ET POURTANT QUELQUES-UNS SONT QUARRABLES - LA QUADRATURE DU CERCLE DANS LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

par Klaus Volkert, professeur à Heidelberg

Première partie

Le terme "quadrature du cercle" est devenu synonyme de "problème sans solution". C'est dû au fait que F. Lindemann démontrait en 1882 que le nombre π est transcendant; par conséquent il est impossible dans la géométrie euclidienne de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle constructible. Par contre il est peu connu que J. Bolyai a montré 50 ans auparavant qu'une telle quadrature est possible pour certains cercles dans la géométrie créée par lui et par Lobatchevsky, une géométrie aujourd'hui appelée géométrie hyperbolique. D'un point de vue historique il est intéressant de voir que la solution donnée par Bolyai utilise des résultats trouvés antérieurement par Gauss sur la constructibilité des polygones réguliers et que les constructions de Bolyai sont des constructions théoriques qu'on ne peut pas exécuter sur une feuille de papier à l'aide des instruments usuels. Donc la découverte de Bolyai montre elle aussi la tendance si typique pour le 19e siècle vers une perspective abstraite et algébrique.

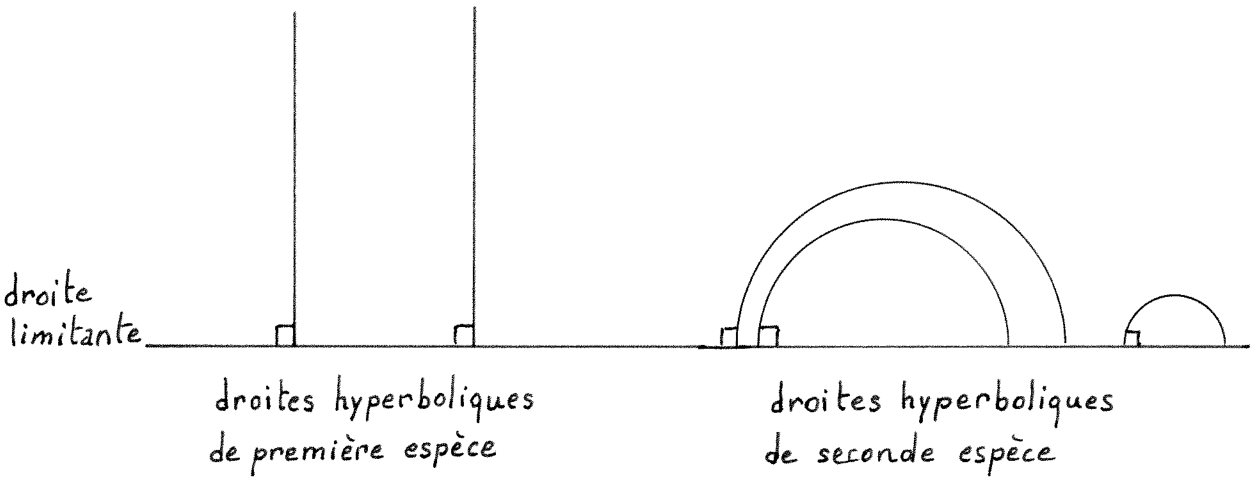
En 1832 János Bolyai publiait son fameux appendice au manuel de géométrie de son père Farkas intitulé *La Science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI* d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI* (l'original était écrit en latin, J. Bolyai lui-même en a composé une traduction allemande). On sait bien que cet appendice passa tout à fait inaperçu du monde mathématique; il ne fut redécouvert que dans les années 1860. La traduction française par Jean Hoüel que nous allons citer dans le texte qui suit date de 1868[1].
Par cet appendice Bolyai est devenu le co-fondateur de la géométrie non-euclidienne (ou plus précisément de la géométrie hyperbolique); l'autre fondateur était le mathématicien russe Nikolaus Lobatchevsky qui a été aussi peu lu et reconnu que Bolyai.

1. Construire en géométrie hyperbolique

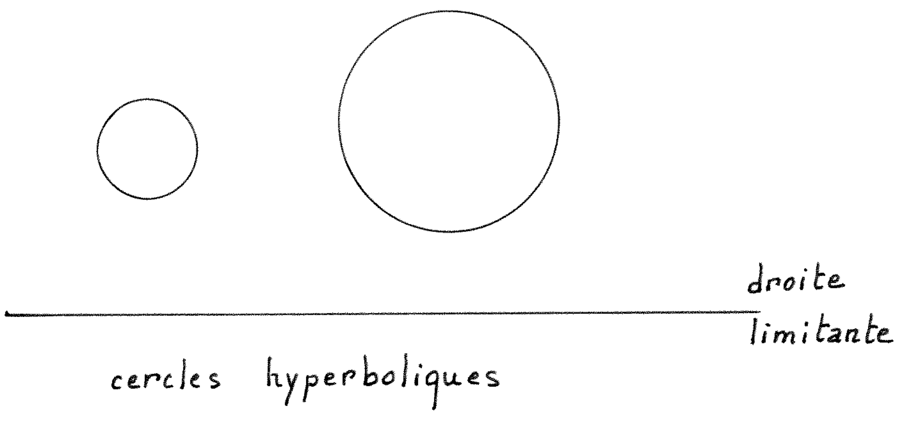
Il y a beaucoup de points communs entre Bolyai et Lobatchevsky mais aussi des différences remarquables. Ce qui nous intéresse ici c'est le fait que Bolyai s'occupe dans son appendice des constructions à la règle et au compas[2] dans le cadre de la nouvelle géométrie - un thème qui fut ignoré par Lobatchevsky. Que veut dire *construire avec la règle et le compas*? Il faut se persuader du caractère métaphorique de cette phrase; ce qu'on fait en réalité c'est couper des droites avec des droites, des droites avec des cercles ou des cercles avec des cercles.[3] Rien d'autre - en particulier aucun instrument -

* Cinquième postulat dans les éditions françaises récentes (n.d.l.r).

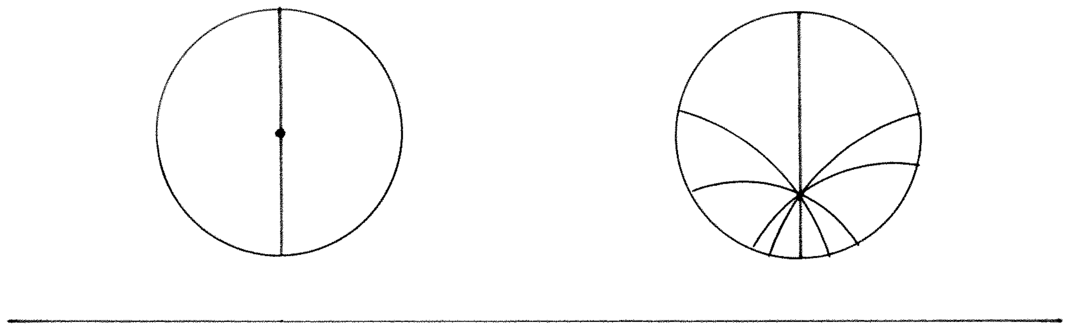
n'intervient. Les termes *droite* et *cercle* gardent leur sens dans la nouvelle géométrie parce que ce sont des termes de la géométrie absolue (c'est à dire indépendante du postulat des parallèles; voir plus loin). Donc on peut continuer à parler des constructions à la règle et au compas, mais il manque une idée intuitive d'un cercle hyperbolique ou d'une droite hyperbolique. C'était vrai sans restriction pour Bolyai; par conséquent ses constructions sont tout à fait théoriques. Une certaine visualisation ne devenait possible qu'avec les modèles qu'on a trouvés à partir de la fin des années 1860: Beltrami 1868, Klein 1871 et Poincaré 1880 (publié un an après). Dans le modèle (bidimensionnel) de Poincaré les droites hyperboliques sont représentées soit par des demi-droites euclidiennes orthogonales à une droite du plan euclidien fixée auparavant - appelée la droite limitante - soit par des demi-cercles euclidiens avec leurs centres sur la droite limitante.



Les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens se trouvant complètement dans un des deux demi-plans définis par la droite limitante (autrement dit, complètement dans le plan hyperbolique).

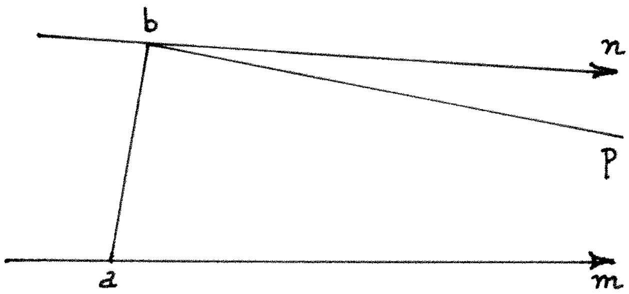


Mais il faut remarquer que les centres hyperboliques de ces cercles diffèrent de leurs centres ordinaires. C'est dû au fait que les distances sont altérées dans le modèle: les distances plus proches de la droite limitante sont agrandies d'un point de vue euclidien, les distances dans l'autre direction sont diminuées:



Autrement dit, dans le modèle de Poincaré on ne peut plus rapporter des segments de la manière habituelle avec le compas ordinaire. Ce modèle de Poincaré est conforme mais il ne conserve pas les distances. Dans la suite il est plus aisé de travailler comme Bolyai exclusivement sur le niveau théorique. C'est tout de même un problème intéressant d'étudier les constructions dans le modèle de Poincaré ou dans un autre modèle.
On peut utiliser sans altérations les constructions de la géométrie absolue données par Euclide dans les propositions 9 à 12 du premier livre des *Eléments*. La géométrie absolue est la partie de la géométrie élémentaire (plane pour simplifier les choses) qui est indépendante du postulat des parallèles appelé souvent l'axiome des parallèles ou l'axiome 11. Bolyai écrivait:
§15. En considérant ce que nous avons établi ... nous désignerons par Σ le système de géométrie qui repose sur l'hypothèse de la vérité de l'axiome XI d'Euclide, et par S le système fondé sur l'hypothèse contraire.
Tous les résultats que nous avons énoncés, sans désigner expressément si c'est dans le système Σ ou dans le système S qu'ils ont lieu, devront être considérés comme énoncés d'une manière absolue, c'est-à-dire qu'ils seront donnés comme vrais, soit qu'on se place dans le système Σ, soit qu'on se place dans le système S.
Ni Bolyai ni quelqu'un d'autre de son époque n'était capable de caractériser exactement cette géométrie. Pour arriver à une telle caractérisation il faut un système complet d'axiomes pour la géométrie - résultat qui ne fut achevé que vers la fin du 19e siècle (par Pasch, Hilbert et d'autres). Mais on connaissait très bien les *Eléments* d'Euclide et on savait que les propositions 1 à 28 du premier livre sont démontrées sans utilisation du postulat en question. Bolyai lui-même a démontré d'autres théorèmes de la géométrie absolue notamment son fameux théorème:
§ 25) Dans tout triangle rectiligne, les circonférences de rayons égaux aux côtés sont entre elles comme les sinus des angles opposés.

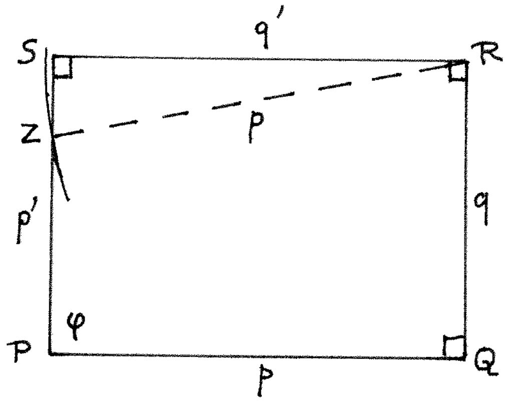
En particulier on peut utiliser la construction donnée par Euclide du triangle équilatéral de base donnée (I,1)*, de la médiatrice (I,9), de la bissectrice (I,10) et de la perpendiculaire élevée en un point donné d'une droite (I,11) ou abaissée d'un point sur une droite (I,12). Les théorèmes de congruence* pour le triangle (I,4; I,8 et I,26) sont aussi des énoncés de la géométrie absolue, donc valables dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique.
Si nous avançons dans la théorie des parallèles, les différences entre les deux géométries deviennent très claires. La notion principale de la géométrie hyperbolique est l'angle de parallélisme, introduite par Bolyai (qui n'utilise pas ce terme) de la manière suivante:
§1. Si la droite am n'est pas coupée par la droite bn, située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre droite bp, comprise dans l'angle abn, on dira que bn est parallèle à am, c'est à dire qu'on aura bn /// am.



Donc la parallèle est la première droite non-sécante (par symétrie on en a deux: une de chaque côté). Si $\angle$ bam = 1 droit on appelle angle de parallélisme l'angle $\angle$ abn entre la perpendiculaire ba et la parallèle bn. Il est bien connu depuis le temps d'Euclide que l'angle de parallélisme équivaut à un droit dans la géométrie ordinaire (c'est une conséquence par exemple du théorème 29 du premier livre et donc du postulat des parallèles); de plus il découle du théorème 17 du premier livre (un théorème de la géométrie absolue!) que l'angle de parallélisme ne peut jamais excéder un angle droit.
En géométrie hyperbolique cet angle est toujours inférieur à un droit. De plus il dépend de la longueur de la perpendiculaire ba. Lorsque ba tend vers l'infini l'angle de parallélisme, qui est noté aujourd'hui par Π(ba) d'après Lobatchevsky, tend vers zéro; lorsque ba tend vers zéro il tend vers un droit.
Comme la fonction Π: $]0,\infty[\ \rightarrow]0,\pi/2[$ décroît strictement, on peut définir sa fonction réciproque. Cette fonction réciproque est désignée par Δ: $]0,\pi/2[\rightarrow\ ]0,\infty[$; elle fournit pour une valeur donnée de l'angle de parallélisme la longueur de la perpendiculaire.
On peut se poser les problèmes suivants: étant donné un segment de longueur q, peut-on construire l'angle Π(q) avec la règle et le compas? Et aussi: étant donné un angle α (plus petit qu'un angle droit bien entendu), peut-on construire la perpendiculaire correspondante Δ(α)? Les réponses sont données par les constructions qui suivent.

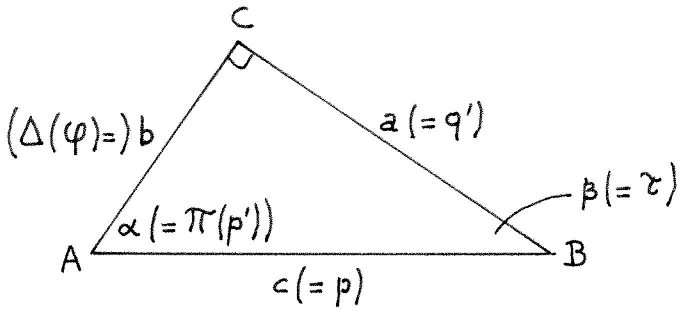
* Le premier chiffre, romain, indique le numéro du livre des *"Eléments"*, le second chiffre, arabe, celui de la proposition. Ainsi (I,9) signifie Proposition 9 du Livre I (n.d.l.r).
* Ce qu'en France on appelait *"les cas d'égalité des triangles"* (n.d.l.r).

Première construction fondamentale (cf. Bolyai § 34):
Soit un segment QR de longueur q. Construire l'angle de parallélisme correspondant $\Pi(q)$.
Nous élevons en Q et en R les perpendiculaires sur QR (du même côté). Sur celle en Q nous marquons en partant de Q une longueur p qui est arbitraire, d'extrémité P. De P nous abaissons la perpendiculaire sur la perpendiculaire élevée en R . Soit S le point d'intersection. Nous arrivons à la situation suivante:



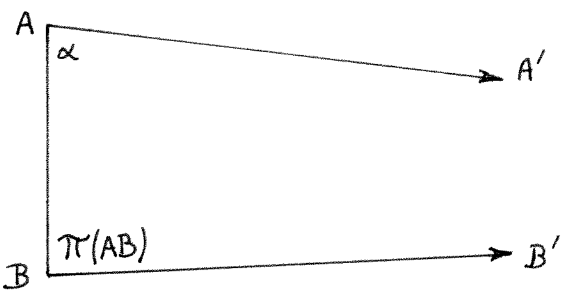
Evidemment le quadrilatère PQRS est un rectangle dans la géométrie euclidienne. Dans la géométrie hyperbolique il n'existe pas de rectangle car la somme des angles internes d'un triangle est toujours plus petite que deux droits (ce fut démontré pour la première fois par Saccheri en 1733 [cf. Stäckel/Engel 1895, 59]). L'angle φ en P est un angle aigu dans cette géométrie. Des quadrilatères avec trois angles droits plus un angle aigu furent considérés déjà par le mathématicien et physicien arabe Ibn al Haytam et plus tard par Johann Heinrich Lambert. Ils jouent un rôle important aussi dans les recherches de Saccheri. Tous les mathématiciens cités voulaient démontrer qu'un tel quadrilatère est impossible en réfutant ce qu'on appelait l'hypothèse de l'angle aigu. Mais ces essais furent vains ; l'hypothèse de l'angle aigu n'entraîne pas de contradiction. Par contre on a trouvé de vraies contradictions dans l'hypothèse de l'angle obtus. Autrement dit les hypothèses de l'angle aigu et de l'angle droit (qui correspondent à la géométrie hyperbolique et à la géométrie euclidienne) sont compatibles avec la géométrie absolue, l'hypothèse de l'angle obtus (qui correspond à la géométrie sphérique) ne l'est pas.
Ainsi dans la géométrie hyperbolique il existe de tels quadrilatères. On peut démontrer de plus qu'on a toujours les relations $q' < p$ et $q < p'$. Si on trace un cercle de centre R avec un rayon de longueur p on obtient un point d'intersection Z du cercle avec l'arête PS du quadrilatère. On joint les points Z et R; l'angle $\angle$ ZRQ est l'angle cherché (c'est-à-dire $\Pi(q)$).
Pour vérifier cette construction on peut utiliser soit la trigonométrie hyperbolique (voir fin de paragraphe) avec la représentation analytique de la fonction $\Pi(q)$, soit la congruence des triangles. Partant d'un quadrilatère PQRS du type indiqué plus haut on peut toujours construire un triangle ABC rectangle en C. Pour cela nous reportons l'angle de parallélisme $\Pi(q)$ en R. Cela nous donne un point d'intersection Z' avec l'arête PS. Nous définissons une correspondance du quadrilatère PQRS et du triangle ABC par

$p \to c$ et $\tau \to \beta$ où $\tau = \pi/2 - \angle Z'RQ$. On peut calculer les autres éléments du triangle et on trouve (cf. Perron 1962, 40) que $a = q'$, $b = \Delta(\varphi)$ et $\alpha = \Pi(p')$.

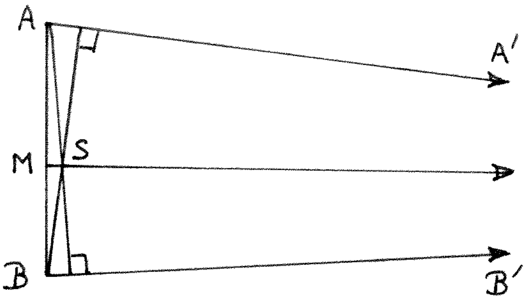


Evidemment les triangles ABC et RSZ sont congruents ce qui montre que l'angle construit $\angle$ SRZ est congruent à l'angle $\Pi(q)$. Les correspondances entre un quadrilatère de Haytam - Lambert et des triangles rectangles ont été étudiées systématiquement par H. Liebmann (cf. Liebmann 1901) au début de notre siècle. Elles sont un outil assez utile.

Deuxième construction fondamentale (cf. Bolyai § 35):
Soit α un angle donné (plus petit qu'un droit bien entendu). Construire $\Delta(\alpha)$, c'est-à-dire un segment [AM] de longueur AM telle que $\alpha=\Pi(AM)$ en soit l'angle de parallélisme.

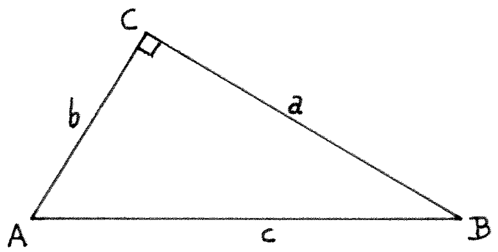


Soit A le sommet de l'angle donné, A' et B deux points sur les deux côtés de l'angle. Selon la première construction fondamentale nous sommes capables de construire en B l'angle de parallélisme du segment AB. Soit BB' l'autre côté de cet angle. De B nous abaissons la perpendiculaire sur AA', de A celle sur BB'. Ces deux perpendiculaires se coupent en un point S. De S nous abaissons la perpendiculaire sur AB et nous obtenons le point M. Le segment [AM] est le segment cherché.



La vérification de cette construction est difficile. Elle repose sur le fait que S peut se concevoir comme le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle AB∞ qui est un triangle simplement asymptotique ce qui veut dire que son troisième sommet ∞ se trouve à l'infini. Ce point à l'infini est le point d'intersection des deux parallèles AA' et BB'; l'angle sous lequel ces droites se coupent est nul. De plus MS est parallèle à AA' et BB' - c'est-à-dire que MS passe aussi par le même point ∞ que AA' et BB' à l'infini.
Une autre possibilité: on construit d'abord un triangle rectangle quelconque avec l'angle α et une hypoténuse c (par exemple on abaisse la perpendiculaire d'un côté de l'angle α sur l'autre). Par la première construction fondamentale on peut construire l'angle $\Pi(c)$. Et par la construction du triangle rectangle on connaît les autres côtés, par exemple b. Comme $c > b$ alors $\Pi(c) < \Pi(b)$. Donc on peut construire un triangle rectangle avec $\alpha' = \Pi(c)$ et $b' = b$. Dans ce triangle on a l'égalité $c' = \Delta(\alpha)$ (cf. Perron 1962, 43 pour les détails concernant le passage du quadrilatère à un triangle rectangle). Nous terminerons ce paragraphe en donnant quelques formules utiles pour la suite.

Trigonométrie du triangle rectangle hyperbolique



$\cos c = \cosh a \bullet \cosh b$
$\cosh a = \cos \alpha / \sin \beta$
$\cos \alpha = \tanh b / \tanh c$
$\cosh c = \cot \alpha \bullet \cot \beta$
$\sin \alpha = \sinh a / \sinh c$
$\tan \alpha = \tanh a / \sinh b$

Formulaire pour l'angle de parallèlisme

$\tanh x = \cos \Pi(x)$
$\cosh x = \csc \Pi(x)$
$\sinh x = \cot \Pi(x)$
$\exp(-x) = \tan(\Pi(x)/2)$

2. Les aires dans la géométrie hyperbolique

Nous reviendrons sur les constructions plus loin. Pour aboutir à la quadrature du cercle il nous faut des connaissances sur les aires dans la géométrie hyperbolique. On peut démontrer les propriétés suivantes:
Si C(r) est le cercle de rayon r, son aire A(C(r)) est égale à

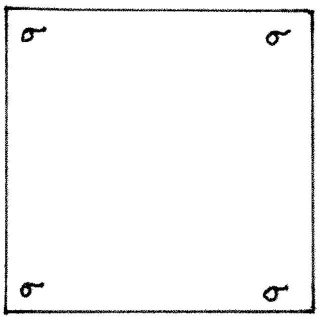
$$2\pi(\cosh r - 1) = 4\pi \sinh^2 r/2.$$

Si $T(\alpha,\beta,\gamma)$ est un triangle d'angles α, β et γ, dont la somme est inférieure à π, on définit l'aire du triangle $A(T(\alpha,\beta,\gamma))$ par

$$A(T(\alpha,\beta,\gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Parce qu'en géométrie hyperbolique tous les triangles ayant les mêmes angles sont congruents, on obtient ainsi la même aire pour ces triangles. La grandeur $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

est appelée le déficit; elle correspond à ce qu'on appelle l'excès dans la géométrie sphérique. La première propriété pour l'aire du cercle est démontrée d'une manière tout à fait analogue à celle de la géométrie euclidienne, c'est à dire par une exhaustion à l'aide des triangles. La deuxième formule est fondée soit sur l'équidécomposabilité (cf. Perron 1962, 90 - 93), soit sur une formule pour l'aire du triangle simplement asymptotique obtenue par une intégration (cf. Bolyai § 42).



Considérons un quadrilatère régulier dans la géométrie hyperbolique c'est à dire un quadrilatère avec quatre côtés et quatre angles congruents (plus petits qu'un droit bien entendu). Un tel quadrilatère est l'analogue d'un carré de la géométrie ordinaire. Par une diagonale on peut le décomposer en deux triangles congruents, comme d'habitude. Il s'ensuit la formule pour l'aire du quadrilatère régulier désigné ici par $Q(\sigma)$, où σ dénote l'angle:

$$A(Q(\sigma)) = 2\pi - 4\sigma.$$

Ce qui est intéressant ici, c'est le fait que la constante π intervient dans les formules pour l'aire du triangle et pour l'aire du quadrilatère régulier. Elle intervient comme la grandeur d'un angle et non pas comme la longueur d'un segment. De plus on comprend que l'aire d'un cercle n'est pas limitée supérieurement; elle peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut. Par contre les aires des triangles et celles des quadrilatères sont majorées (par π ou par 2π). Si nous parlons dans la suite d'une aire de cercle qui est à transformer dans une aire de quadrilatère régulier, il sera toujours supposé que cette aire est plus petite que 2π. Pour réaliser une aire plus grande il faut travailler avec des polygones réguliers. Pour l'aire du n-gone régulier $P_n(\sigma), (n > 2)$, avec l'angle σ on obtient la formule $A(P_n(\sigma)) = (n-2)\pi - n\sigma$.
Mais revenons à la comparaison des aires de cercles et des quadrilatères réguliers. Si nous avons un cercle d'aire π, c'est à dire un cercle avec un rayon r_0 tel que $\sinh^2 r_0/2 = 1/4$, on peut calculer facilement l'angle σ_0 d'un quadrilatère régulier de même aire: $2\pi - 4\sigma_0 = \pi$ ou $\sigma_0 = \pi/4$.
Même dans ce raisonnement heuristique que nous trouvons aussi chez Bolyai au début du paragraphe 43 nous voyons une différence décisive entre les systèmes S (la géométrie hyperbolique) et Σ (la géométrie euclidienne): si on veut construire dans la géométrie ordinaire un carré d'aire π, il faut construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$. C'est une difficulté insurmontable, ce qu'on sait depuis Lindemann (1882). Dans la géométrie

hyperbolique il faut construire par contre un angle de grandeur $\pi/4$, ce qui n'est pas du tout difficile. On peut réaliser un tel angle même avec les moyens de la géométrie absolue: on construit l'angle droit (par exemple en abaissant une perpendiculaire) et sa bissectrice. C'est tout!
Pour aller un peu plus loin il faut d'abord préciser ce que signifie quarrer un cercle.

3. Quelques remarques historiques sur la quadrature du cercle

D'un point de vue historique il faut préciser que nous allons utiliser l'idée moderne de ce qu'on appelle quadrature du cercle. Mais il nous semble utile de donner quelques informations historiques. Les débuts du problème de la quadrature du cercle remontent au 5e siècle av. J. C. mais le rôle de la règle et du compas n'est pas clair à cet époque là. On a découvert plusieurs solutions, par exemple celle de la courbe appelée quadratrice (cette idée revient à un certain Hippias qui vraisemblablement n'est pas le sophiste qu'on rencontre dans quelques dialogues de Platon) et les lunules d'Hippocrate. Mais on ne trouve jamais dans l'Antiquité une critique disant que la quadratrice ne fournit pas une quadrature du cercle parce qu'elle n'est pas constructible par la règle et le compas. Un des premiers qui a parlé explicitement des constructions à la règle et au compas en faisant des différences entre plusieurs sortes de constructions est Pappus (5e siècle ap. J. C.):
Les anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie: les uns sont appelés plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercle... (Livre III, début du § VII)
Les constructions solides se font par des coniques (ce sont des objets spatiaux pour Pappus); Pappus cite comme exemples pour des courbes de la troisième sorte *dont l'origine est plus variée et plus complexe* les spirales, les quadratrices (au pluriel!), les conchoïdes et les cissoïdes. Il est vrai qu'Euclide utilise souvent implicitement la règle et le compas (par les postulats I à III), mais il ne donne aucune information sur cette restriction. En particulier il montre dans les livres I et II qu'on peut transformer un polygone arbitraire en un parallélogramme de même aire à l'aide de la règle et du compas (I,45) et un parallélogramme (via un rectangle) en un carré (II,16). Proclus remarque que ce fait a amené les anciens à s'occuper de la quadrature du cercle par la règle et le compas. On peut y ajouter qu'on a eu assez tôt l'idée d'approcher le cercle par des polygones réguliers (Antiphon, Bryson; 4e siècle av. J. C.), une idée qui fournit la base de la démonstration euclidienne que deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres (XII,2). Si on peut quarrer tous ces polygones et si le cercle est dans un sens vague la limite des polygones pourquoi ne pas penser qu'il soit quarrable aussi? Ce qui est vrai pour les termes d'une suite est *vrai aussi pour sa limite*, était un principe (faux bien entendu) qu'on trouve souvent appliqué.
Même au 18e siècle le sens du terme *quadrature du cercle* n'était pas limité aux constructions à la règle et au compas. Dans son *Histoire de la quadrature du cercle* (1754) Montucla écrit:
Quarrer un cercle, n'est donc pas, comme l'imagine le vulgaire ignorant, faire un cercle quarré, ce qui est absurde; ... mais mesurer le cercle, le comparer à une figure

rectiligne, comme un quarré de son diamètre, & connoître son rapport précis avec ce quarré, ou enfin, parce que l'un dépend de l'autre, déterminer le rapport précis de la circonférence avec le diamètre. Lorsqu'on dit un rapport précis, on entend parler de cette exactitude qui est la vérité même; de cette exactitude avec laquelle le triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & même hauteur, & une parabole à ses deux tiers. (Montucla 1754, VIIf)

On comprend ici que pendant longtemps le problème de la quadrature du cercle n'était pas défini par les moyens avec lesquels on le voulait résoudre (c'est à dire avec la règle et le compas) mais par le but auquel on tendait. Ce but peut se formuler comme suit: démontrer que π est un rapport précis, c'est à dire un nombre rationnel. Cette idée fut réfutée par J. H. Lambert en 1766 (avec quelques lacunes relevées plus tard par A. M. Legendre) en démontrant que π est un nombre irrationnel. Par conséquent l'ancienne définition de la quadrature avait perdu sa raison d'être vers la fin du 18e siècle. D'autre part Gauß et Wantzel (voir plus loin) font des progrès considérables dans l'algébrisation des constructions à la règle et au compas. Leurs travaux réglèrent la solution des trois problèmes classiques (trisection de l'angle, duplication du cube, construction des polygones réguliers) entendus comme des problèmes de construction à la règle et au compas. Il n'est pas étonnant que la quadrature du cercle fut alors interprétée exclusivement comme un problème de construction, un problème qui fut résolu dans le sens négatif en 1882 par Lindemann en démontrant que π est transcendant donc non constructible comme longueur d'un segment dans la géométrie euclidienne.

4. La constructibilité dans la géométrie hyperbolique

Parce qu'en géométrie hyperbolique il n'y a plus de carré, la définition de la quadrature du cercle doit être modifiée.

1. Construire le cercle. Pour y arriver il suffit, par le postulat III d'Euclide (*D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.*) de disposer d'un segment constructible qui va servir comme rayon. Construire un cercle revient donc à construire un segment.
2. Construire un quadrilatère régulier ayant la même aire que le cercle. Pour y arriver il suffit comme nous le verrons ci-dessous (cf. 5.) de disposer d'un segment constructible ou d'un angle constructible.

Dans l'exemple du paragraphe 2. ci-dessus la constructibilité de l'angle σ_0 est claire, mais que peut-on dire du rayon r_0? Ce qui nous manque c'est une théorie de la constructibilité des segments et, dans des cas plus généraux que notre exemple, des angles aussi. Une telle théorie n'est pas explicitement formulée par Bolyai mais il donne quelques remarques intéressantes. Avant de donner ses idées je veux citer les résultats modernes (selon Jagy 1995) où $\boldsymbol{P}$ est le corps des nombres constructibles dans la géométrie euclidienne.

constructibilité

en Σ	**en S**
segment de longueur q	
q est constructible ↔ $q \in \boldsymbol{P}$	q est constructible ↔ $\sinh q \in \boldsymbol{P}$, $\cosh q \in \boldsymbol{P}$, $\tanh q \in \boldsymbol{P}$
angle de grandeur α	
α est constructible ↔ $\sin\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\cos\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\tan\alpha \in \boldsymbol{P}$	α est constructible ↔ $\sin\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\cos\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\tan\alpha \in \boldsymbol{P}$

P peut se caractériser comme le plus petit sous-corps de $\boldsymbol{R}$ qui est clos pour l'extraction des racines carrées: si $p \in \boldsymbol{P}$ alors $\sqrt{p} \in \boldsymbol{P}$. Evidemment $\boldsymbol{P}$ contient le corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels; il faut y ajouter toutes les combinaisons de racines et des opérations algébriques comme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $c\sqrt{a+\sqrt{b}}$ etc.[4)] Il semble que Descartes fut le premier à avoir une idée de ce corps en décrivant dans sa *Géométrie* (1637) la construction des segments comme représentants des sommes et des produits de nombres.
Le corps $\boldsymbol{P}$ est implicite dans les considérations de Gauß du chapitre VII des *Disquisitiones arithmeticae* (1801) sur la constructibilité des polygones réguliers. Il y démontrait le résultat suivant:
Pour que le polygone régulier à n arêtes soit constructible dans la géométrie euclidienne, il est nécessaire que n soit de la forme

$$2^s \times p_1 \times \ldots \times p_k$$

où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers de Fermat distincts. Un nombre de Fermat s'écrit 2^t+1 avec $t = 2^u$. Fermat avait en 1640 l'idée que tous les nombres de ce type sont premiers (il connaissait les exemples $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$), mais Euler a montré en 1747 que $F_5 = 4294967297$ est composé (un facteur en est 641). Jusqu'à nos jours on n'a trouvé aucun autre nombre de Fermat premier et on ne sait pas s'il y en a d'autres ou non.
Le chapitre VII des *Disquisitiones arithmeticae* déjà cité fournit la justification de l'annonce célèbre de Gauß (de 1796) que le 17gone est constructible; bien entendu Gauß lui-même n'en a jamais proposé une construction à la règle et au compas. La première construction du 17gone fut donnée en 1802 par Pfleiderer suivi en 1822 par Paucker qui a construit aussi le 257gone (cf. Gauß X,2, p. 36). Le 65537gone fut attaqué par le mathématicien Hermes, qui y a travaillé une dizaine d'années (cf. Hermes 1894). Si on s'intéresse aux questions de constructibilité on peut reformuler le résultat de Gauß de la manière suivante: un angle π/n (ou $2\pi/n$) est constructible si n est de la forme $2^s \times p_1 \times \ldots \times p_k$ avec les conventions données plus haut. Ce fait était connu de Bolyai (cf. la fin du § 43).[5)]
Le fait que la condition de Gauß est aussi suffisante fut démontré en 1837 par Pierre Laurent Wantzel dans son mémoire remarquable *Recherches sur les moyens de*

reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas dans lequel il montrait l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. On peut constater qu'après le mémoire de Wantzel le problème de la constructibilité dans la géométrie euclidienne fut algébrisé avec succès. Il est vrai qu'on utilise aujourd'hui le langage de la théorie de Galois pour formuler les idées de Gauß et de Wantzel avec plus d'élégance. Mais ca ne change pas le fait que Gauß et Wantzel ont fait les pas décisifs.

(à suivre...)

Notes

1) Il est un peu compliqué de dater la parution de cette traduction parce que le tome 5 des Mémoires de Bordeaux contient des textes des années 1867 à 1869.

2) L'idée de ces constructions est certainement implicite dans les postulats 1 à 3 du premier livre des *Eléments* d'Euclide. Mais l'Alexandrin n'en donne aucun commentaire. Pour le rôle de la règle et du compas dans l'Antiquité on peut consulter le livre de Knorr.
Dans le texte qui suit on désignera par un chiffre romain les livres des *Eléments* d'Euclide et par un chiffre arabe les numéros des propositions. Par exemple IV,11 est la onzième proposition du quatrième livre.

3) Les droites sont une notion fondamentale de la géométrie, souvent non définie si on accepte le point de vue moderne. Le cercle est facile à définir. Soient dans un plan le centre M et P un point différent de M. Le cercle de centre M et de rayon MP est l'ensemble des points Q du plan considéré tels que MQ égale MP. Evidemment la définition donnée du cercle est valable dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique.

4) Le corps ***P*** est caractérisé par Wantzel de la manière suivante:
... ainsi l'inconnue principale du problème [de construction] *s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour connaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici les cas où l'équation du problème est algébrique.* (Wantzel 1837, 366)
On comprend bien que la terminologie de l'algèbre moderne n'était pas disponible à cet époque-là; le terme *corps* revient à Dedekind (*X. Supplement* aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* par Dirichlet [1871]), Kronecker (1882) a parlé d'un *domaine de rationalité*.

5) En passant je veux noter que la traduction française par Houel n'est pas fidèle à l'originale dans le paragraphe 43: Bolyai parle d' une manière assez exagérée - qui était très typique - du *plus beau résultat des mathématiques contemporaines ou plutôt de tous les temps* ce qui n'est pas traduit par Hoüel.