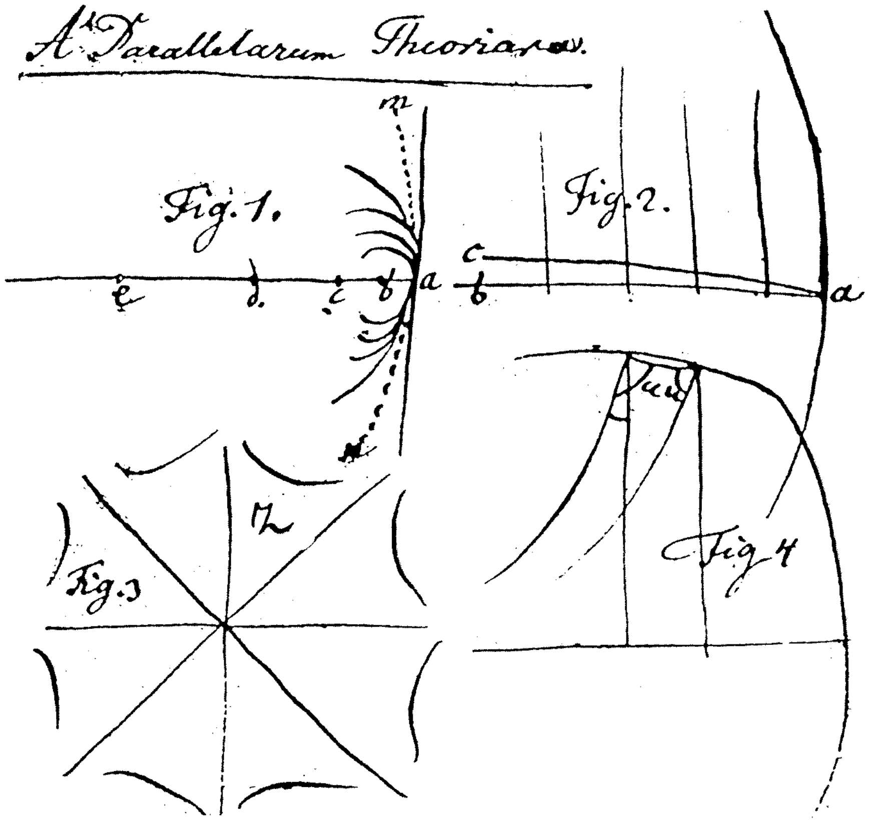
ET POURTANT QUELQUES-UNS SONT QUARRABLES
LA QUADRATURE DU CERCLE DANS LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

par Klaus Volkert, professeur à Heidelberg

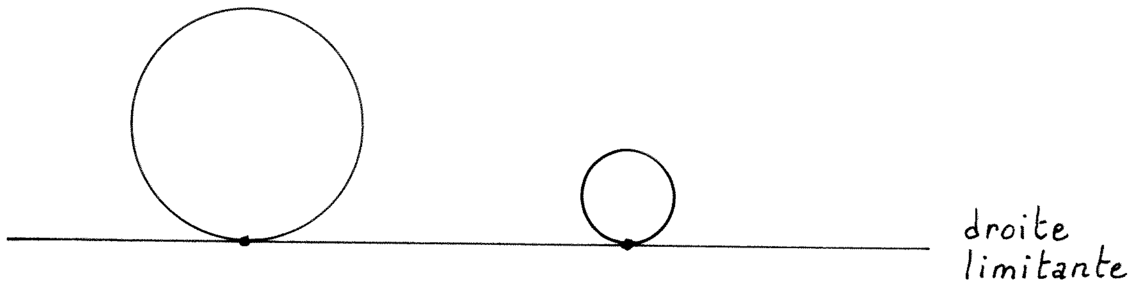
2nde PARTIE

5. Retour à la géométrie hyperbolique

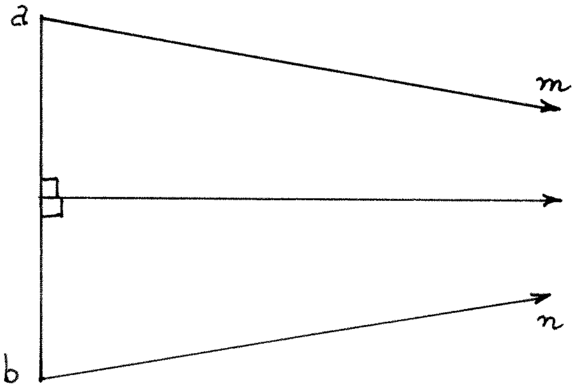
Pour arriver à une caractérisation de la constructibilité dans la géométrie hyperbolique, Bolyai se sert d'une espèce de courbes appelées aujourd'hui cercles-limites (ou horicycles). Bolyai lui-même parle des lignes L. On sait par des esquisses publiées par Stäckel que Bolyai avait l'idée de ces lignes assez tôt.



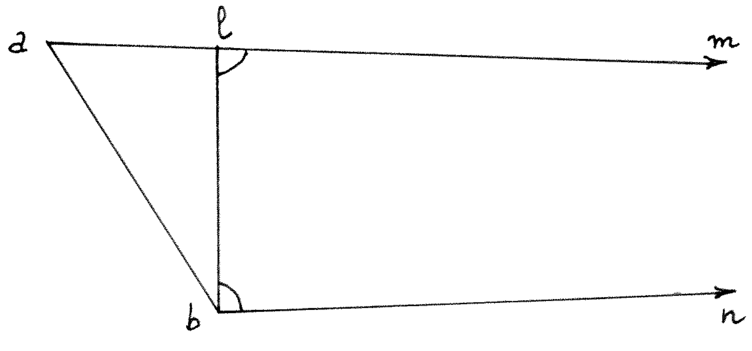
On peut décrire les cercles-limites comme des cercles hyperboliques à rayon infini. Le modèle de Poincaré en fournit une idée intuitive. Dans celui-ci les cercles-limites sont des cercles euclidiens du plan hyperbolique qui touchent la droite limitante du plan. Donc le point de contact n'est pas un point du modèle, il se trouve à l'infini. Ce point est appelé le centre du cercle-limite ; tous les segments qui joignent un point du cercle-limite, autre que le centre, avec ce centre sont appelés des rayons (ou des diamètres). Evidemment leur longueur est infinie.



Bolyai donne des cercles-limites une autre définition pour laquelle il faut considérer la situation suivante (§ 5) :



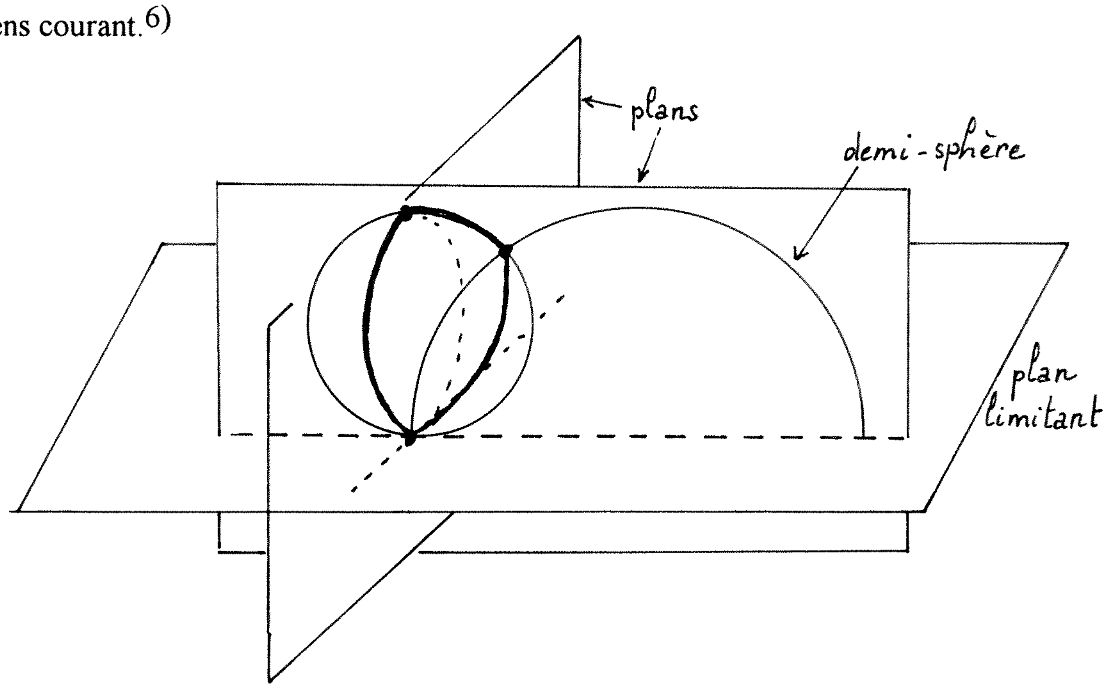
Soit am parallèle à bn et ∠ bam = ∠ abn. Si on a deux parallèles am et bn il démontre dans le paragraphe cité qu'on peut toujours trouver un point f sur am tel que ∠ bfm = ∠ fbn



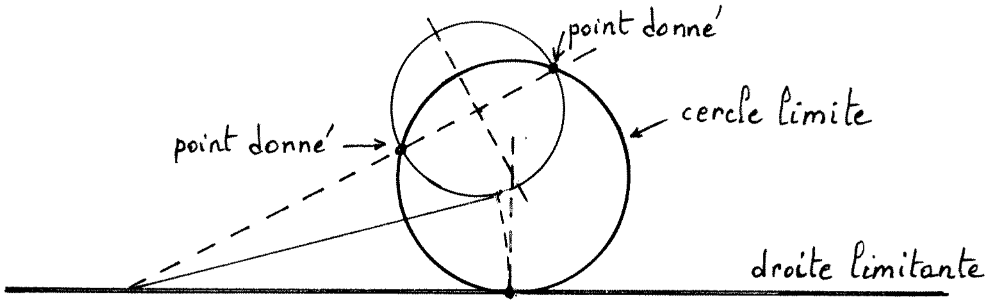
Par conséquent, étant donnés un point a et une demi-droite am , on peut considérer l'ensemble des points b tels qu'on ait ∠ bam = ∠ abn. Cet ensemble est le cercle-limite passant par a et de rayon am (§ 11). Si on quitte le plan on obtient ainsi une surface appelée sphère-limite (ou horisphère ; Bolyai utilise le nom de surface F). On peut faire de la géométrie sur une sphère-limite : les points de cette géométrie sont les points de la sphère-limite et les droites sont les cercles-limites sur la sphère-limite. Il faut noter que ces cercles-limites proviennent de l'intersection de la sphère-limite et d'un plan hyperbolique. Ainsi peut-on également introduire la notion d'angle dans cette nouvelle géométrie : l'angle entre deux cercles-limites est l'angle entre les deux plans hyperboliques correspondants. En somme l'analogie avec la géométrie sphérique est assez proche. Cependant il y a une différence stupéfiante : la géométrie sur une sphère-limite est euclidienne! Ce fait connu de Gauß et de Lobatchevsky est démontré par Bolyai en calculant la somme des angles internes des triangles sur la sphère-limite (§ 21). Il en conclut : *Il résulte de là que l'axiome XI et toutes les conséquences que l'on en déduit en géométrie et en trigonométrie (plane) sont vraies d'une manière absolue dans F, les lignes L jouant le rôle de lignes droites.* C'est la première fois dans l'histoire de la géométrie qu'on rencontre un modèle qu'on peut nommer non-standard pour la géométrie euclidienne.

Parce que la géométrie d'une sphère-limite est euclidienne on peut y exécuter des constructions à la règle et au compas. Bien entendu ce sont des constructions tout à fait théorique, mais cela ne posait pas de difficultés à Bolyai comme nous l'avons déjà vu.

Si on travaille dans le modèle de Poincaré tridimensionel la géométrie sur une sphère-limite peut s'étudier un peu plus concrètement. Les sphères-limites sont ici des sphères tangentes au plan limitant. Les cercles-limites sur une sphère-limite sont les intersections des plans hyperboliques passant par le point de contact de la sphère-limite avec le plan limitant et la sphère-limite elle-même. Les plans sont des plans ordinaires orthogonaux au plan limitant ou des demi-sphères ayant leurs centres dans ce plan. Si on veut analyser les angles d'un triangle composé d'arcs de cercle-limite on est renvoyé à des angles entre des plans ordinaires. C'est dû au fait que les angles entre des demi-sphères sont définis de cette manière. Ainsi est-on, au moins en principe, revenu à des considérations bien connues de la géométrie sphérique. Si on prend par exemple deux plans ordinaires passant par le point de contact , orthogonaux au plan limitant et coupant la sphère-limite, plus une demi-sphère passant par le point de contact et ayant son centre dans le plan limitant, on obtient un triangle sur la sphère-limite qui est composé de deux grands cercles plus un petit cercle. Notez que ce triangle n'est pas un triangle sphérique dans le sens courant.[6)]

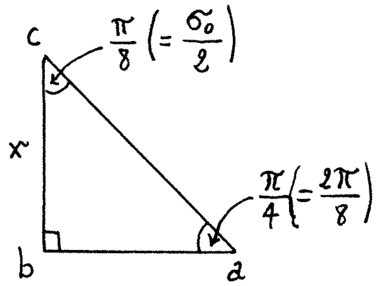


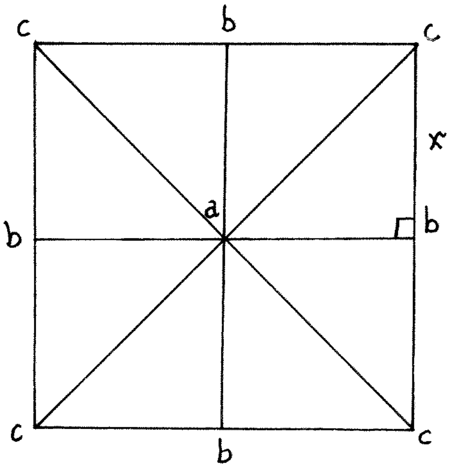
Mais revenons à nos constructions hyperboliques. Le problème de la constructibilité des segments est réduit par Bolyai à celui de la constructibilité des arcs de cercle-limite. Il n'est pas difficile de comprendre que si on se donne deux points du plan hyperbolique et une demi-droite il n'existe qu'un cercle-limite qui passe par les points donnés et admet la demi-droite donnée comme rayon.



Dans le modèle de Poincaré cet énoncé revient au simple fait que deux points plus une tangente fixent un cercle.
Mais les deux points du plan hyperbolique fixent aussi d'une manière univoque un segment. Ce segment peut être considéré comme la corde d'un cercle-limite passant par ses deux extrémités. Donc on peut considérer le segment comme construit si on peut construire l'arc du cercle-limite correspondant! Or la constructibilité de ce dernier est un problème de la géométrie euclidienne.[7)]
Par un passage à la limite Bolyai obtient dans le paragraphe 30 le résultat suivant: si r désigne la longueur d'un segment hyperbolique, la longueur de l'arc de cercle-limite correspondant sera égale à $2\sinh(r/2)$ (en notation moderne; Bolyai lui-même n'utilise jamais des fonctions hyperboliques). Puisque dans le contexte des constructions on peut toujours remplacer r/2 par r (et vice versa), on peut énoncer:
un segment hyperbolique de longueur r est constructible si un segment euclidien de longueur $2\sinh r$ est constructible en géométrie euclidienne.
(D'ailleurs on pourrait aussi citer l'identité $\sinh(2r) = 2(\sinh r)(\cosh r)$ en lien avec le paragraphe 4, pour justifier ce résultat .)
Il s'ensuit qu' étant donné un segment hyperbolique de longueur r on ne peut pas construire, en général, le segment de longueur r/3 en géométrie hyperbolique parce que, pour $\sinh r \in \boldsymbol{P}$, on a $\sinh r/3 \in \boldsymbol{P}$.[8)] Donc la constructibilité des segments diffère considérablement dans les deux géométries! De plus nous pouvons constater que le cercle de rayon $\sinh^2(r_0/2) = 1/4$, que nous avons utilisé dans notre tentative de quadrature, est constructible, parce que 1/4 est certainement un élément du corps $\boldsymbol{P}$. Par conséquent nous avons déjà quarré un cercle dans la géométrie hyperbolique. Pour aller un peu plus loin il faut dire quelques mots sur la construction des angles.
Nous ne trouvons pas d'informations explicites sur ce problème chez Bolyai. Mais il est clair qu'il avait l'idée qu'un angle est constructible en géométrie hyperbolique s'il l'est dans la géométrie euclidienne et vice versa. A la fin du § 37 il constate :
Ainsi, par exemple, on pourra diviser géométriquement 4R [c'est à dire 2π] *en un nombre quelconque de parties égales, si l'on sait faire cette division dans le système Σ.*

Avant de donner une application des idées de Gauß sur la constructibilité des angles, nous revenons à la quadrature du cercle cité ci-dessus.Nous sommes partis d'un cercle à rayon r_0 avec $\sinh^2(r_0/2) = 1/4$; ce cercle avait une aire égale àπ. En utilisant le principe de Bolyai (un peu modifié pour être honnête) nous avons vu que le segment de longueur r_0 est constructible. Donc nous sommes capables de construire le cercle considéré. De plus nous avons calculé l'angle σ_0 du quadrilatère régulier de même aire que le cercle ; nous avons trouvé $\sigma_0 = \pi/4$. Cet angle est constructible (selon Gauß ou beaucoup plus simplement par bissection de l'angle droit). Mais comment arriver d'une manière constructive au quadrilatère ? C'est toujours une bonne idée - évoquée aussi par notre héros Bolyai (à la fin du § 43) - de travailler avec des triangles. Considérons le découpage suivant du quadrilatère cherché :





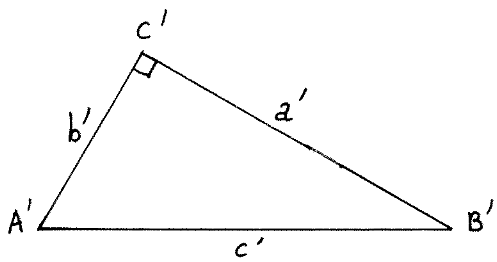
Si on connaît les angles du triangle rectangle abc on peut construire le quadrilatère en utilisant des copies congruentes du triangle abc. Quels sont ses angles ? Evidemment l'angle $\angle$ cab = $2\pi/8 = \pi/4$ parce qu'on utilise huit copies du triangle abc. Le double de l'angle $\angle$ acb doit égaler σ_0 (l'angle calculé) ou $\pi/4$, donc $\angle$ acb = $\pi/8$.

Nous connaissons les trois angles du triangle cherché. Tous ces angles sont constructibles pour des raisons assez simples. Mais comment construire le triangle ? Lisons d'abord Bolyai lui-même (fin du § 43) :

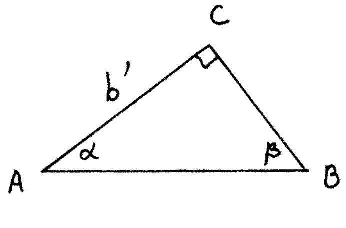
Soit $\angle$ abc = R [l'angle droit] , *$\angle$ bac = 1/2 R, $\angle$ acb = 1/4 R, et bc = x. On pourra exprimer X (§ 31,II) par de simples racines carrées, et le construire (§ 37). Connaissant X, on pourra déterminer x (§38, ou encore § 29 et § 35). L'octuple du Δ abc est évidemment = π, et, par là un cercle plan se trouve carré géométriquement au moyen d'une figure rectiligne et de lignes uniformes de même espèce (c'est-à-dire de lignes équivalentes à des droites quant à leur comparaison entre elles).*

On comprend bien ici comment Bolyai se servait de son principe. Par une sorte de trigonométrie que nous exprimons aujourd'hui par $\cosh x = \cos\alpha / \sin\gamma$ (ce qui donne avec les valeurs de α et de γ : $\cosh x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$) il arrive à calculer le segment x. On a

cosh x $\in \boldsymbol{P}$ et aussi (par $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$) sinh x $\in \boldsymbol{P}$. En conclusion on peut constater que x est constructible. On comprend ici que Bolyai n'utilise pas le résultat même de Gauß (sur les angles) mais la caractérisation implicite des segments constructibles dans la géométrie euclidienne.
Ensuite il s'agit de construire le triangle cherché : peut-on construire un triangle connaissant ses angles ? Souvenons-nous qu'en géométrie hyperbolique deux triangles sont déjà congruents s'ils possèdent des angles congruents. Par conséquent notre question n'est pas si absurde qu'en géométrie euclidienne.
La question posée n'est pas abordée par Bolyai. Dans les années 1890 on commençait à s'intéresser aux constructions hyperboliques et la question fut étudiée dans le cas particulier du triangle rectangle par Max Simon (1897), professeur d'un lycée de Strasbourg et plus tard , en 1903 , professeur d'histoire des mathématiques à l'université de Strasbourg. Une solution générale ne fut donnée qu'en 1901 par Heinrich Liebmann[9)] qui était aussi l'auteur du premier manuel de géométrie non-euclidienne en allemand (1905)[10)] . Marcel Großmann, mathématicien suisse et ami d'Einstein, a donné un peu plus tard une construction du triangle connaissant ses angles dans le modèle de Klein.
Pour le cas d'un triangle rectangle la construction est la suivante: soient donnés les angles α et β avec $\alpha + \beta < \pi/2$. Nous construisons tout d'abord un triangle auxiliaire. Par la deuxième construction fondamentale nous sommes capables de construire les segments c' = $\Delta(\alpha)$ et a' = $\Delta(\pi/2 - \beta)$ (voir « L'Ouvert » n°84, page 28). Comme $\alpha < \pi/2 - \beta$ on a aussi $\Delta(\alpha) > \Delta(\pi/2 - \beta)$ et par conséquent c' > a'. Nous allons construire un triangle rectangle A'B'C' avec les côtés a' et c' de la manière suivante:

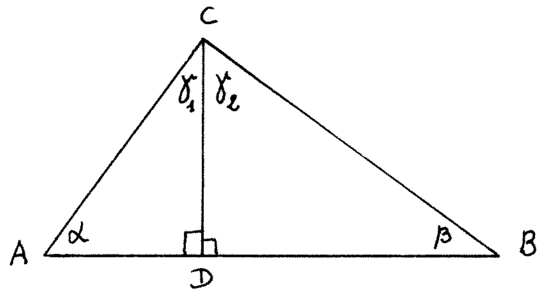


on commence par a'; on élève en C' la perpendiculaire, on trace autour de B' un cercle de rayon c'. Il faut bien noter que cette construction est possible parce que le côté qui se trouve en face du plus grand angle est connu. Le théorème de congruence qui fournit la base de cette construction n'est pas démontré par Euclide.
Avec le côté b' et l'angle donné α on construit le triangle ABC rectangle en C (cf. I, 26 chez Euclide) :



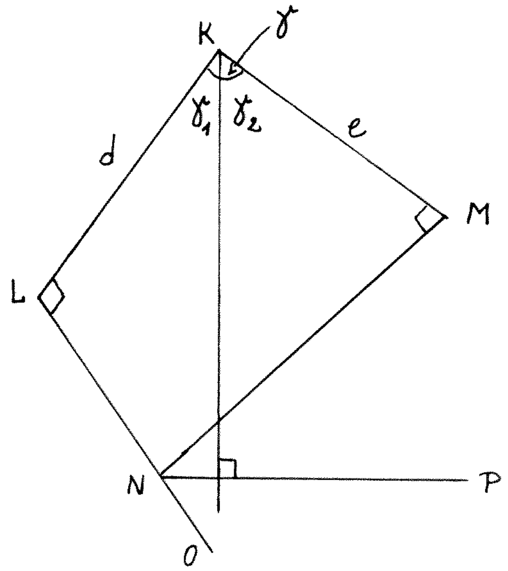
On sait par les principes de correspondance entre un quadrilatère d'Haytam - Lambert et des triangles rectangles que l'angle β du triangle ABC est égal à $\pi/2 - \Pi(a')$. Parce qu'on a $a' = \Delta(\pi/2 - \beta)$ on obtient $\beta = \pi/2 - \Pi(\Delta(\pi/2 - \beta)) = \pi/2 - (\pi/2 - \beta) = \beta$. Donc le triangle ABC possède les angles voulus.

La construction d'un triangle connaissant ses trois angles est plus compliquée. Soient donnés les angles α, β et γ tel que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Il est bien connu qu'on peut trouver dans chaque triangle au moins une hauteur qui passe par l'intérieur de ce triangle. Nous avons donc la situation suivante :



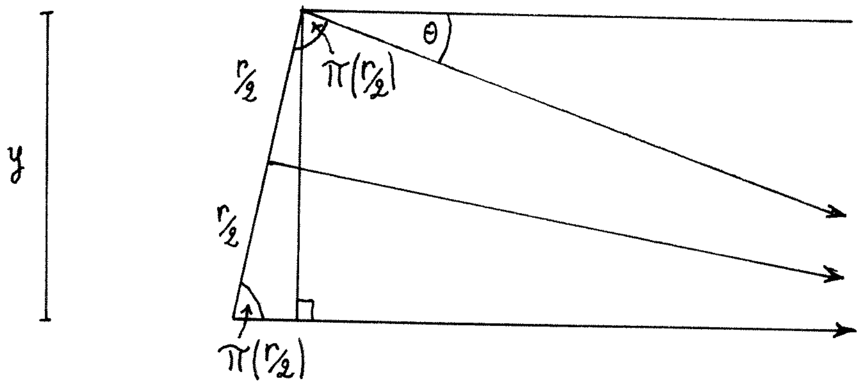
Par conséquent il suffit de construire les triangles rectangles ADC et DBC. Pour y arriver il faut construire d'abord les angles γ_1 et γ_2.

Or, par la deuxième construction fondamentale , nous sommes capables de construire les segments $d = \Delta(\pi/2 - \alpha)$ et $e = \Delta(\pi/2 - \beta)$. Avec ces segments et l'angle γ on peut construire un quadrilatère du type suivant :



La demi-droite NP est la bissectrice de l'angle MNO. De K on abaisse la perpendiculaire sur NP. Elle découpe l'angle γ en deux parties, les angles cherchés. Pour la vérification de cette construction on peut consulter le livre de Perron (Perron 1962, page 47).

En résumé nous pouvons constater que si on a trois angles constructibles α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ alors on peut construire le triangle à partir de ses trois angles.
Avec ces considérations on peut s'attaquer encore une fois à la quadrature du cercle, ce que nous ferons plus loin.
Mais revenons d'abord à Bolyai. Pour aller un peu plus loin que le cas particulier discuté ci-dessus Bolyai transforme le problème. Nous avons vu que l'aire d'un cercle de rayon r est donnée par la formule $A(C(r)) = 4\pi\sinh^2(r/2)$. Bolyai construit alors un angle θ tel que $2\sinh(r/2) = \tan\theta$ ou $4\sinh^2(r/2) = \tan^2\theta$, ce qui mène à la formule $A(C(r)) = \pi \tan^2\theta$.
La construction (§ 21) en est la suivante. Soit donné le segment r. On construit r/2 et sa médiatrice. Aux extrémités du segment donné on construit à l'aide de notre première construction fondamentale les angles $\Pi(r/2)$. On obtient ainsi deux parallèles. Puis on abaisse la perpendiculaire d'une extrémité du segment de longueur r à la parallèle opposée et on construit la perpendiculaire au segment par l'extrémité de laquelle on est parti. L'angle entre cette perpendiculaire et la parallèle est l'angle cherché.



Cette construction elle aussi se vérifie par un calcul trigonométrique. On a
$\tan\theta = \cot\Pi(y) = \sinh y = (\sin\Pi(r/2))(\sin 2r)$
$= (\text{sech } r/2)\,(2(\sinh r/2)(\cosh r/2)) = 2\sinh(r/2)$ (avec $\text{sech } x = 1/\cosh x$).

On comprend bien que les deux extrémités du segment donné sont équidistantes de la médiatrice. Donc elles se trouvent sur un cercle-limite avec cette perpendiculaire comme rayon. Le segment donné est une corde de ce cercle-limite. Et parce que la longueur de l'arc du cercle-limite est donnée par la formule $2\sinh^2(r/2)$, on a transformé cette longueur en $\tan^2\theta$, c'est-à-dire en une longueur qu'on peut interpréter comme une longueur euclidienne.

La construction décrite en haut montre que si r est constructible, θ l'est aussi. Et vice versa. Par conséquent nous pouvons considérer la formule

$$A(C(r)) = \pi \tan^2\theta$$

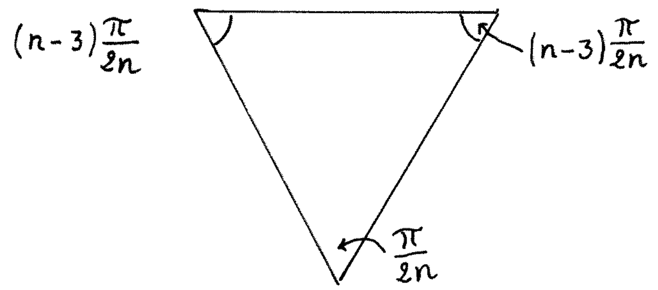
qui est plus simple que celle de laquelle nous sommes partis.
Nous avons déjà résolu le problème de la quadrature pour le cas particulier où $\tan^2\theta = 1$.
Bolyai continue:

Toutes les fois que $\tan^2\theta$ *est un nombre entier, ou un nombre fractionnaire rationnel, dont le dénominateur (après réduction à la plus simple expression) est ou un nombre premier de la forme* 2^m+1 *(dont* $2 = 2^0+1$ *est un cas particulier), ou un produit d'autant de nombres premiers de cette forme que l'on voudra, dont chacun (à l'exception de 2, qui peut seul entrer un nombre quelconque de fois) n'entre qu'une seule fois comme facteur ; on pourra par la théorie des polygones donnée par Gauß (et pour de telles valeurs de* θ *seulement), construire une figure rectiligne* $= \tan^2\theta = A(C(r))$*. Car la division de* π $[=A(Q(\sigma_0)) = A(C(r_0))]$ *(...) exige évidemment le partage de 2R* [c'est-à-dire 2 droits], *lequel n' est possible géométriquement que sous la condition précédente. Dans tous les cas pareils, ce qui précède conduit facilement au but ; et toute figure rectiligne peut être transformée géométriquement en un polygone régulier de n côtés, où n est de la forme indiquée par Gauß.* (fin du § 43)

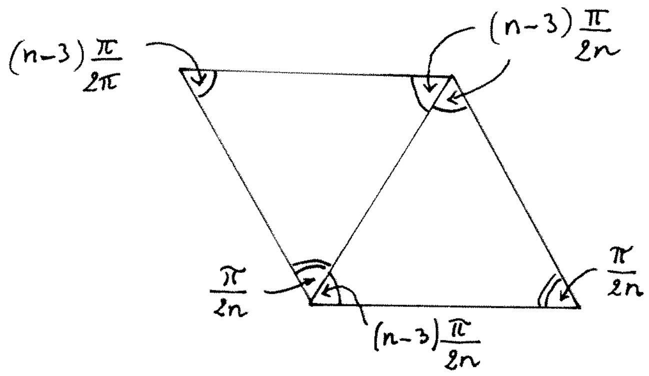
On comprend bien ici que Bolyai change un peu son point de vue en changeant le quadrilatère régulier en un polygone régulier. Pour un polygone régulier P_n, hyperbolique bien entendu, à n côtés ($n \geq 4$) nous obtenons facilement les formules suivantes:

$A(P_n) = (n-2)\pi - n\sigma_n$ et $\sigma_n = (n-3)\pi/n$ où σ_n est l'angle entre deux arêtes consécutives du polygone.

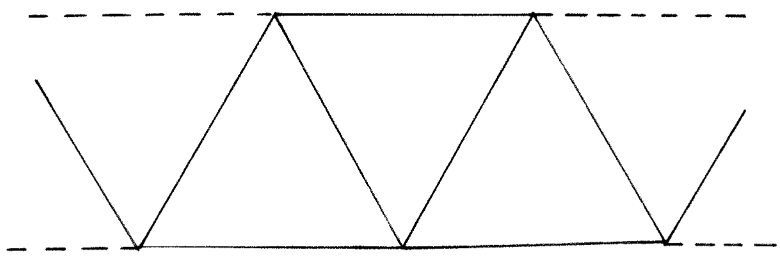
Un tel polygone est composé de n triangles isocèles du type indiqué dans la figure :



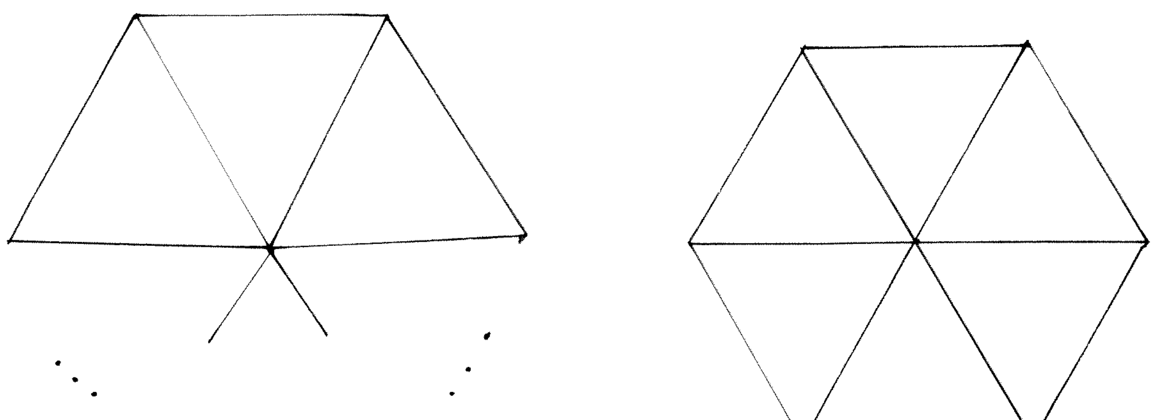
L'aire de ce triangle T_n se calcule selon la formule donnée dans le paragraphe 3. On trouve $A(T_n) = \pi/n$. Donc on a partagé par calcul l'aire π en n parties égales ! Par n pièces de cette sorte on arrive à un polygone régulier. Pour y arriver d'une manière constructive il faut construire les angles du triangle T_n. La constructibilité de $2\pi/n$ était établie par Gauß et Wantzel[11)] . Parce que le facteur 2 ne compte pas ici (doubler et bissecter un angle est toujours possible à l'aide de la règle et du compas), le résultat de Gauß-Wantzel revient à demander que n soit de la forme indiquée plus haut. Mais la constructibilité de l'angle $\pi/2n$ suffit pour celle du triangle parce que les autres angles (égaux bien entendu selon Euclide I,5) sont des multiples de $\pi/2n$. Multiplier un angle ne pose aucun problème du point de vue constructif. Donc le triangle T_n avec l'aire π/n et par conséquent le polygone P_n avec une aire égale à π sont constructibles si et seulement si n est de la forme indiquée par Gauß. Mais on peut aller un peu plus loin. En composant deux exemplaires de T_n de la manière indiquée



on obtient un quadrilatère d'aire 2π/n. Si on en utilise trois exemplaires on obtient un pentagone d'aire 3π/n. Et ainsi de suite[12)].



En résumé on peut constater : si n est un entier de la forme indiquée par Gauß et m est un entier quelconque on peut construire un polygone (non nécessairement régulier) avec l'aire mπ/n. Si m ≤ n on peut aussi choisir une autre manière pour composer les triangles et de cette manière on obtient pour m = n le polygone régulier P_n duquel on est parti.



Donc nous avons résolu le problème de la construction du polygone. Mais que sait-on sur le cercle correspondant ? Commençons par le triangle T_n d'aire π/n. Le cercle correspondant est aussi d'aire π/n ce qui revient à l'égalité suivante :

$$\pi \tan^2\theta = \pi/n \qquad \text{ou} \qquad \tan^2\theta = 1/n$$

Mais n est de forme Gaußienne, donc $\tan^2\theta \in \boldsymbol{P}$ et par conséquent $\tan\theta \in \boldsymbol{P}$ aussi. Evidemment l'angle θ peut se construire selon les critères donnés au dessus. On ne change rien d'important si on substitue $m\pi/n$ à π/n. Maintenant on comprend bien le rôle de la condition formulée par Gauß : elle garantit la constructibilité du triangle T_n et elle entraîne qu'on peut diviser l'égalité $\pi \tan^2\theta = m\pi/n$ par π. Ce qui reste à droite c'est un nombre rationnel ce qui implique la constructibilité de l'angle θ par $\tan^2\theta \in \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$. Autrement dit nous avons trouvé une condition suffisante pour la constructibilité de l'angle θ: si on a $m\pi/n$ avec n Gaußienne on peut quarrer le cercle d'aire $m\pi/n$ par un polygone à m-2 sommets.

Si nous commencons par l'autre côté de l'équation, c'est à dire par $\pi\tan^2\theta$, la question qui se pose est la suivante: Pour quelles valeurs de $\tan^2\theta$ a-t-on $\pi \tan^2\theta \in \boldsymbol{P}$? En général c'est un problème délicat; pour nous il suffit ici de connaître les valeurs pour θ constructible. La réponse est donnée au dessus: si θ est constructible, $\tan\theta$ est un élément de $\boldsymbol{P}$ et vice versa. Sous la condition indiquée, $\tan^2\theta$ est toujours un nombre de $\boldsymbol{P}$. Donc nous avons trouvé encore une fois une condition suffisante, cette fois-ci pour la constructibilité du polygone. Bien entendu nous ne savons pas s'il y a d'autres valeurs pour θ qui mènent à un polygone constructible.

Notez que nous avons changé un peu le sens du terme quarrer (comme l'a fait Bolyai aussi) en utilisant un polygone au lieu d'un quadrilatère régulier. En géométrie euclidienne on peut toujours transformer un polygone en un carré de même aire (c'est à dire qu'on peut quarrer ici chaque polygone) ce qui est déjà démontré par Euclide (en I,45 plus II,16). En géométrie hyperbolique ce n'est plus vrai par la simple raison que l'aire du quadrilatère est limitée supérieurement par 2π, par contre l'aire du polygone ayant plus que quatre arêtes peut excéder cette limite.
En utilisant des polygones nous gagnons l'avantage que nous pouvons quarrer des cercles d'aire aussi grande qu'on veut. C'est dû au fait que nous pouvons agrandir le nombre m indéfiniment.

6. La solution de Jagy

Le problème général de la quadrature du cercle hyperbolique revient à construire un angle θ (lié au rayon r du cercle par la construction de Bolyai) et un angle σ (celui du quadrilatère régulier) avec

$$\omega = 2\pi - 4\sigma = \pi\tan^2\theta$$

Pour qu'un angle θ soit constructible (en géométrie euclidienne ou en géométrie hyperbolique) il est necessaire et suffisant que $\sin\theta$, $\cos\theta$ ou $\tan\theta$ soient un élément de

P. Par tan $\theta \in$ ***P*** on a aussi $\tan^2 \theta \in$ ***P***. D'autre part l'angle ω est constructible si l'angle σ l'est. Par conséquent nous avons à analyser une équation du type $\omega = \pi x$ où ω est un angle constructible et $x \in$ ***P***. La longueur x peut se considérer comme la longueur d'un segment constructible dans la géométrie euclidienne. L'idée de Jagy (1995) était d'analyser cette équation par les moyens de la théorie des nombres modernes.
Brièvement il a montré (Jagy 1995, 35s) que la condition trouvée par Bolyai est nécessaire si on se restreint aux quadrilatères réguliers :
Théorème A: Soient a un carré (c'est-à-dire un quadrilatère régulier) d'angle σ, et un cercle de rayon r, dans le plan hyperbolique, ayant tous deux la même aire $\omega \leq 2\pi$. Alors tous deux sont constructibles si et seulement si σ remplit les conditions suivantes: $0 \leq \sigma < \pi/2$ et σ est un entier multiple de $2\pi/n$, où n entier naturel tel que le polygone régulier de n côtés soit constructible à la règle et au compas dans le plan euclidien.
(Jagy 1995, 36)

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème dit de Schneider et Gelfond (1935) qui constate : soient a et b deux nombres algébriques non nuls, $a \neq 1$ et b non rationnel, alors a^b est toujours un nombre transcendant.
L'application en est la suivante: soit $\omega = \pi x$ avec ω constructible. Il s'ensuit que $\sin \omega = \sin \pi x$ et $\cos \omega = \cos \pi x$ sont des éléments de ***P***. Donc $\exp(i\pi x) = \cos \pi x + i \sin \pi x$ est un élément de ***P(i)*** (c'est-à-dire de l'extension de ***P*** à l'aide de i). Pour bien déterminer ces expressions il faut définir $\exp(i\pi x) = x \log(-1)$. Par conséquent $\exp(i\pi x)$ est algébrique.

Mais d'autre part x est une longueur constructible dans la géométrie euclidienne c'est-à-dire que x est un élément de ***P***. A fortiori x est algébrique.
Nous avons $\exp(i\pi x) = (-1)^x$. Selon le théorème de Gelfond et Schneider x doit être un nombre rationnel. On a $x + 2 = \cosh r$ d'où s'ensuit que cosh r est rationnel aussi[13]). Autrement dit le segment r est constructible dans la géométrie hyperbolique selon le principe de Bolyai.
Parce que x est reconnu comme rationnel , x possède une représentation m/n avec des entiers m et n, n non nul et pgcd(m,n) = 1. Il est bien connu qu'il existe des entiers u et v tels que $um + vn = 1$. En multipliant par π/n on obtient: $um\,\pi/n + v\pi = \pi/n$ ou (on a $x = m/n$, ce qui entraîne l'identité $\omega = \pi x = \pi m/n$) $u\omega + v\pi = \pi/n$. Donc l'angle ω est constructible si et seulement si l'angle π/n l'est. Mais π/n est constructible si et seulement si n est de la forme donnée par Gauß.
Qu'est-ce que ca veut dire pour l'angle σ? Nous avons $\sigma = 2\pi - 4\sigma$ ou $\sigma = (2\pi - \omega)/4$. Parce que ω est un multiple de π, l'angle σ l'est aussi. Mais ω n'est pas un multiple quelconque de π, c'est un multiple de π/n avec un n de la forme Gaußienne. Par conséquent σ est un multiple du même π/n.

C'est en gros la démonstration de Jagy. Il faut bien noter que nous avons résolu le problème de la quadrature par un raisonnement simultané sur le cercle et le quadrilatère.

On peut se poser le problème suivant. On commence avec un cercle constructible, on transforme son rayon r en un angle θ selon la construction de Bolyai et on calcule l'angle σ correspondant du quadrilatère régulier. Cet angle est-il toujours constructible ? La réponse est non, ce qui est prouvé par Jagy à l'aide d'un contre-exemple (on choisit θ = arctan r/s avec des entiers r et s où s est un nombre avec un facteur premier impair ; pour l'angle ω on trouve la valeur $\pi r^2/s^2$ ce qui est un angle qui n'a pas la forme donnée par Gauß et qui est par conséquent non constructible). Aussi l'inverse n'est-il pas vrai : si on commence par un angle σ qui est constructible on n'arrive pas toujours à un angle θ qui soit aussi constructible (prenez σ = arctan q où q est un nombre rationnel non nul différent de l'unité; à l'aide du théorème de Gelfond - Schneider et du thèorème d'Olmstedt sur la transcendance des valeurs de tan, on peut alors démontrer que $\tan^2 \theta$ est transcendant et par conséquent θ n'est pas constructible). Cf. Jagy 1995, 36.

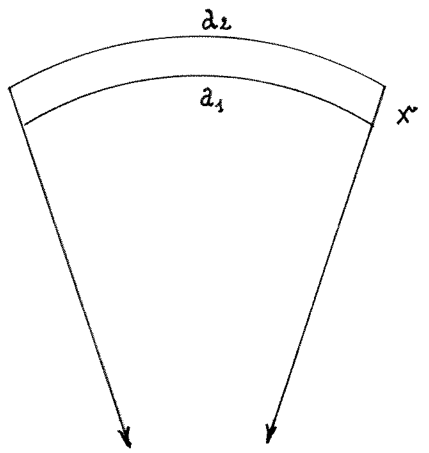
Il est très remarquable qu'on puisse démontrer d'une manière stricte que les idées de Bolyai sont correctes. De plus il est remarquable que la transformation de r en θ et par conséquent de $2\pi(\cosh r - 1)$ en $\pi\tan^2\theta$ donnée par Bolyai y joue un rôle décisif. Cette transformation n'est qu'un résultat dérivé des considérations de Bolyai sur les relations d'un arc de cercle-limite avec sa corde sous-tendante. Evidemment ce qui manquait à Bolyai c'était une connaissance profonde de la théorie des nombres transcendants.[14)] L'intégration de plusieurs domaines antérieurement séparés est souvent un trait typique du progrès mathématique.

Ce qui reste à constater c'est que les réflexions de Bolyai sur la quadrature du cercle dans la géométrie hyperbolique restaient inconnues. Même vers la fin du 19e siècle où on avait pris conscience du travail de Bolyai et trouvé la solution négative de la quadrature euclidienne on ne rencontre jamais un renvoi à la situation différente de la géométrie hyperbolique. Peut-être la solution très satisfaisante du problème euclidien ne laissait plus de place pour des considérations alternatives. Une partie est devenue le tout.

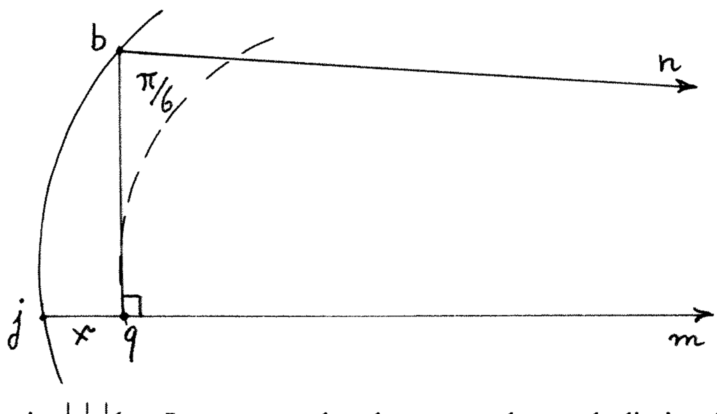
Notes :

6) A l'époque de Bolyai on ne se restreignait pas dans la géométrie sphérique aux grand-cercles. La raison en est que la *sphérique*, comme on appelait la discipline en question, était conçue comme l'étude des cercles (grands ou petits) sur la sphère (le terme géométrie sphérique n'était pas encore courant). Ce n'est que l'analogie avec la géométrie euclidienne exprimée dans les axiomes qui rend les grand-cercles si intéressants!

7) A parler franchement la réduction faite par Bolyai était un peu plus compliquée. Il ne considérait pas la relation entre un arc de cercle-limite et une corde mais celle entre deux arcs de cercle-limites concentriques et les segments des droites hyperboliques parallèles en direction du centre des cercles-limites, coupés par les deux cercles-limites. Cette situation nous rappelle le théorème de Thalès:



Par ces considérations Bolyai était capable de faire intervenir les angles et par conséquent la trigonométrie. Cf. la citation suivante :
§ 37) Il est facile d'en conclure que, des lignes L étant données par leurs seules extrémités, on peut obtenir de cette manière, dans F, une quatrième proportionnelle, ou une moyenne proportionnelle, et exécuter, sans recourir à l'Axiome XI, toutes les constructions géométriques qui se font sur le plan dans le système Σ.
Le paragraphe qui suit donne un exemple :



Soit $\angle$ nbq = π/6 et jm$|||$bn. Le rapport des deux arcs de cercle-limite déterminés par le segment de longueur x avec les extrémités j et q est noté X par Bolyai . Il trouve

$$X = \frac{1}{\sin(\pi/6)} = 2$$

Bolyai conclut: ... *et x sera construit géométriquement.*

8) La raison en est la suivante: 2sinh(r/2) est une racine de l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$ par l'identité $\sinh 3t = 4\sinh^3 t + 3\sinh t$. Mais cette équation est irréductible sur ***P***. Cf. Martin 1986, 483.
Autrement dit cette impossibilité est l'expression du fait qu'on n'a pas de géométrie de similitude dans le cadre de la géométrie hyperbolique. Ce qui manque c'est le théorème de Thalès.

9) En effet il y avait une dispute entre Liebmann et Simon. Liebmann critiquait avec raison l'article de Simon (Simon 1891) pour son argumentation un peu floue. D'autre part Simon réclamait la construction du triangle par ses angles pour lui-même en disant qu'elle était un corollaire assez facile de sa construction donnée en 1897, et qu'il la posait toujours aux étudiants comme problème dans ses cours.

10) Le mathématicien autrichien Johannes Frischauf de Graz avait publié en 1872 et en 1876 deux livres sur la géométrie non-euclidienne. Mais ces livres n'étaient que des éditions commentées de celui de Bolyai. Ils sont d'une grande valeur pour la lecture du texte de Bolyai.

11) Il semble que Bolyai n'ait pas vu le fait que Gauß n'a pas démontré la nécessité de sa condition, ce qui sera établie par Wantzel en 1837.

12) Autrement dit: les déficits s'additionnent si on colle deux polygones le long d'un côté congruent. (Notez bien que par cette construction on n'obtient pas des segments alignés, au-dessus et en-dessous des triangles)

13) On a $\omega = \pi x$ et $\omega = 2\pi(\cosh r - 1)$ donc: $\pi x = 2\pi(\cosh r - 1)$ ou $x + 2 = 2\cosh r$.

14) C. L. Siegel écrivait dans son livre sur les nombres transcendants en 1949: *Man sollte es keine Theorie der transzendenten Zahlen nennen, da unsere Kenntnis über transzendente Zahlen sehr lückenhaft ist. (On ne devrait pas appeler cela Théorie des nombres transcendants, car notre connaissance des nombres transcendants est très lacunaire)* (Siegel 1967, Vorwort)

Bibliographie

Bolyai, J. *La science absolue de l'espace* (Mémoires de la société physique et naturelle de Bordeaux **5** (1867 - 69), 198 - 248).

Bonola, R. - Liebmann, H. *Die nichteuklidische Geometrie* (Leipzig et Berlin, 1908).

Chabert, J. L. *Les géométries non euclidiennes* (Repères No.1 [oct. 1990],69 - 91).

Frischauf, J. *Elemente der absoluten Geometrie* (Leipzig, 1876).

Gauß, C. F. *Werke.* Bd. 8, bearbeitet von P. Stäckel (Leipzig, 1900).

Hermes, J.: *Über die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile* (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch - physikalische Klasse 1894, 170 - 186).

Jagy, W. C. *Squaring Circles in the Hyperbolic Plane* (The Mathematical Intelligencer **17** no. 2 (1995), 31 - 36).

Knorr, W. *The Ancient Tradition of Geometric Problems* (New York, 1993).

Liebmann, H.: *Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln* (Sitzungsberichte der mathematisch - physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1901, 477 - 491).

Martin, G. E. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane* (New York, 1986).

Montucla, J. - E. *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (Paris, 1754).

Pappus *La collection mathématique*. 2 tomes. Traduit par van Eecke (Paris - Bruges, 1933).

Perron, O. *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (Stuttgart, 1962).

Rudio, F. *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig, 1907).

Pont, J. C. *L'aventure des parallèles* (Bern, 1986).

Siegel, C. L. *Transzendente Zahlen* (Mannheim-Wien-Zürich, 1967)

Simon, M. *Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction* (Journal für die reine und angewandte Mathematik **107** (1891), 84 - 86).

Simon, M. *Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie* (Mathematische Annalen **48** (1897), 706).

Stäckel, P. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß*. Herausgegeben in Gemeinschaft mit F. Engel (Leipzig, 1895).

Wantzel, P. L. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* (Journal de mathématiques pures et appliquées **2** (1837), 366 - 374).

Cet article fut écrit pendant un séjour très agréable et informatif à l'IREM de Strasbourg. Je veux remercier tous les gens qui s'occupaient de moi, en particulier C. Dupuis, C. et J. P. Friedelmeyer et E. Urlacher. Egalement je veux remercier les auditeurs de mon cours sur l'histoire de la géométrie non-euclidienne pour leur patience et leur gentillesse.