A VOS STYLOS

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

(Pour le a) voir notre précédente édition). b) Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au double du nombre pris par l'autre joueur au coup précédent (cas de la "règle double"). Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

Solution, par A. Troesch.— La stratégie gagnante est la suivante :

- lorsque le nombre initial d'allumettes n'est pas un nombre de Fibonacci, le premier joueur prend le nombre d'allumettes correspondant au terme le plus petit du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes laissées par le deuxième joueur (ou du nombre initial d'allumettes lorsqu'il commence);
- lorsque le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci c'est le deuxième joueur qui peut adopter cette stratégie gagnante (même si ce n'est pas très équitable, il y a tout de même un minimum de justice!)

Nous allons d'abord énoncer et démontrer la proposition suivante :

Proposition (Zeckendorf).— *Tout entier n est la somme d'une suite strictement croissante de nombres de Fibonacci non consécutifs. Cette écriture est unique : nous l'appellerons le développement de Fibonacci de n.*

Preuve

Soit $(F_{n_0}, \ldots, F_{n_k})$ une suite strictement croissante de nombres de Fibonacci non consécutifs, et $n = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$. Pour $j < k$ on a $\sum_{i=0}^{j} F_{n_i} < F_{n_j+1}$ (récurrence sur j). Il en résulte que si $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est le développement de Fibonacci de n alors F_{n_j} est le plus grand nombre de Fibonacci inférieur à $n - \sum_{i=j+1}^{k} F_{n_i}$, d'où l'unicité du développement.
Démontrons maintenant l'existence du développement par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors $n = F_1$. Supposons que tout nombre strictement inférieur à n admet un développement de Fibonacci. Alors

$$n = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i} + F_p = \sum_{i=0}^{k+1} F_{n_i}$$

où F_p le plus grand nombre de Fibonacci inférieur à n, $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ le développement de $n - F_p$, et $n_{k+1} = p$. Pour montrer que c'est un développement de Fibonacci, il suffit de montrer que ce développement ne contient pas F_{p-1} : mais cela résulte de ce que, dans le cas contraire, $F_{p+1} = F_{p-1} + F_p$ serait inférieur à n, contrairement au choix fait pour F_p. $\square$

Remarques

1) $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est un développement de Fibonacci si et seulement si pour tout i compris entre 1 et k, $F_{n_i} > 2F_{n_{i-1}}$ (en effet $F_{n_i} = F_{n_i-1} + F_{n_i-2} > 2F_{n_i-2} \geq 2F_{n_{i-1}}$. Pour la réciproque il suffit de remarquer qu'un nombre de Fibonacci est toujours inférieur au double de son prédécesseur).
2) Si $r = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est un développement de Fibonacci et si $2p < F_{n_0}$ alors $r + p$ n'est pas un nombre de Fibonacci. En effet, si $\sum_{i=0}^{l} F_{n'_i}$ est le développement de Fibonacci de p, alors $2F_{n'_l} < F_{n_0}$ et ainsi $\sum_{i=0}^{l} F_{n_i} + \sum_{i=0}^{l} F_{n'_i}$ est le développement de Fibonacci de $r + p$: il comporte donc plus d'un terme.

Preuve de la stratégie dans le cas de la règle double

Il nous faut montrer que :

1) si le premier joueur peut suivre cette stratégie, le deuxième joueur ne peut la suivre et ne peut gagner.
2) le premier joueur peut toujours adopter cette stratégie à condition que le nombre initial d'allumettes ne soit pas un nombre de Fibonacci.

Montrons ces deux points :

1) D'après la remarque 1) le deuxième joueur ne peut jamais supprimer totalement le terme le plus petit du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes que lui laisse le premier joueur lorsque celui-ci adopte la stratégie gagnante : le deuxième joueur ne peut donc jamais conclure et gagner;
2) D'après la remarque 2), le deuxième joueur ne peut interdire au premier joueur, par un choix judicieux du nombre d'allumettes qu'il prendrait, de supprimer le terme le plus petit du developpement du nombre d'allumettes qu'il lui-laisse, sinon $F_{n_0} = (F_{n_0} - p) + p$ ne serait pas un nombre de Fibonacci (F_{n_0} est ici le plus petit terme du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes laissées par la premier joueur : prendre, dans la remarque 2), $r = F_{n_0} - p$).

Le seul cas où le premier joueur ne peut pas adopter la stratégie gagnante est le cas où le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci : il lui faudrait prendre la totalité du tas, ce qui est interdit. Il laisse ainsi au deuxième joueur la possibilité d'adopter la stratégie gagnante. $\square$

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras) :

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, …, S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n ?

(Notre menace de ranger ce problème aux oubliettes a réveillé plusieurs de nos lecteurs, qui ont donc pris la plume pour nous écrire. Qu'ils en soient ici remerciés.)

Solution partielle de Marguerite Ponchaux, de Lille :

"Il est évident que si l'on échange les entiers composant un triangle parfait par rapport à la médiane verticale on obtient un triangle parfait.

Le temps consacré à la recherche par tâtonnements de solutions peut être abrégé par la remarque suivante : à chaque entier d'une ligne autre que la première correspond, dans la ligne précédente, au moins un entier plus grand. Par conséquent, le plus grand entier utilisé dans un triangle parfait de n lignes, $p = \frac{n(n+1)}{2}$, doit appartenir à la première ligne.

Pour la même raison, l'entier $p-1$ doit être soit en première ligne, soit en deuxième ligne en-dessous et à côté de p, et alors $p-2$ doit également être en première ou en deuxième ligne (et non en troisième ligne car alors le nombre 1 figurerait deux fois dans le triangle).

Prenons l'exemple des triangles de $n = 3$ lignes, avec donc $p = 6$. Il y a deux cas de première ligne à examiner : $6xy$ et $x6y$ (le cas $xy6$ est symétrique du premier). En plaçant 5, on distingue pour $6xy$ les possibilités

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & 5 & & y \\ & 1 & & z & \end{array} \ \text{ou}\ \begin{array}{ccccc} 6 & & x & & 5 \\ & z & & u & \end{array} \ \text{ou}\ \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & y \\ & 5 & & z & \end{array}$$

et pour $x6y$ les possibilités

$$\begin{array}{ccccc} 5 & & 6 & & y \\ & 1 & & z & \end{array} \ \text{et}\ \begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & y \\ & 5 & & z & \end{array}.$$

Il s'agit à présent de placer 4 :

- la première ligne $65y$ ne donne aucune solution.
- la première ligne $6x5$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 6 & & 2 & & 5 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 1 & & \end{array}$
- la première ligne $61y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$
- la première ligne $56y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 5 & & 6 & & 2 \\ & 1 & & 4 & \\ & & 3 & & \end{array}$
- la première ligne $16y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array}$

On vérifie dans chaque cas qu'il n'y a pas d'autre solution. Par suite pour $n = 3$ il y a 4 solutions (plus évidemment les 4 symétriques).
Pour $n = 4$ on trouve également 4 solutions :

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & & 10 & & 3 & & 8 \\ & 1 & & 7 & & 5 & \\ & & 6 & & 2 & & \\ & & & 4 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 3 & & 9 \\ & 2 & & 7 & & 6 & \\ & & 5 & & 1 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 1 & & 6 \\ & 2 & & 9 & & 5 & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 6 & & 10 & & 1 & & 8 \\ & 4 & & 9 & & 7 & \\ & & 5 & & 2 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

Pour $n = 5$ on trouve une seule solution :

$$\begin{array}{ccccccccc} 13 & & 3 & & 15 & & 14 & & 6 \\ & 10 & & 12 & & 1 & & 8 & \\ & & 2 & & 11 & & 7 & & \\ & & & 9 & & 4 & & & \\ & & & & 5 & & & & \end{array}$$

Pour $n = 6$ mes essais me font douter qu'il existe des solutions. L'usage d'un ordinateur me paraît maintenant souhaitable." (fin de citation de la lettre de Marguerite Ponchaux).

Solution complémentaire, d'après une lettre de Jean Brette, Palais de la Découverte, Paris :

Cette solution, pour $1 \leq n \leq 7$, est parue dans la Revue du Palais de la Découverte, 60, 1978, pp. $54 - 57$:
par analogie avec un problème de triangles de différences modulo 2 posé par Hugo Steinhaus (dans *100 problèmes élémentaires de Mathématiques*, Gauthier-Villars,

Paris, 1965, p. 45), on calcule modulo 2 à partir d'une ligne initiale de longueur 6 constitué de 0 et de 1. Entre 1 et 21 il y a 11 nombres impairs et 10 nombres pairs, donc il faut trouver 11 fois 1 et 10 fois 0 dans le triangle. Or cela ne se produit jamais (parmi les 64 lignes initiales possibles, il suffit d'en tester 32, par symétrie), donc il n'existe aucune solution pour $n = 6$.
Cette méthode modulo 2 ne marche pas aussi simplement pour $n \geq 7$, car Steinhaus donne l'exemple du triangle de ligne initiale 0010100 qui possède quatorze 1 et quatorze 0. Mais le calcul modulo 2 permet néanmoins de diminuer fortement le nombre de tests à effectuer. On vérifie assez facilement sur ordinateur qu'il n'y a pas non plus de solution pour $n = 7$, ni pour $n = 8$.

Solution complète :

Elle a été trouvée indépendamment par une équipe de mathématiciens taïwanais en 1977 et par une équipe de mathématiciens australiens en 1992 (l'un d'eux, Douglas Rogers, avait eu connaissance du problème grâce à notre ami Kreweras). La preuve des Australiens que tout triangle parfait est de taille $n \leq 8$ (et donc en fait de taille $n \leq 5$, la liste communiquée par Marguerite Ponchaux est complète) n'est pas très difficile, astucieuse mais un peu longue à exposer. Il se trouve qu'elle vient d'être republiée dans la revue "Quadrature" ($n°25$, été 1996). Nous y renvoyons donc nos lecteurs intéressés.

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort) : Pour l'énoncé original, voir nos précédentes éditions. Nous allons reformuler cet énoncé de manière légèrement différente en donnant la solution.

Solution de R. Schäfke :
On considère le graphe suivant (p est un entier naturel fixé, ici $p = 4$) :

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
(0,4) & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ & (12,0)
\end{array}
$$

On définit $a_{k,l}$ comme le nombre des chemins sur le graphe allant du point $(0, p)$ au point (k, l) en suivant le sens des flèches (on suppose $k \geq 0$ et $0 \leq l \leq p$). Si (k, l) et $(k, l + 1)$ ne sont pas connectés, on a $a_{k,l} = a_{k-1,l}$, et si au contraire ils sont connectés on a $a_{k,l} = a_{k-1,l} + a_{k,l+1}$. La table des $a_{k,l}$ coincide donc (aux conventions près) avec celle de l'énoncé original. Voici la table des $a_{k,l}$ pour $p = 4$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 4 & \to & 5 & \to & 6 & \to & 7 & \to & 8 & \to & 9 & \to & 10 & \to & 11 & \to & 12 & \to & 13 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
1 & \to & 3 & \to & 6 & \to & 6 & \to & 11 & \to & 17 & \to & 24 & \to & 24 & \to & 33 & \to & 43 & \to & 54 & \to & 54 & \to & 67 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 15 & \to & 32 & \to & 32 & \to & 32 & \to & 65 & \to & 108 & \to & 108 & \to & 108 & \to & 175 \\
\downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 256
\end{array}$$

Le problème posé est de démontrer que

$$a_{mp,0} = (m+1)^p.$$

Définissons $b_{k,l}$ comme le nombre des chemins allant de (k,l) à $(mp,0)$. Voici la table des $b_{k,l}$, (toujours dans le cas où $p=4$ et $m=3$) qu'on construit de droite à gauche et de bas en haut à partir du point $(12,0)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
256 & \to & 192 & \to & 144 & \to & 108 & \to & 81 & \to & 54 & \to & 36 & \to & 24 & \to & 16 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
64 & \to & 48 & \to & 36 & \to & 27 & \to & 27 & \to & 18 & \to & 12 & \to & 8 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
16 & \to & 12 & \to & 9 & \to & 9 & \to & 9 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
4 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1
\end{array}$$

Par définition $a_{mp,0} = b_{0,p}$. Il suffit donc de montrer que

$$b_{kp,l} = (m-k+1)^l = K^l \quad (0 \le k \le m, \quad 0 \le l \le p, \quad K = m-k+1),$$

ce que nous allons faire par récurrence descendante sur k, ascendante sur K. Pour $k=m$, $K=1$, c'est clair. Supposons le résultat vrai pour un certain k et tout l tel que $0 \le l \le p$. Soit un entier i tel que $0 \le i \le l$. Il n'y a qu'un seul chemin de $(kp-p+i,i)$ à (kp,i) et tout chemin de $(kp-p+i,i)$ à $(mp,0)$ passe par (kp,i), donc on a :

$$b_{kp-p+i,i} = b_{kp,i} = K^i.$$

D'autre part, tout chemin de $(kp-p,l)$ à $(mp,0)$ passe par un et un seul des points $(kp-p+i,i)$ $(0 \le i \le l)$. Or le nombre de chemins de $(kp-p,l)$ à $(kp-p+i,i)$ est égal à $\binom{l}{i}$ (comme tous les points intermédiaires sont connectés, on a ici un triangle de Pascal). Par suite, le nombre de chemins de $((k-1)p,l)$ à $(mp,0)$ est

$$b_{(k-1)p,l} = \sum_{i=0}^{i=l} \binom{l}{i} K^i = (K+1)^l.$$

PROBLÈME 40

Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements? La solution est-elle unique? (Dans nos précédentes éditions, nous avons traité quelques exemples)

Indication.— M. Jean Brette nous écrit : "Une solution est donnée pour tout n (mais il n'est pas fait mention d'une étude d'unicité) dans E. Lucas, *Récréations mathématiques*, tome 3, p. 145-151, A. Blanchard, Paris, 1960."
Merci pour cette précieuse indication. Cet ouvrage se trouve à la bibliothèque de notre IREM. Lucas attribue le problème à Tait (*Philosophical magazine*, janvier 1884, et *Introductory address to the Edinburgh mathematical Society*, 9 novembre 1885), et donne effectivement une solution due à Delannoy. Cette solution consiste en un algorithme général, ou plus précisément en quatre algorithmes selon que n est congru à $0, 1, 2,$ ou 3 modulo 4.
Cependant on ne peut pas dire qu'on trouve dans cet ouvrage une preuve que ces algorithmes résolvent le problème, même si cela semble marcher. Qu'est-ce qu'une solution "rigoureuse" d'un tel problème? Quel formalisme convient-il d'adopter pour le poser et le résoudre de manière vraiment convaincante?
On peut raisonnablement conjecturer que la solution est unique et que l'ouvrage de Lucas donne effectivement cette solution unique, mais cela reste à établir.
Nos lecteurs intéressés pourront consulter l'ouvrage, ou à défaut nous demander de reproduire la solution de Delannoy. Ils pourront aussi, pourquoi pas, améliorer la manière de formuler le problème et sa solution.

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i \ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c \in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Indication : Pour notre précédente édition nous avions déjà reçu deux solutions complètes du problème, une de P. Renfer et une de M. Wambst. La formule à trouver est

$$S(n,p,k) = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p}.$$

En outre, M. Wambst propose une $q-$extension du résultat, avec des coefficients $q-$binomiaux. Son extension est différente de la généralisation que nous avait soumis l'auteur du problème, qui est plutôt de nature "planaire". Faute de place nous reportons tout cela à notre prochain numéro.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Montrer que les ensembles

$$X = \{[x], [2x], [3x], [4x], \ldots\} \text{ et } Y = \{[y], [2y], [3y], [4y], \ldots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?

Indication.— Nous avons déjà reçu des réponses (de P. Renfer, de R. Schäfke), mais aussi l'information que ce problème est déjà paru dans l'Ouvert il y a quelques années.

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \ldots m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.
Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3)\cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, $\cdots$ $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :
$m_1 = 12$, $m_2 = 1234$, $m_3 = 123456$, $\cdots$ $m_n = 1234\cdots(2n-1)(2n)$,
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 01$, $\mu_2 = 0112$, $\mu_3 = 011223$, $\cdots$ $\mu_n = 0112233\cdots(n-1)(n-1)n$.

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3.

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n. Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1}.

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n. Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2}.

3°) Montrer que $a_n = 2^n \alpha_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \ldots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.

Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdös de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.
Le couple (m, n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdös.

1) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 12)$ sont des couples d'Erdös.

2) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.