

RENCONTRE REGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

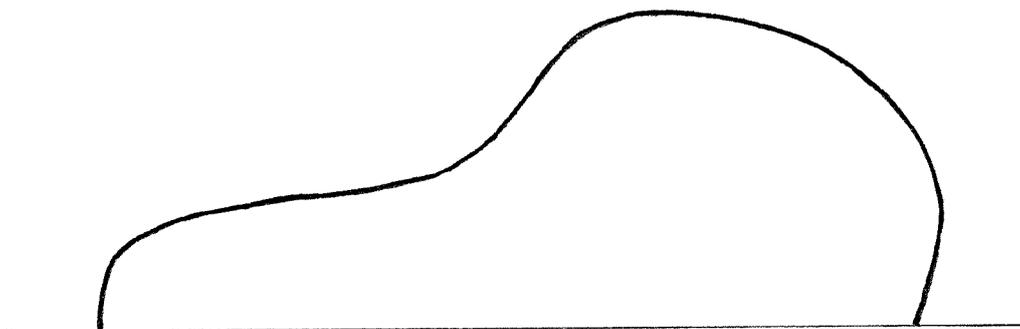
organisée par l'APMEP

Dans l'après-midi du samedi 30 mars 1996, une cinquantaine de professeurs de mathématiques se sont réunis au lycée Jean Monnet de Strasbourg. Une dizaine d'entre-eux avaient démarré cette rencontre par un déjeuner de travail au "Dodo gourmand" de Neudorf : tout un programme ! Les participants ont débuté l'après-midi avec une conférence plénière présentée par Etienne Meyer et intitulée "courbes de Bezier, Bspline et autres NURBS", avant de se répartir en différents ateliers aux thèmes variés : "l'enseignement des mathématiques en lycée" animé par Jean-Pierre Richeton, "les jeux à utiliser en classe" animé par François Drouin, et "la dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques" animé par Richard Cabassut. La dernière activité de cet après-midi, avant l'apéritif, fut l'assemblée générale ponctuée par l'élection d'un nouveau comité de la régionale APMEP d'Alsace. Pendant toute la rencontre, un stand était installé avec des brochures IREM et APMEP pour la consultation ou la vente.

COURBES DE BEZIER, BSPLINE ET AUTRES NURBS

Par Etienne Meyer

Un concepteur (dessinateur, technicien ou autre) aimerait que l'on puisse obtenir la "forme" F représentée sur le dessin n°1 et il lui faudrait des formules pour étudier, modifier, construire, réaliser ... cette forme.



Des formules ? oui, mais sous quelle forme ? La solution que nous allons retenir ici est celle des courbes paramétrées : dans un repère, les coordonnées d'un point courant de la courbe C sont données en fonction d'un paramètre à faire varier entre deux valeurs. Soit :

$$M(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \text{ avec } t \in [a,b].$$

Le résultat fondamental sur les courbes paramétrées est le suivant.

Appelons $\vec{V}(t)$ le vecteur de coordonnées $(x'(t); y'(t))$. Si ce vecteur n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(t)$.

Une interprétation importante des courbes paramétrées est donnée par la cinématique : en interprétant le paramètre t comme étant le temps, la courbe est la trajectoire d'un mobile $M(t)$, la loi horaire est définie par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point $M(t)$, le vecteur dérivé $\vec{V}(t)$ est le vecteur vitesse, et le vecteur dérivé de $\vec{V}(t)$ est le vecteur accélération.

Mais quelles formules choisir ? Et à partir de quoi ?

Première idée : l'interpolation

- Choisir des points de la "forme" F en donnant leurs coordonnées dans un repère fixé.
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **par** ces points : on prendra des polynômes et on parlera d'interpolation polynomiale.

Deuxième idée : l'approximation

- Choisir des points de la "forme" F
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **près de** ces points.

Nous n'allons pas aborder ce point de vue. C'est toutefois un aspect très important et très utile dans de nombreux domaines.

Troisième idée : interpolation par morceaux

- décomposer la courbe en plusieurs morceaux
- appliquer la première idée avec la contrainte : les courbes ont mêmes tangentes aux points de raccordement.

Une toute autre idée : les courbes à pôles

Il s'agit d'un procédé de définition de courbes qui permet d'en modifier simplement l'allure : ce n'est pas très lumineux pour l'instant, mais vous allez voir, c'est terriblement efficace !

Le premier qui en a eu l'idée et qui l'a appliquée aux problèmes de l'industrie automobile est P. Bézier, ingénieur chez Renault, encore en vie. Depuis, son idée a été exploitée par bien d'autres et a donné naissance à ce qu'on appelle les courbes à pôles, parmi lesquelles il y a les courbes de Bézier, les B-Splines et plus récemment, les NURBS (Non Uniform Rational BSpline).

Nous allons examiner rapidement quelques solutions liées à la première idée et mettre en évidence les inconvénients de cette approche. Nous parlerons de quelques améliorations possibles mais sans trop approfondir.

En illustrant la troisième idée avec des fonctions très simples, nous allons mettre en évidence les points essentiels permettant le développement de la quatrième idée.

Nous montrerons ensuite les qualités essentielles des courbes à pôles et nous parlerons des améliorations apportées sans trop rentrer dans les aspects de technique mathématique.

Courbes d'interpolation polynomiale

Le problème est le suivant :

Etant donnés n points $M_0, M_1 \dots M_{n-1}$, déterminer deux polynômes $x(t)$ et $y(t)$ définissant une courbe C passant par ces n points.

Voici une solution possible : en choisissant $n-1$ comme degré des polynômes et en traduisant la contrainte par $M(k) = M_k$ pour k de 0 à $n-1$, le problème possède en général une solution et une seule.

Examinons ceci sur un exemple :

Choix des points : $(0;0), (1;3), (11;5), (17;10), (27;6), (26;0)$.

Résultat (Dessin 2.1) : ce n'est pas très fameux !

Augmentons le nombre de points :

Après insertion du point $(5;4)$, on obtient le Dessin 2.2

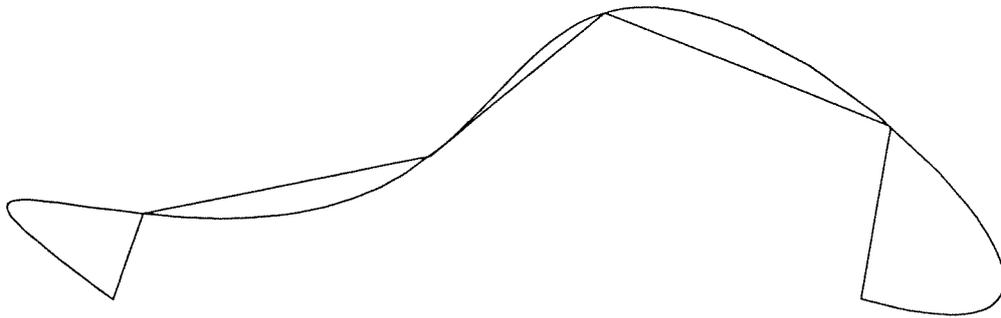
Après insertion supplémentaire de $(27;2)$, on obtient le Dessin 2.3 : cela ne s'arrange pas !

Ce phénomène est irrémédiable et bien connu : la solution ne consistera pas à augmenter le nombre de points !

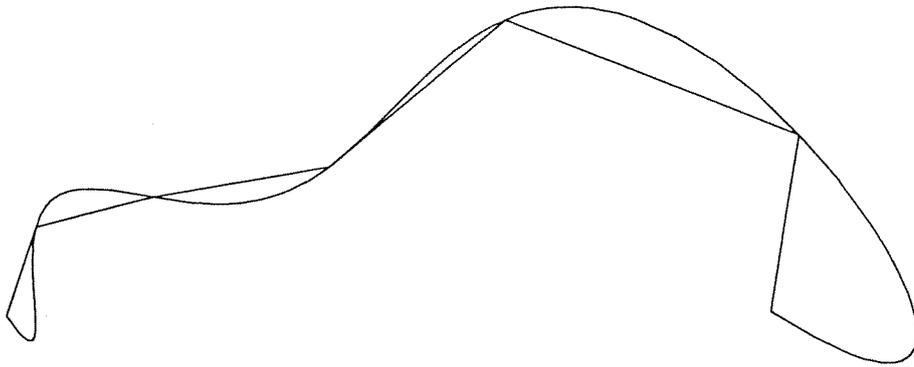
Une amélioration est cependant possible en choisissant "mieux" les "nœuds", c'est à dire les valeurs du paramètre pour lesquelles $M(t)$ est l'un des points donnés.

Sans trop approfondir cette question, voici (Dessin 2.4) ce que l'on obtient en prenant comme suite des noeuds, $(0,1,5,8,12,14)$ à la place de $(0,1,2,3,4,5)$. Sur quoi ce choix est-il basé ? Voici la réponse : les valeurs du paramètre sont proportionnelles à la longueur de la ligne polygonale depuis M_0 .

Une question importante se pose à priori : la courbe obtenue par ce procédé d'interpolation polynomiale, est-elle indépendante du repère dans lequel se font les calculs ?



2.1



2.2



2.3

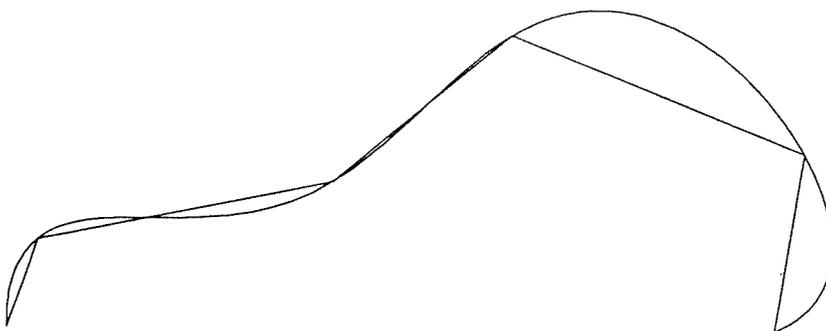


Figure 2

2.4

Interpolation par morceaux

En poussant l'idée à l'extrême voici la manière dont on peut poser et résoudre le problème :

- choisir n points de la courbe à obtenir
- pour chaque couple de points consécutifs, chercher une courbe passant par ces deux points et, sauf pour la première, tangente à la précédente au point de raccord.

On a donc, sauf pour la première courbe, trois conditions à respecter. D'où l'idée toute simple de chercher un paramétrage à l'aide de polynômes du second degré (en faisant varier à chaque fois le paramètre entre 0 et 1). Il restera encore un choix à effectuer pour le départ. La contrainte de tangence sera traduite par $\vec{V}_k(1) = \vec{V}_{k+1}(0)$.

Voir le résultat obtenu avec $\vec{V}(\vec{0}) = (0;1)$ au dessin 3.1

Voir le résultat obtenu avec $\vec{V}(\vec{0}) = (2;3)$ et en inversant la liste des points au dessin 3.2

Ce n'est toujours pas très fameux, mais des améliorations sont possibles :

- en remplaçant $\vec{V}_k(1) = \vec{V}_{k+1}(0)$ par $\vec{V}_k(1) = \lambda \cdot \vec{V}_{k+1}(0)$ (ce qui suffit pour la tangence des courbes). En choisissant λ pour que $\|\vec{V}_k(0)\| = \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$, voir ce que l'on obtient au dessin 3.3 (avec la liste initiale des points et un vecteur vitesse colinéaire à $(0;1)$ au départ)
- en prenant des polynômes de degré 3 : la liberté supplémentaire de raccord peut se traduire de diverses manières. Une solution consiste à imposer l'égalité des vecteurs vitesse et accélération. La liberté au départ peut se traduire par exemple en imposant des vecteurs accélération nuls au départ et à l'arrivée (voir dessin 3.4). C'est une solution effectivement utilisée, cumulée d'ailleurs avec l'amélioration précédente.

Etude de l'interpolation quadratique entre deux points

Problème :

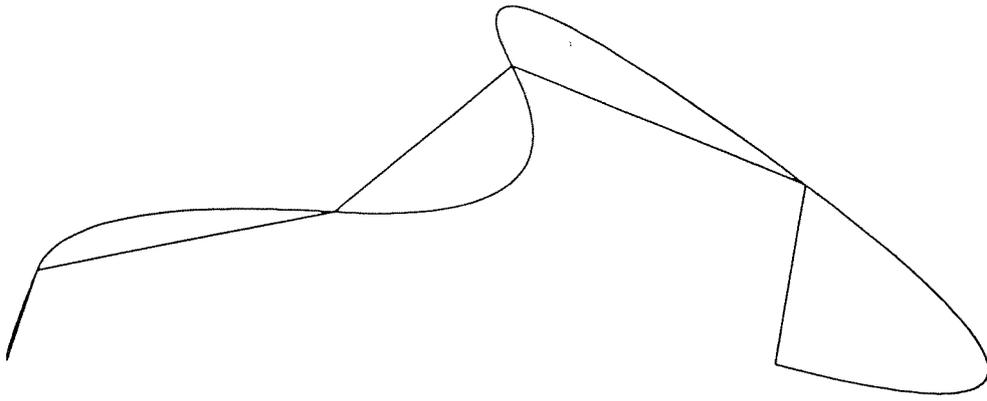
étant donné deux points M_0 et M_1 et un vecteur \vec{V}_0 , déterminer trois vecteurs A, B et C

tels que la courbe paramétrée par $\overrightarrow{OM}(t) = t^2.A + t.B + C$ vérifie :

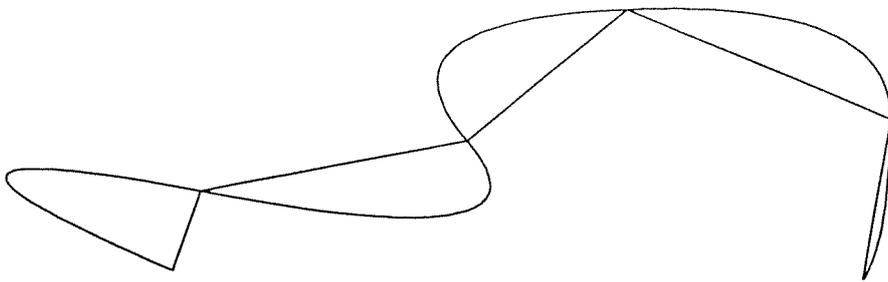
$$\begin{cases} M(0) = M_0 \\ M(1) = M_1 \\ \vec{V}(\vec{0}) = \vec{V}_0 \end{cases}$$

Ce problème est facile à résoudre et on obtient : $A = \overrightarrow{M_0 M_1} - \vec{V}_0$; $B = \vec{V}_0$; $C = \overrightarrow{OM_0}$

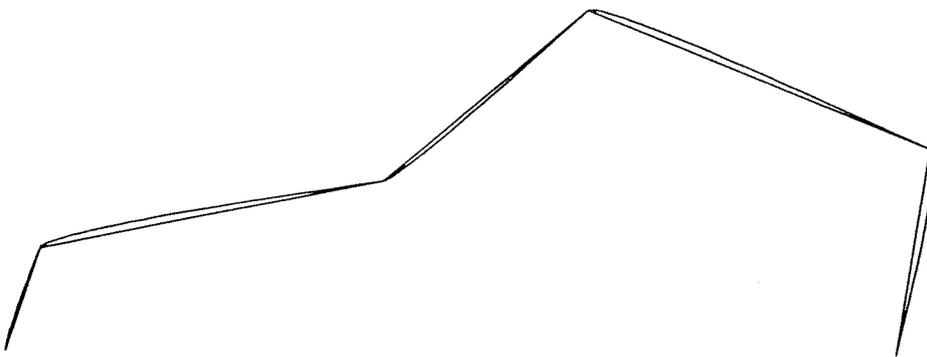
RENCONTRE REGIONALE APMEP



3.1



3.2



3.3

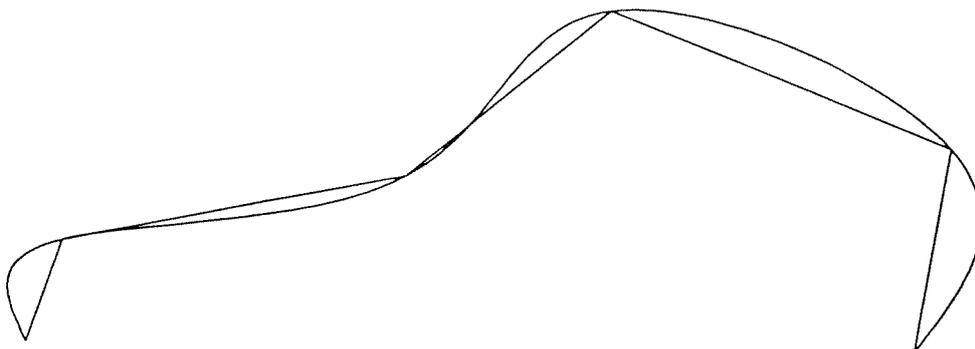


Figure 3

3.4

Remarque 1 : la courbe obtenue ne dépend pas du repère comme le montre clairement le résultat : $\overrightarrow{M_0M_1}(t) = t^2 \cdot \overrightarrow{M_0M_1} + t(1-t) \cdot \overrightarrow{V_0}$

Remarque 2 : en fait, il y a une écriture bien plus belle encore.

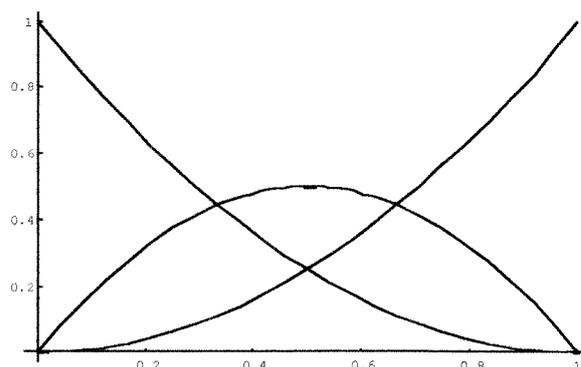
Faisons intervenir, par raison de "symétrie", le vecteur $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V(1)}$ et appelons P le point d'intersection des tangentes en M_0 et M_1 .

P est le milieu du segment M_0N_0 et du segment M_1N_1 , où N_0 et N_1 sont définis par $\overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = -\overrightarrow{V_1}$.

On obtient simplement : $\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OM_0} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OP} + t^2 \cdot \overrightarrow{OM_1}$.

Ceci s'interprète de la belle manière suivante : **M(t) est le barycentre des points M_0 , P et M_1 affectés des coefficients $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 dont la somme est bien égale à 1.** En effet, il s'agit de la formule du binôme appliquée à $((1-t) + t)^2$.

Voici comment évolue avec le paramètre t, les poids des points, leur importance, la force avec laquelle ils attirent la courbe vers eux :



Remarque 3 : construction du point courant et de la tangente courante.

$$\overrightarrow{V}(t) = 2(1-t) \cdot \overrightarrow{OM_0} + 2(1-2t) \cdot \overrightarrow{OP} + 2t \cdot \overrightarrow{OM_1}$$

Soit P_1 le barycentre de $(M_0, (1-t))$ et (P, t) ; soit P_2 le barycentre de $(P, (1-t))$ et (M_1, t)

Eh bien : M(t) est le barycentre de $(P_1, (1-t))$ et (P_2, t) et $\overrightarrow{V}(t) = 2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$

|| Dans ce petit exemple, et d'ailleurs dans les résultats que nous allons aborder maintenant, il y a l'essentiel des idées et des résultats des courbes de Bézier et des B-Splines.

Les courbes de Bézier

Définition :

Soit $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ $n+1$ points appelés pôles.

La courbe de Bézier définie par ces pôles est la courbe paramétrée définie par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \cdot \vec{OP}_k, \quad t \text{ variant de } 0 \text{ à } 1 \text{ avec } B_{n,k}(t) = C_k^n (1-t)^{n-k} t^k \text{ (Polynômes de Bernstein)}$$

Propriétés :

- $M(t)$ est le barycentre des points P_k affectés des coefficients $B_{n,k}(t)$: la définition ci-dessus est donc indépendante du repère
- $M(0) = P_0$; $M(1) = P_n$
- $\vec{V}(0)$ est dirigé par P_0P_1 ; $\vec{V}(1)$ est dirigé par $P_{n-1}P_n$
- Pour tout t , $M(t)$ est à l'intérieur du polygone convexe défini par les pôles
- l'influence de P_k est maximale pour $t = k/n$.
- construction du point courant et de la tangente courante : c'est le même principe que pour l'interpolation quadratique exposée ci-dessus. On les obtient par barycentres successifs (et pour obtenir les points les plus sous influence des pôles, faire ces constructions pour $t = k/n$).
- l'influence d'un pôle : elle est globale, mais essentielle sur la partie de la courbe voisine du point correspondant : voir [figure 4](#) ci-contre.

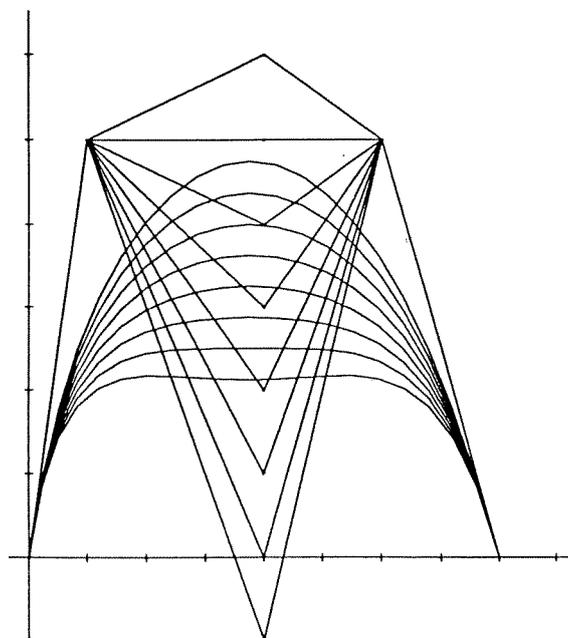
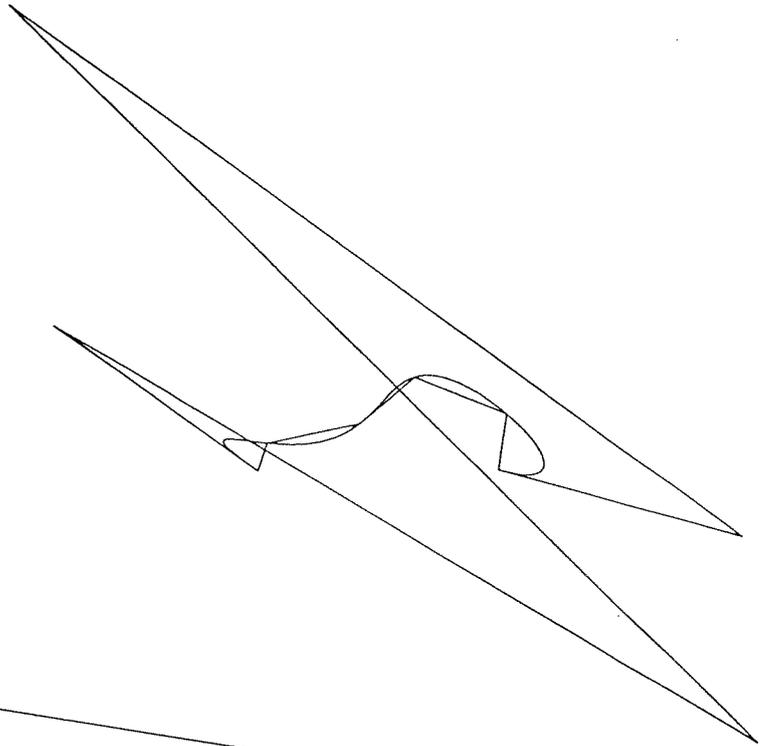


Illustration :

Revenons à notre problème initial : recherche d'une courbe paramétrée, maintenant sous forme de courbe de Bézier, approchant la forme donnée par le dessin n°1. Il s'agit de déterminer les pôles. Un technicien, dans son bureau d'études, le fera par essais-erreurs ou à partir d'exemples précédemment réalisés. Pour les besoins de cet article et l'intérêt mathématique que cela présente, procédons différemment. Cherchons (en résolvant un système linéaire) les pôles P_0, P_1, \dots, P_5 définissant une courbe de Bézier, de telle sorte que celle-ci passe par les six premiers points M_0, M_1, \dots, M_5 choisis sur la "forme". On aura en particulier $P_0 = M_0 = (0,0)$ et $P_5 = M_5 = (26,0)$. Mais les autres pôles P_i auront des positions bien différentes des points M_i et cette courbe identique à la courbe obtenue pour le dessin 2.1. Le résultat, on le sait, n'est guère satisfaisant pour le problème posé (voir dessin 5.1, sur lequel figure le polygone des points choisis sur la forme, le polygone des pôles calculés et la courbe de Bézier correspondante passant bien par les cinq points

choisis). Mais désormais nous disposons des pôles, et grâce à leurs propriétés (et à l'interprétation géométrique de ces propriétés) nous "savons" comment déplacer ces pôles pour que la courbe de Bézier associée donne un résultat satisfaisant notre attente. (l'Ouvert n'étant pas encore une revue électronique, il vous faut imaginer les manipulations faites pour aboutir au dessin 5.2 ; la courbe de Bézier obtenue ne passe plus exactement par les six points choisis mais fournit un résultat global plus satisfaisant).

5.1



5.2

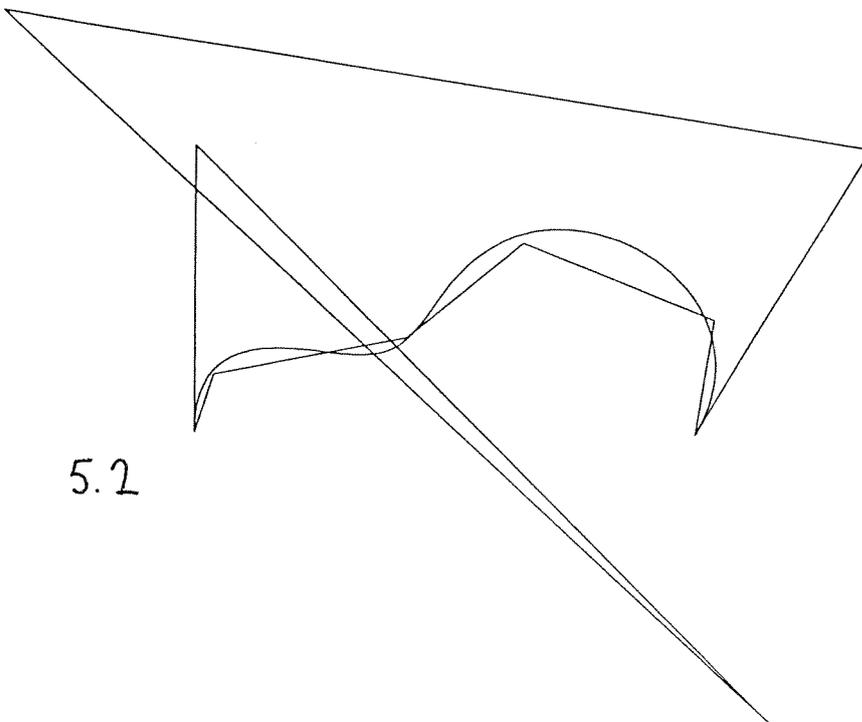


Figure 5

Les B-Splines

Parmi les inconvénients des courbes de Bézier, il y a le fait que la modification d'un pôle entraîne la modification de toute la courbe (avec toutefois une importance de la modification plus grande près du point correspondant au pôle) et surtout le fait que le degré des polynômes qui interviennent (et donc la complexité des calculs) est égal au nombre de pôles (moins 1).

Pour réduire ces inconvénients tout en gardant les avantages des courbes de Bézier, une solution consiste à changer les polynômes de bases qui interviennent pour le calcul de $M(t)$.

On aura toujours $\vec{OM}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k(t) \cdot \vec{OP}_k$ mais avec d'autres fonctions $B_k(t)$. Celles-ci

seront définies à partir d'une séquence nodale (t_0, t_1, \dots, t_p) , le paramètre t variant de t_0 à t_p , mais garderont les propriétés fondamentales suivantes : pour tout t , $0 \leq B_k(t) \leq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{k=n} B_k(t) = 1.$$

Pour assurer une influence uniquement locale, les fonctions B_k seront nulles sur une bonne partie de l'intervalle $[t_0 ; t_p]$.

Les représentations de ces fonctions dans le cas d'ordre 2 et pour la séquence nodale $(0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$ sont données par la figure 6.

Ces fonctions ont des propriétés de calcul analogues aux polynômes de Bernstein (calcul récursif, calcul des dérivées) et procurent une grande souplesse tout en permettant l'usage de polynômes de faible degré.

Les polynômes de Bernstein apparaissent d'ailleurs comme des cas particuliers de Bsplines (avec des séquences nodales uniformes).

Les N.U.R.B.S.

Les possibilités offertes par les Bsplines ne règlent cependant pas le problème de la représentation du cercle comme une courbe à pôles. Or cette représentation serait d'une grande utilité : elle permettrait une uniformisation du type de courbes utilisées, "nécessaire" pour des questions de normalisation et de simplification des définitions de surface.

Un cercle ne peut pas être obtenu comme courbe paramétrée à l'aide de polynômes.

Essayons de nous en convaincre. Le degré 2 devrait suffire si cela était possible.

Or une courbe polynomiale de degré 2 est une parabole.

(Démonstration laissée aux soins du lecteur)

L'idée simple suivante va nous permettre d'obtenir une paramétrisation (non polynomiale) de tout arc de conique et en même temps nous fournir les bases de la généralisation des Bsplines : les NURBS.

Une parabole est une section particulière d'un cône. En faisant une projection conique de cette parabole à partir du sommet du cône et sur un plan orthogonal à l'axe du cône, on obtient bien un cercle (et d'autres coniques, en projetant sur d'autres plans).

D'où l'idée de définir une courbe de Bézier de degré 2 dans l'espace (une parabole) et de la projeter (en projection conique) sur un plan ne passant pas par le sommet. En prenant comme plan le plan d'équation $Z = 1$, cela revient à associer au point de l'espace (X, Y, Z) le point du plan $(x=X/Z, y=Y/Z)$. Cela revient en fait à faire de la géométrie projective !

Ce procédé se généralise aux courbes de Bézier de degré quelconque et même au Bsplines.

Voici ce que cela donne pour les courbes de Bézier.

Point de vue théorique :

Soit $P_k(X_k, Y_k, Z_k)$ des pôles de l'espace.

$M(t)$, point de l'espace, est défini par $\sum B_{n,k}(t) \cdot P_k$, c'est-à-dire : $X(t) = \sum B_{n,k}(t) \cdot X_k$ et de même pour $Y(t)$ et $Z(t)$.

On définit alors $m(t)$, point du plan, par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot X_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \end{cases}$$

En posant $x_k = X_k/Z_k$ et $y_k = Y_k/Z_k$ on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k \cdot x_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k \cdot y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \end{cases}$$

Ceci fait encore apparaître $m(t)$ comme le barycentre des points $p_k (x_k, y_k)$ et on conserve ainsi une bonne partie de l'interprétation fondamentale des courbes à pôles.

Point de vue pratique : formules des courbes de Bézier rationnelles (cas particulier des NURBS)

Soient $P_k (x_k, y_k)$, $n+1$ pôles (du plan) et (h_0, h_1, \dots, h_n) des poids (nombres positifs).

On définit $M(t)$ par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k \cdot x_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k \cdot y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k} \end{cases}$$

Les arcs de coniques peuvent être paramétrés de cette manière. En particulier, voici le choix des pôles et des poids pour obtenir l'arc de cercle de centre C, d'extrémités A et B :

$P_0 = A$, $P_2 = B$ et P_1 est le point d'intersection des tangentes en A et B.
 $h_0 = h_2 = 1$ et $h_1 = \cos(a)/2$ où a est l'angle intercepté.

Bibliographie : de très nombreux ouvrages existent sur la question.

En voici quelques uns :

A practical guide to splines - Carl de Boor - Springer-Verlag

Curves and surfaces for Computer aided geometric design - G. Farin - Academic Press

Modélisation et construction de surfaces pour la CAO - JC Léon - Hermès

Pour l'enseignement en BTS, on pourra se servir de Courbes de Bézier et B.Splines édité par l'IREM de Paris Nord.

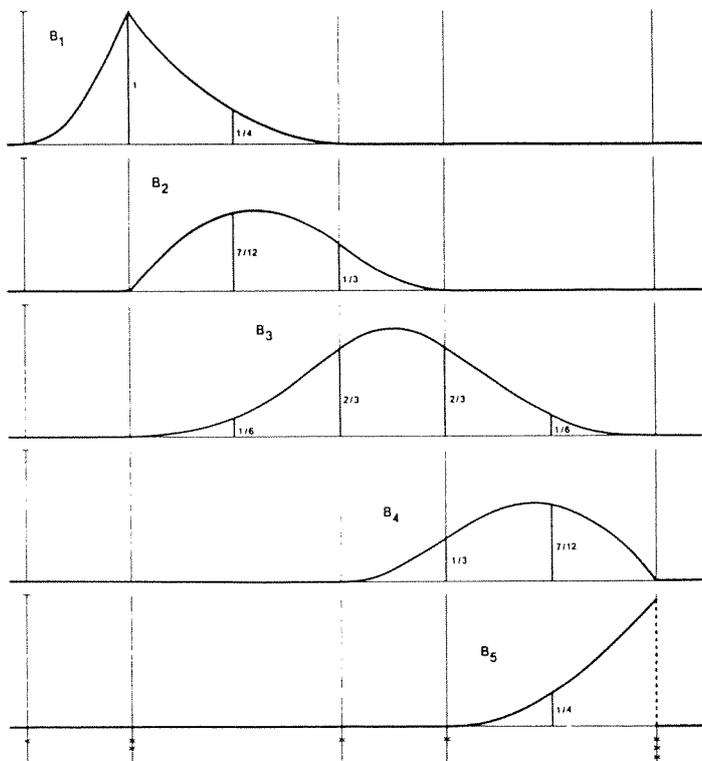


Figure 6