RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1996

Le 23$^{\text{ème}}$ Rallye Mathématique d'Alsace a réuni 1250 candidats. La participation est sensiblement égale à celle du 22$^{\text{ème}}$ Rallye. En Terminale, 20 binômes ont été primés. Le premier prix avec félicitations du jury, récompense une copie remarquable. En Première, 20 binômes ont également été récompensés. Aucune copie ne se voit attribuer de premier prix, aucun binôme n'ayant entièrement résolu deux exercices.

Rallye de Première

Exercice 1

On se donne trois réels a, b, et c compris entre 0 et 1. Montrer l'inégalité :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

Solution

Nous avons $a \in [0;1]$ et $b,c \geq 0$ donc $abc \leq bc$ et $0 < 1+abc \leq 1+bc$

donc $\dfrac{1}{1+bc} \leq \dfrac{1}{1+abc}$ et $\dfrac{a}{1+bc} \leq \dfrac{a}{1+abc}$

et de même nous aurons: $\dfrac{b}{1+ac} \leq \dfrac{b}{1+abc}$ et $\dfrac{c}{1+ab} \leq \dfrac{c}{1+abc}$.

et finalement : $\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{c}{1+ab} \leq \dfrac{a+b+c}{1+abc}$

Il suffit donc de prouver que : $(a+b+c) \leq 2(1+abc)$

c'est à dire: $a(1-2bc)+b+c-2 \leq 0$ $(*)$

Considérons la fonction $a \mapsto a(1-2bc)+b+c-2$ sur $[0,1]$;

elle est affine donc monotone sur $[0,1]$ et atteint son maximum en 0 ou en 1.

Pour prouver $(*)$ il suffit de le prouver pour $a=0$ et $a=1$, c'est à dire:

$$b+c-2 \leq 0 \text{ et } -1+b+c-2bc \leq 0$$

Comme b et c sont dans $[0,1]$, il est évident que $b+c-2 \leq 0$
donc il reste seulement à prouver que $-1+b+c-2bc \leq 0$
c'est à dire $b(1-2c)-1+c \leq 0$ (**)

Le même raisonnement que le précédent avec $b \mapsto b(1-2c)-1+c$ (fonction affine monotone) assure qu'il suffit de prouver (**) pour $b=0$ et pour $b=1$, c'est à dire :

$$-1+c \leq 0 \text{ et } -c \leq 0$$

Ce qui est évident car c est dans $[0,1]$ et ceci prouve le résultat.

Commentaires

L'examen des copies permet de penser que cet exercice a été ressenti comme étant le plus difficile par nos élèves. Aucun binôme n'a présenté une solution satisfaisante du problème posé. Abordé par environ trois quarts des candidats, il est révélateur d'un certain nombre d'idées fausses.

1) Les erreurs "techniques" de manipulations des inégalités (multiplication par un réel négatif, différences, quotients ...) ont été nombreuses.

2) Beaucoup de copies envisagent des cas particuliers (souvent les valeurs 0 ou 1) ; cette démarche constitue une première approche qui permet de se familiariser avec l'énoncé. Trop nombreux sont les candidats qui se contentent de ces essais et concluent que l'inégalité vérifiée pour des valeurs particulières, l'est pour tous les réels a, b, c de l'intervalle $[0,1]$.

3) Signalons une autre erreur fréquente concernant la "monotonie" des quantités utilisées, amenant bon nombre de candidats à considérer seulement le cas a=b=c=1, à montrer que la somme est inférieure à 3/2 et à conclure qu'elle est inférieure à 2 ; mais alors, un peu de sens critique aurait dû amener les auteurs de cette réponse à se demander pourquoi on avait dans le sujet remplacé 3/2 par 2. Les connaissances des élèves de première sur l'étude des fonctions d'une variable réelle dépassent le cadre des fonctions strictement croissantes sur un intervalle. Auraient-ils pensé avec la même assurance que toute fonction définie sur $[0,1]$ atteint son maximum en 1 ?

La difficulté de l'exercice résidait dans la présence des trois variables a, b et c ; nombreux sont les candidats ne se décidant pas à en privilégier une, afin de se ramener à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable par des moyens classiques.

Notons enfin que la solution proposée ne fait appel qu'à des fonctions affines.

Exercice 2

Danielle et Anne cultivent chacune leur jardin rectangulaire. Celui de Danielle a la plus grande longueur et la plus grande surface. Qu'en est-il du périmètre ?
Si Danielle avait celui de plus grande longueur et de plus grand périmètre, serait-elle sûre d'avoir celui de plus grande surface ?

Solution

Nous adopterons dans ce qui suit la convention selon laquelle la longueur est supérieure (ou égale) à la largeur ainsi que les notations suivantes:

L_d: longueur du jardin de Danielle.	L_a: longueur du jardin de Anne
l_d: largeur du jardin de Danielle	l_a: largeur du jardin de Anne
A_d: aire du jardin de Danielle.	A_a: aire du jardin de Anne
P_d: périmètre du jardin de Danielle.	P_a: périmètre du jardin de Anne

(Par convention $l_d < L_d$ et $l_a < L_a$)

Première question :

Avec ces notations on a : $L_d > L_a$ et $L_d l_d > L_a l_a$

Nous allons démontrer que le jardin de Danielle a le plus grand périmètre.

$$2(L_d + l_d) > 2(L_a + l_a) \quad \Leftrightarrow \quad L_d - L_a > l_a - l_d$$

Cas $l_a > l_d$

Soit $x = L_d - L_a$ et $y = l_a - l_d$ alors $L_d = L_a + x$ et $l_a = l_d + y$

On peut donc écrire :

$$L_d \times l_d = (L_a + x)l_d = L_a l_d + x l_d$$
$$L_a \times l_a = L_a(l_d + y) = L_a l_d + y L_a$$

Si on avait $x \le y$, on aurait alors $x l_d \le y L_a$ (puisque $x \le y$ et $l_d < l_a < L_a$).

Par conséquent, on aurait une contradiction avec $L_d l_d > L_a l_a$

Cas $l_a \le l_d$

On aura forcément $2(L_d + l_d) \ge 2(L_a + l_a)$

Deuxième question

Il suffit de prendre des contre-exemples .

En prenant $L_d = 9$ et $l_d = 1$ on a $P_d = 20$ et $A_d = 9$ et

en prenant $L_a = 5$ et $l_a = 4$ on a $P_a = 18$ et $A_a = 20$.

Donc le terrain avec la plus grande longueur et le plus grand périmètre n'a pas forcément la plus grande aire . La réciproque est donc fausse .

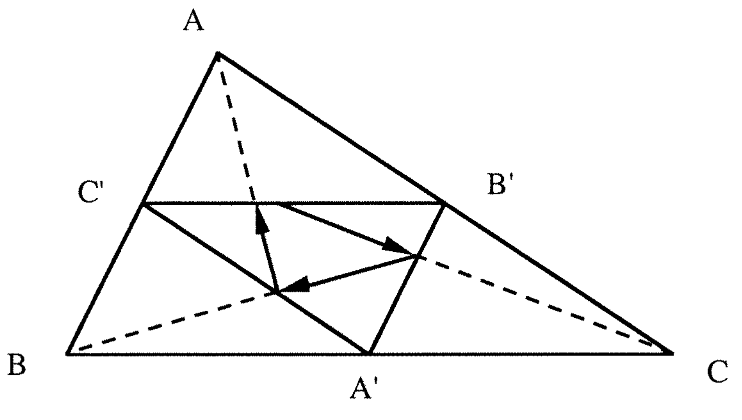
Commentaires

Les erreurs rencontrées dans cet exercice sont, pour ce qui est de l'aspect calculatoire les mêmes que celles du premier (inégalités).
L'aspect géométrique et concret du problème a visiblement permis d'éviter ici l'écueil de l'accumulation de cas particuliers sans grand intérêt.
Les copies permettent de constater l'acquisition de certains mécanismes. Le principe de disjonction des cas semble naturel pour bon nombre d'élèves, même si parfois les cas sensibles sont mentionnés mais laissés de côté.
La question concernant la réciproque suggérait une réponse négative. De très nombreux candidats fournissent un contre-exemple pour infirmer cette réciproque. Réjouissons nous de cette démarche.
Nous relevons également une proposition originale de solution utilisant une méthode graphique.

Exercice 3

Le professeur Spidermath a découvert que l'espèce d'araignée "Araneida Dreiecka" tisse sa toile de la manière suivante :
-elle place 3 fils formant un triangle noté A B C
-elle relie par 3 autres fils les milieux des côtés de ce triangle, formant un deuxième triangle noté A'B'C' (voir figure) ;
-elle part du fil B'C' et se dirige vers C jusqu'à rencontrer le fil A'B' ; là, elle change brusquement de direction et se dirige vers B en allant jusqu'au fil C'A' où elle change encore de direction se dirigeant désormais vers A jusqu'au fil B'C'.

Peut-elle retomber sur son point de départ ?



Solution

Cet exercice se résout en prenant un repère et en cherchant les différentes équations de droites. On peut par exemple prendre le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et on aura alors:

(B'C'): $x+y = \frac{1}{2}$ (A'C'): $x = \frac{1}{2}$ (A'B'): $y = \frac{1}{2}$

On appelle I, J, K, L les différents points de départ ou de changement de direction de l'araignée. On sait que le point de départ I est sur (B'C') donc ses coordonnées sont de la forme $(\alpha;\frac{1}{2}-\alpha)$ avec $\alpha \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

- On cherche l'équation de la droite (IC) et on obtient :

 (IC): $(1+2\alpha)x + 2\alpha y = 2\alpha$

On détermine les coordonnées du point d'intersection de (IC) et de (A'B') en résolvant le système et on obtient $J\left(\frac{\alpha}{1+2\alpha}; \frac{1}{2}\right)$

En suivant la même méthode on obtient $K\left(\frac{1}{2}; \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\right)$.

Puis on obtient $L\left(\frac{\alpha+1}{4\alpha+3}; \frac{2\alpha+1}{8\alpha+6}\right)$.

- Pour que I = L il faut et il suffit que $\alpha = \frac{\alpha+1}{4\alpha+3}$ (l'égalité des abscisses entraînera celle des ordonnées puisque les deux points sont sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - x$)

$$\alpha = \frac{\alpha+1}{4\alpha+3} \Leftrightarrow 4\alpha^2+2\alpha-1=0$$

(dont les racines sont $\alpha' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\alpha'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$)

Donc, il y a une seule possibilité $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $y = \frac{1}{2} - x = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$

Conclusion : Un seul point convient; c'est le point $I\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

En fait on a $\overrightarrow{C'I}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4};\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ et $\overrightarrow{C'B'}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{C'I} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{C'B'}$

<u>Extension possible</u> (pour les élèves de terminale)

Appelons u_0 l'abscisse du point de départ de l'araignée et u_n l'abscisse du point où l'araignée se retrouve sur $[B'C']$ après n tours . On aura alors $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x+1}{4x+3}$.

On peut alors étudier la convergence de la suite (u_n) en montrant que l'équation f(x) = x a une seule solution α sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{2}$ à l'aide éventuellement de l'inégalité des accroissements finis. On peut alors conclure que quelque soit le point de départ, la trajectoire se rapproche de celle recherchée dans l'exercice.

Commentaires

Les idées de méthode pour résoudre cet exercice, abordé dans environ deux copies sur trois, font appel soit à un processus d'itération, soit à un raisonnement de géométrie affine.
Dans le premier cas, qui est aussi le plus fréquent dans les copies, partant d'un intervalle ou d'un point particulier dont on détermine graphiquement les images successives, on a l'impression d'aboutir à un point limite. Cependant, la maîtrise des connaissances d'un élève de Première sur les suites lui permet difficilement de prouver cette conjecture. Cette démonstration est proposée dans le corrigé.
Dans le second cas, rencontré bien plus rarement dans les copies, il suffit d'écrire des équations de droites dans un repère non orthonormé et de chercher certaines de leurs intersections. Seuls trois binômes mènent ce raisonnement correctement mais un seul écrit la conclusion exactement. De petites erreurs de calcul empêchent les deux autres d'obtenir la bonne réponse.
Le raisonnement de géométrie analytique se fait ici de manière "naturelle" dans un repère non orthonormé. Vraisemblablement, ce type de repère est peu exploité en classes de seconde et de première. Cela explique certainement que peu de candidats aient opté pour la méthode analytique.

Rallye de Terminale

Exercice 1

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}.

Solution

<u>Première étape :</u> On écrit $97^{1996} = (100-3)^{1996}$ et on applique la formule du binôme :

$$\begin{aligned}97^{1996} = (100-3)^{1996} &= \sum_{p=0}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p} (-3)^{1996-p} \\ &= (-3)^{1996} + \sum_{p=1}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p} (-3)^{1996-p} \\ &= 3^{1996} + 100 \sum_{p=1}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p-1} (-3)^{1996-p}\end{aligned}$$

Or $100\sum_{p=1}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p-1}(-3)^{1996-p}$ est un multiple de 100, donc les deux derniers chiffres de 97^{1996} sont les mêmes que ceux de 3^{1996}.

Deuxième étape : On peut utiliser une deuxième fois la formule du binôme en écrivant :

$$\begin{aligned} 3^{1996} &= 9^{998} = (10-1)^{998} \\ &= (-1)^{998} + 998\times(-1)^{997}\times 10 + \sum_{p=2}^{998} C_{998}^{p}(-1)^{998-p}10^{p} \\ &= 1-9980+100\times a \\ &= 1+20-10000+100\times a \\ &= 21+100(a-100) \end{aligned}$$

On en conclut que le nombre se termine par 21 .

Commentaires

Le premier exercice était un problème d'arithmétique "élémentaire". Il a été très souvent abordé dans les copies , ce qui montre un intérêt pour un domaine quasiment disparu des programmes de nos classes. Nous relevons avec plaisir le nombre important de binômes parvenant au résultat correct, 21.

Cependant l'examen des copies appelle quelques commentaires supplémentaires. Nous observons un grand nombre de constatations (utilisation de la calculatrice ?) de la périodicité des deux derniers chiffres de 97^n sans véritable démonstration.

Signalons également (le problème est lié au précédent), qu'il était nécessaire de prouver que dans une multiplication, seuls les deux derniers chiffres de chaque terme influent sur ceux du produit. Cela a très rarement été démontré.

Ce résultat, vraisemblablement apparu comme naturel à bon nombre de candidats, nous amène à nous interroger sur leur réaction face à un quotient. La situation n'est plus la même, comme le montre l'exemple suivant : $5220 : 45 = 116$

$19620 : 45 = 436$

Exercice 2

On fixe deux réels strictement positifs a et b . Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?

Solution

1) Comparaison de x^x et x pour $x > 0$

• Si $x = 1$ alors $x^x = x$

• Si $x \in]0,1[$ alors $\ln x < 0$ et $x - 1 < 0$ donc $(x - 1) \ln x > 0$

• Si $x \in]1,+\infty[$ alors $\ln x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $(x - 1) \ln x > 0$

Dans ces deux cas on a $(x - 1) \ln x > 0$ c'est à dire $x \ln x > \ln x$ donc $x^x > x$ (car l'exponentielle est croissante).

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $x^x \geq x$ avec inégalité stricte si $x \neq 1$.

2) Si $a \in]0,2]$ et $b \in]0,2]$ alors $ab \leq 2a$ et $ab \leq 2b$.
Vu la symétrie des écritures on peut poser $a \leq b$.

Si a est plus petit que b on aura $ab \leq 2a \leq a + b$, or, d'après 1) on aura

$$a^a + b^b > a + b \text{ si } a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1$$

donc

$$a^a + b^b > ab \text{ si } a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1$$

Pour $a = 1$ et $b = 1$ on a $a^a + b^b = 2$ et $ab = 1$, l'inégalité stricte est donc vérifiée.

3) Si $a \in]0,2]$ et $b \in]2,+\infty[$ alors $ab \leq 2b \leq b^2 \leq b^b < a^a + b^b$
(On fait de même si $a \in]2,+\infty[$ et $b \in]0,2]$)

4) Si $a \in]2,+\infty[$ et $b \in]2,+\infty[$ avec $a \leq b$ alors $ab \leq b^2 \leq b^b < a^a + b^b$

Commentaires

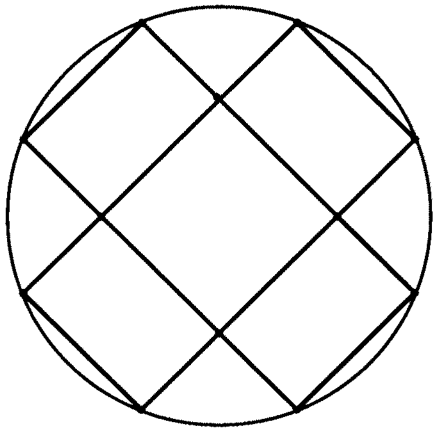
Ce problème a été traité par environ deux tiers des binômes, malheureusement avec peu de succès (moins de 10% ont fourni plus qu'un début de réponse acceptable). Nous remarquons, comme dans les copies de Première, et avec presque la même fréquence, la persistance de deux mythes primitifs :
- celui de la monotonie de toute fonction
- celui de la possibilité de soustraire ou diviser les égalités membre à membre.

Eh oui, il faut se faire une raison, ils sont faux (Ces croyances font partie des intuitions premières de certains sur les fonctions et les égalités. Leur expérience en Mathématiques aurait du leur fournir des connaissances plus précises et un langage plus adapté).
Mais à la différence des copies de Première, ces erreurs sont souvent "dissimulées" dans des argumentations qui invoquent les propriétés des limites des fonctions aux extrémités de l'intervalle d'étude.
Contrairement au deuxième problème de Première, la disjonction des cas a donné lieu à de nombreuses erreurs et on a vu des copies où les différents cas se recoupaient et/ou excluaient une

partie du domaine d'étude. Certains sont allés (peut-être est-ce de l'enthousiasme) jusqu'à envisager des cas où a ou b sont négatifs , pour lesquels le problème n'a pas de sens.
Parmi les solutions acceptables, on a relevé quelques démonstrations élégantes et originales.

Exercice 3

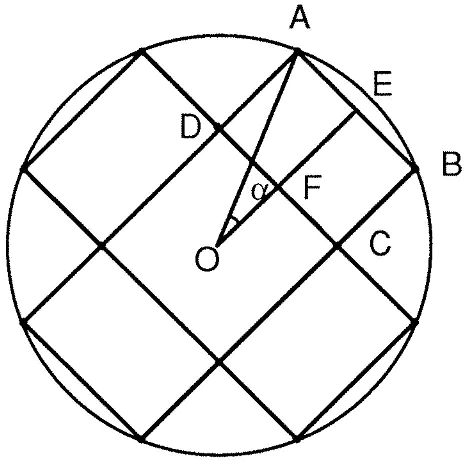
On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R. Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.
On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?



Solution

Pour résoudre cet exercice, il fallait calculer l'aire d'un set de table en fonction d'un paramètre. On pouvait prendre l'une des dimensions d'un set, ou encore le rayon du cercle inscrit dans le carré central, comme on le verra dans la deuxième méthode. Mais le paramètre donnant les résultats les plus simples était l'angle appelé α sur la figure et qui est la moitié de l'angle au centre interceptant le côté du set qui est une corde. C'est ce qui fera l'objet de la première méthode.

<u>Première méthode :</u>



L'angle α varie entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

En appelant a et b les dimensions d'un set de table, on obtient alors :

$a = 2\ AE = 2\ R \sin \alpha$ et $b = EF = EO - DF = R \cos \alpha - R \sin \alpha$

(en effet OF = DF = moitié du côté du carré central)

L'aire vaut alors $ab = 2\ R^2 (\cos \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha)$.

Posons alors $f(x) = \cos x \sin x - \sin^2 x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

On dispose de deux méthodes pour chercher les valeurs de $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ qui rendent f(x) maximale.

1) <u>Transformer f(x)</u>

On a alors $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{\sin(2x)+\cos(2x)-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x) - 1\right)$

et f(x) sera maximale lorsque le cosinus sera maximal, c'est à dire lorsqu'il vaudra 1.

La valeur $x = \frac{\pi}{8}$ est la seule valeur de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ qui convienne.

2) <u>Calculer la dérivée de f</u>

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \cos 2x - \sin 2x$

Or pour $X \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\cos X \geq \sin X$ et pour $X \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos X \leq \sin X$.

On en déduit que f '(x) est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ et f '(x) est négatif sur $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$

<u>Conclusion</u> : f admet un maximum pour $x = \frac{\pi}{8}$.

Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:

On a : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

donc $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

car $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ sont positifs .

<u>Conclusion finale :</u> Les dimensions des sets doivent être :

$a = \sqrt{2-\sqrt{2}}R$ et $b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$.

<u>Remarque</u> : Les calculs se généralisent ainsi facilement pour n sets de tables et on obtient :

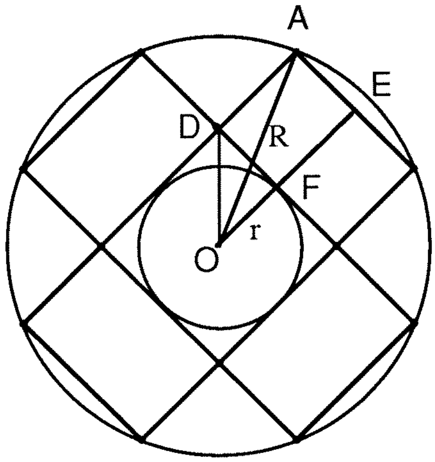
$a = 2R\sin\alpha$ $b = R\cos\alpha - \frac{R\sin\alpha}{\tan\frac{\pi}{n}}$ et l'aire sera maximale lorsque $2\alpha = \frac{\pi}{n}$

Les côtés a seront obtenus en construisant le polygone régulier à 2n côtés inscrit dans le cercle et en ne gardant qu'un côté sur deux .

On aura alors $a = 2R\sin\frac{\pi}{2n}$ et $b = \frac{R}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$ et l'aire d'un set vaudra $R^2\tan\frac{\pi}{2n}$.

L'aire totale des sets de table vaudra alors : $nR^2\tan\frac{\pi}{2n}$ et la limite lorsque n tend vers l'infini de cette aire vaut $R^2\frac{\pi}{2}$ soit la moitié de l'aire de la table .

<u>Deuxième méthode :</u>



Notons r le rayon du cercle inscrit dans le carré central.

Les dimensions a et b d'un set s'écrivent alors :

$a = 2\,r\tan\frac{\pi}{4} = 2\,r$ en raisonnant dans le triangle OFD et $b = \sqrt{R^2 - r^2} - r$ en écrivant b = OE - r et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle OEA.

Les cas limites sont ceux où a = 0 et b = R, on a alors r = 0, et $a = R\sqrt{2}$ et b = 0, on a alors $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc r décrit $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et l'aire d'un set est donnée par $ab = 2\,r\left(\sqrt{R^2 - r^2} - r\right)$.

On pose $f(r) = 2\,r\left(\sqrt{R^2 - r^2} - r\right)$ et on cherche r tel que f(r) soit maximale. Pour cela on étudie les variations de f sur $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$$f'(r) = 2\left(\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} - 2r\right)$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 2r^2 = 2r\sqrt{R^2 - r^2}$$

Les deux membres de cette égalité sont positifs car $r \in \left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ d'où :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow R^4 - 4r^2R^2 + 4r^4 = 4r^2R^2 - 4r^4$$

$$\Leftrightarrow 8r^4 - 8R^2r^2 + R^4 = 0$$

On résout cette équation bicarrée en r^2 : son discriminant vaut $32\ R^4$, d'où :

$$r^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}R^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2$$

Comme r est positif on obtient :

$$r = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}R \quad \text{ou} \quad r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$$

Or, comme $r \in \left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ seule la solution $r_0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$ convient.

La fonction f admet un seul extremum sur l'intervalle $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, elle est positive (c'est une aire), et s'annule pour $r = 0$ et pour $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cet extremum est donc un maximum.

Conclusion : Les dimensions des sets doivent être :

$$a = \sqrt{2-\sqrt{2}}R \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R\ .$$

Commentaires

Cet exercice a souvent été abordé par les candidats. Environ deux tiers d'entre eux ont essayé de le résoudre, mais seulement 10% des élèves ont présenté un début de solution correcte. Le choix du paramètre a été déterminant, car dans de nombreux cas un mauvais choix donnait des calculs très compliqués. Des solutions entièrement correctes ont été données par une dizaine de binômes.