à propos de l'arithmétique modulo n appliquée à la composition musicale, l'autre sur l'application des permutations à la science des carillons.
- 3) Musique classique et mathématique moderne, B. Parzysz, APMEP, 1972 (?)
Description très rigoureuse de l'aspect mathématique du solfège et de la composition musicale.
- 4) Abrégé d'histoire des mathématiques, Dieudonné (Hermann 1978)
On trouve page 330 et suivantes du tirage de 1992 l'essentiel sur la naissance de l'analyse de Fourier et les problèmes de convergence.