MINI-CONTRIBUTION
À L'ÉTUDE DE LA DÉPENDANCE PROBABILISTE

Edith KOSMANEK

Enseignante titulaire à l'Université de Paris 1 – Fax 64 22 81 31

Dédicace : à M. le Professeur Aimé FUCHS - Université L. Pasteur de Strasbourg

Introduction

D'après ma petite enquête auprès de quelques probabilistes strasbourgeois, ils ignoraient l'inégalité élémentaire mais intéressante, qui figure dans la proposition **(2)**. La probabiliste d'opérette que je suis, a néanmoins réussi à la découvrir et à fournir plusieurs démonstrations!
Merci à '*L'Ouvert*' de diffuser ce résultat auprès de son lectorat.

Proposition 1.— *Soient un espace probabilisable* (Ω, T) *et un couple d'événements* $(A, B) \in TT$ *; alors il existe au moins une mesure de probabilité* $P_{(A,B)}$ *sur* (Ω, T) *telle que le couple* (A, B) *soit indépendant.*

Preuve : Considérons les "atomes" $\mathcal{A}_i$ de la partition générée par (A, B) :

$$\mathcal{A}_1 = A \cap B,\ \mathcal{A}_2 = A \cap \overline{B},\ \mathcal{A}_3 = \overline{A} \cap B,\ \mathcal{A}_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$$

et soit une mesure quelconque $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ telle que

$$\textbf{(1)} \qquad p_i = P(\mathcal{A}_i)\ ;\ O \leq p_i \leq 1\ ;\ \sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$$

Calculons "l'écart à l'indépendance" pour (A, B) :

$$\begin{aligned} e(A,B) &= P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\mathcal{A}_1) - [P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2)][P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_3)] \\ &= p_1 - (p_1 + p_2)(p_1 + p_3) = p_1(1 - p_1 - p_2 - p_3) - p_2 p_3 \\ e(A,B) &= p_1 p_4 - p_2 p_3. \end{aligned}$$

L'indépendance du couple (A, B) est équivalente à : $e(A, B) = 0$ **(2)**. Il existe, en général, une infinité de mesures $P_{(A,B)}$ qui réalisent **(2)** sous les contraintes **(1)** :

- $p_1 + p_2 \neq 0 \Longrightarrow P_{(A,B)} = (p_1, p_2, p_3 = \frac{p_1(1-p_1-p_2)}{p_1+p_2}, p_4 = \frac{p_2(1-p_1-p_2)}{p_1+p_2})$; cas particulier équipondéré : $P_{A,B)} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
- $p_1 = p_2 = 0 \Longrightarrow P_{(A,B)} = (0, 0, p_3, p_4 = 1 - p_3)$.

© L'OUVERT **83** (1996)

La mesure $P_{(A,B)}$ est unique si $P(A) = P(B) = 0$; elle vaut alors $P_{(A,B)} = (0,0,0,1)$

Proposition 2.– *Pour tout espace probabilisé (Ω, T, P), pour tout couple d'événements $(A,B) \in TT$, l'écart à l'indépendance $e(A,B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$ est encadré somme suit :*

$$0 \leq |e(A,B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Preuve (1) : Optimisons la fonction $e(A,B) = f(\dot{P}) = f(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 p_4 - p_2 p_3$ sous les contraintes **(1)**.
Le maximum $f(P_M) = \frac{1}{4}$ est atteint pour $P_M = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$.
Le couple (A, A) avec $P(A) = \frac{1}{2}$ réalise ce maximum.
Le minimum $f(P_m) = -\frac{1}{4}$ est atteint pour $P_m = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Le couple $(A, \overline{A})$ avec $P(A) = \frac{1}{2}$ réalise ce minimum.

Preuve (2) : Appliquons l'inégalité de Schwarz aux variables aléatoires indicatrices : $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$

$$\begin{aligned}\text{cov }(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A\cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B) = e(A,B)\end{aligned}$$

L'écart à l'indépendance du couple (A,B) s'interprète donc comme la covariance du couple $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

$$\begin{aligned}&\text{var }(\mathbf{1}_A) = \text{cov }(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A) = P(A)[1 - P(A)] = P(A)P(\overline{A}) \\ &\text{var }(\mathbf{1}_B) = P(B)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

Or, il est immédiat que : $0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \forall p \in [0,1]$**(3)**. Donc, d'après l'inégalité de Schwarz : $[\text{cov }(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)]^2 \leq [\text{var }(\mathbf{1}_A)][\text{var }(\mathbf{1}_B)] \leq \frac{1}{16} \Longrightarrow 0 \leq |e(A,B)| \leq \frac{1}{4}$.

Preuve (3) : elle est élémentaire et laissée au lecteur; il suffit d'utiliser la majoration : $P(A \cap B) \leq \text{Min }[P(A), P(B)]$ ainsi que la propriété **(3)**.

Proposition 3.– *Pour tout couple d'événements (A,B) tel que $(P(A), P(B)) \in]0,1[^2$, le nombre*

$$\rho(A,B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})}}$$

est une mesure de dépendance normalisée : $0 \leq |\rho(A,B)| \leq 1$.

Preuve : C'est la propriété classique du coefficient de corrélation affine appliqué ici aux variables aléatoires $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

$$\rho(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \frac{\text{cov }(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)}{\sigma_{\mathbf{1}_A} . \sigma_{\mathbf{1}_B}} = \frac{e(A,B)}{\sqrt{e(A,A).e(B,B)}} = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})}} = \rho(A,B)$$

Remarques :

1) Le cas $\rho = 0$ implique la non-corrélation des variables aléatoires dans le cas général; pour le cas particulier des variables indicatrices, les propriétés d'indépendance et de non-corrélation sont équivalentes. On dispose donc bien ainsi d'une mesure de dépendance du couple (A, B).

2) Le cas $|\rho| = 1$ correspond à une dépendance fonctionnelle affine entre les variables

$$\rho = +1 \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \Longleftrightarrow A = B$$

$$\rho = -1 \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1} - \mathbf{1}_B \Longleftrightarrow A = \overline{B}.$$

3) $\rho(A, B)$ n'est pas une fonction "bi-croissante" ; on a le contre-exemple suivant : soit une suite d'événements $(A_i)_{i=1,2,3,4}$ telle que

$$\begin{aligned} A_i \subset A_{i+1} \quad & \forall\, i = 1, 2, 3 \\ O < P(A_i) < 1 \quad & \forall\, i = 1, 2, 3, 4 \\ O < P(A_{i+1} \cap \overline{A}_i) < 1 \quad & \forall\, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \qquad \mathbf{(4)}$$

Il est immédiat que :

$$\rho(A_i, A_j) = \sqrt{\frac{P(A_i)P(\overline{A}_j)}{P(\overline{A}_i)P(A_j)}}$$

donc, avec **(4)** : $0 < \rho(A_i, A_j) < 1 \qquad \forall (i,j) | 1 \leq i < j \leq 3.$

De plus : $\rho(A_1, A_3) = \rho(A_1, A_2).\rho(A_2, A_3)$. Donc : $0 < \rho(A_1, A_3) < \rho(A_1, A_2)$ avec $A_3 \supset A_2$.

Conclusion : Je laisse au lecteur le soin de trouver de mirifiques propriétés pour cette mesure de dépendance $\rho(A, B)$, d'imaginer des applications stimulantes et de les diffuser. Merci.

Bibliographie

D. Foata et A. Fuchs : "*Calcul des probabilités*", Ed. Masson, 1996.