RECETTE POUR LE TRACÉ POINT PAR POINT DE LA FONCTION SINUS SUR ÉCRAN GRAPHIQUE

Etienne MEYER

1.– Se munir de sa calculatrice graphique ou de son ordinateur muni de son logiciel de tracé de courbes favori.

Dans ce dernier cas, forcer le mode pour que les calculs se fassent pixel par pixel. Il sera peut-être nécessaire d'avoir à calculer le "pas".
Sur une calculatrice graphique ordinarie (comme l'est par exemple la TI 82), pas de problème : elle est faite pour que les calculs se fassent pixel par pixel.
Sur une calculatrice plus évoluée, il peut être nécessaire de fixer quelques paramètres (sur la TI 92, mettre "xres" du menu window à 1).

2.– A l'aide d'un doseur adéquat, déterminer le nombre de pixels sur une ligne horizontale de votre fenêtre graphique.

(Si le constructeur ne vous le fournit pas, voilà un exercice intéressant!)
Soit N ce nombre.
(Pour une TI 82, $N = 94$; pour une TI 92, $N = 238$.)

3.– Mettre $y = \sin(2\pi x)$ dans la casserole à mijoter.

4.– Fixer les paramètres de cuisson de la manière suivante :

$Xmin = 0, Ymin = -1, Ymax = 1$ et $\ldots Xmax = \frac{N+p}{q}$ avec p entier naturel de 0 à ≈ 10 et q entier naturel de 1 à ≈ 6.
Il ne nous reste plus qu'à ajouter un peu de sel et de poivre suivant votre goût et à faire

5.– mijoter doucement le graphe.

Si votre matériel dessine point par point, sans relier les points, vous verrez apparaître (peut-être!) q sinusoïdes représentées sur $\frac{p}{q}$ périodes.
Si votre matériel relie les points calculés par des erzats de segments, vous verrez apparaître (peut-être!) des zones délimitées par q sinusoïdes représentées sur $\frac{p}{q}$ périodes et par bien d'autres sinusoïdes encore (d'amplitude inférieure à 1).

6.– Faire une démonstration de votre talent.

Ce qui va être dessiné, ce sont les points $(x_k; y_k)$ avec :
$x_k = \frac{Xmax.k}{N} = \frac{\frac{N+p}{q}.k}{N} = (1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}.k$ et $y_k = \sin(2\pi x_k) = \sin\left(2\pi(1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}.k\right)$
Pour $k = q.k'+r$ (avec k' et r entiers et $r < q$: **ce qui explique les q sinusoïdes**), on obtient :

$$y_k = \sin(2\pi(1+\frac{p}{N})(k'+\frac{r}{q})) = \sin(2\pi(\frac{p}{N}).k' + \varphi)$$

Soit encore :

$$y_k = \sin(2\pi\frac{p}{N}\frac{k-r}{q} + \varphi) = \sin(2\pi\frac{p}{Nq}\frac{Nqx_k}{(N+p)} + \alpha) = \sin(2\pi\frac{p}{N+p}x_k + \alpha).$$

Il s'agit encore d'une sinusoïde,
mais la courbe de départ a pour période 1 (on devrait donc représenter $Xmax$ périodes de cette sinusoïde)
tandis que celle qu'on vient d'obtenir, a pour période $\frac{N+p}{p}$ (et on va en représenter

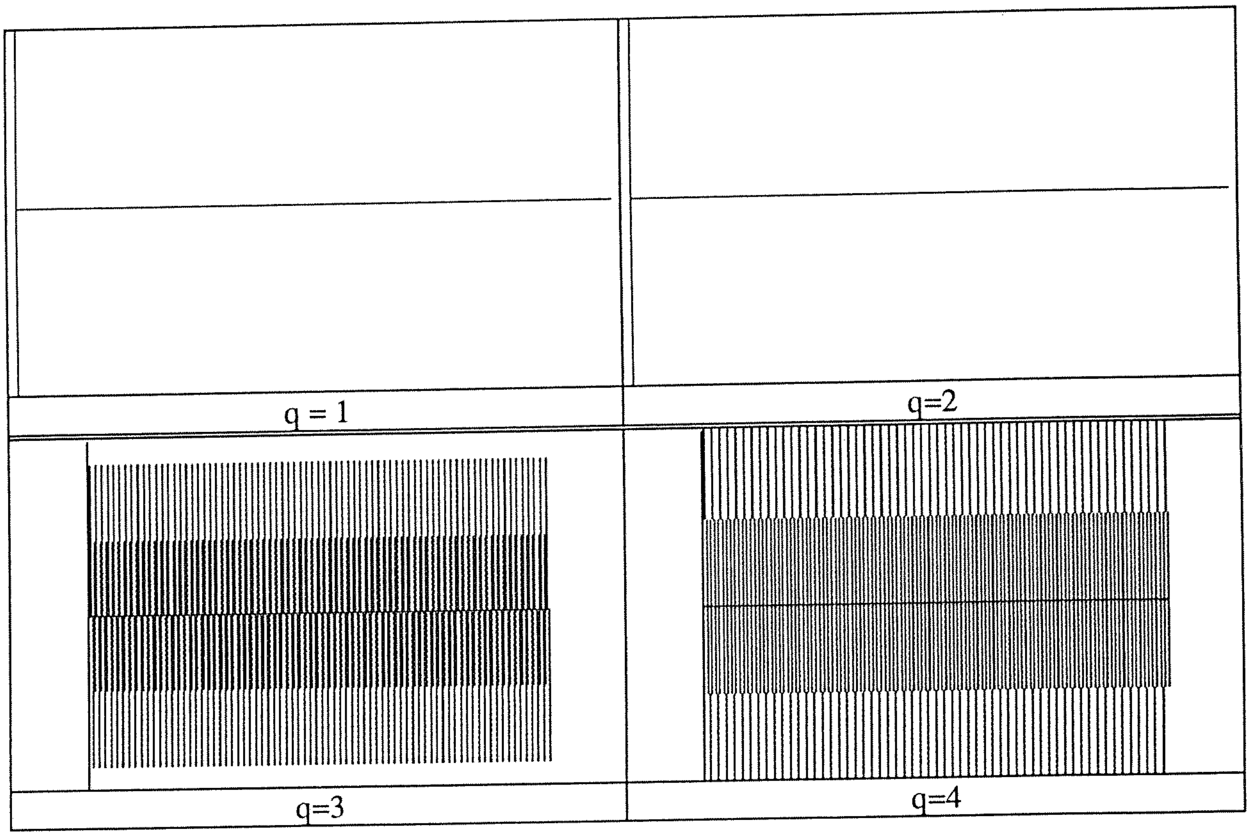
$$\frac{Xmax}{\frac{N+p}{p}} = \frac{\frac{N+p}{q}}{\frac{N+p}{p}}$$

périodes soit p/q périodes).

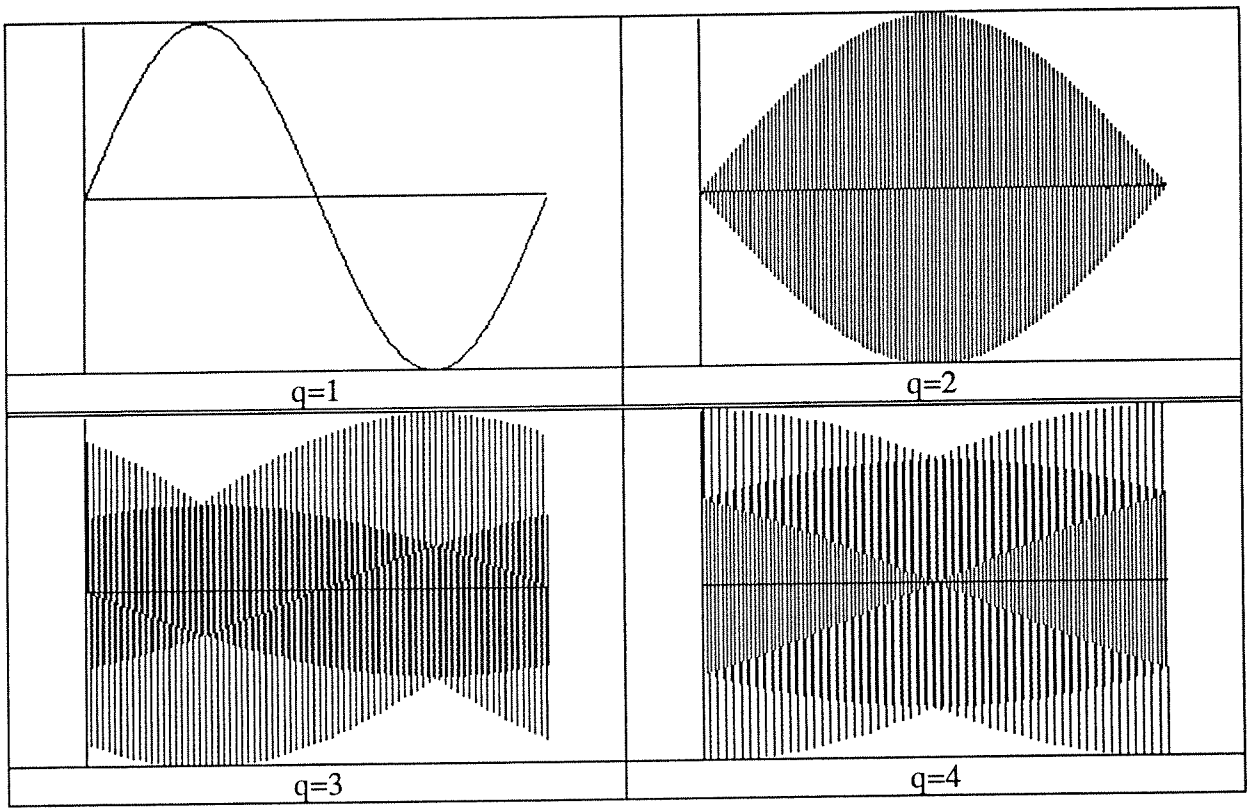
QUELQUES TRACES DE LA FONCTION SINUS AVEC GRAPH'X

La fonction à représenter est $x \mapsto \sin(2\pi x)$ sur $[0; 500]$ (la borne supérieure n'a pas d'importance, pourvu qu'elle soit assez grande).
Une fenêtre graphique étant dimensionnée (voir les résultats ci-dessous), on détermine N. La valeur précise de N n'est pas importante dans un premier temps ; elle va cependant déterminer la "qualité" des tracés. Pour les dessins ci-dessous, $N = 231$.
On choisit les deux valeurs déterminantes p et q.
On fixe le pas à $(1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}$; on fait varier y de -1 à 1 ; on fait varier x de 0 à $Xmax = \frac{N+p}{q}$.
Voici les résultats obtenus, suivant les valeurs de p et q. Le passage de Graph'x à Word puis à l'imprimante ne rend pas fidèlement ce qui apparaît à l'écran sous Graph'x (malgré les nombreuses tentatives réalisées).

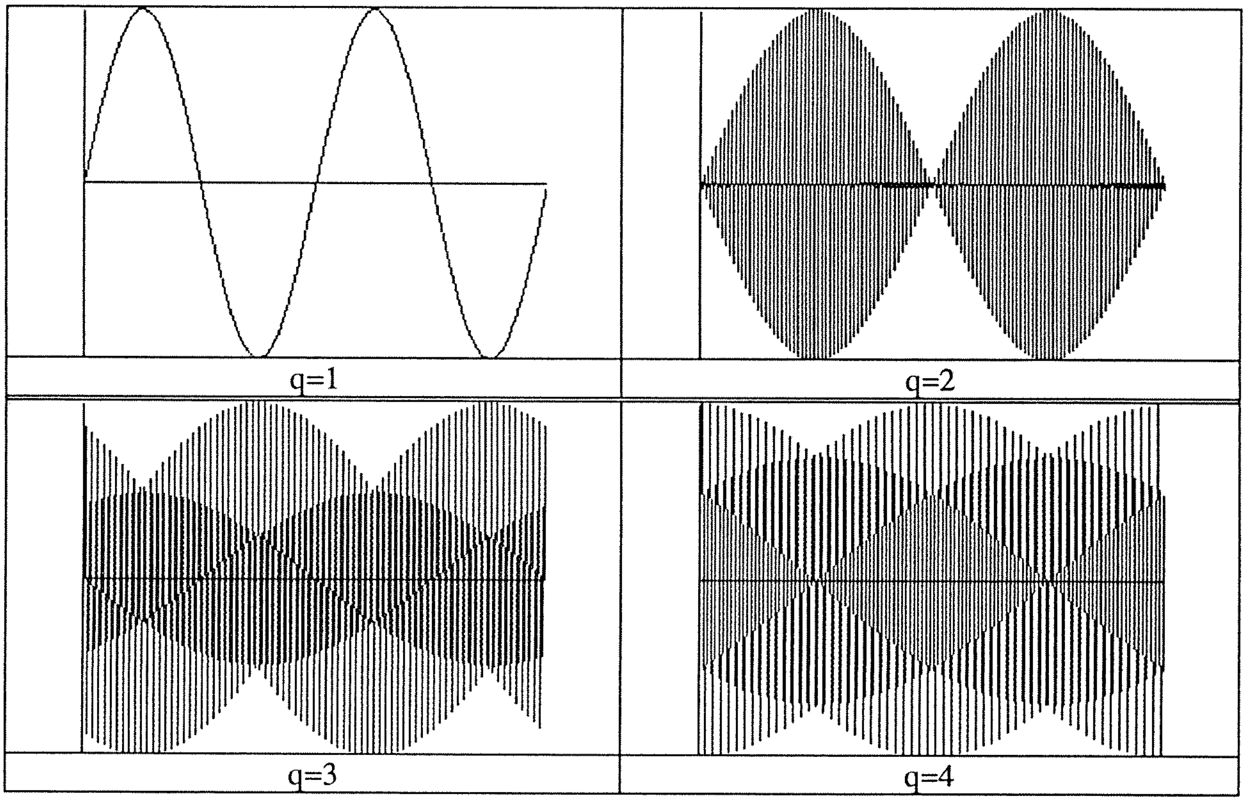
Pour p = 0



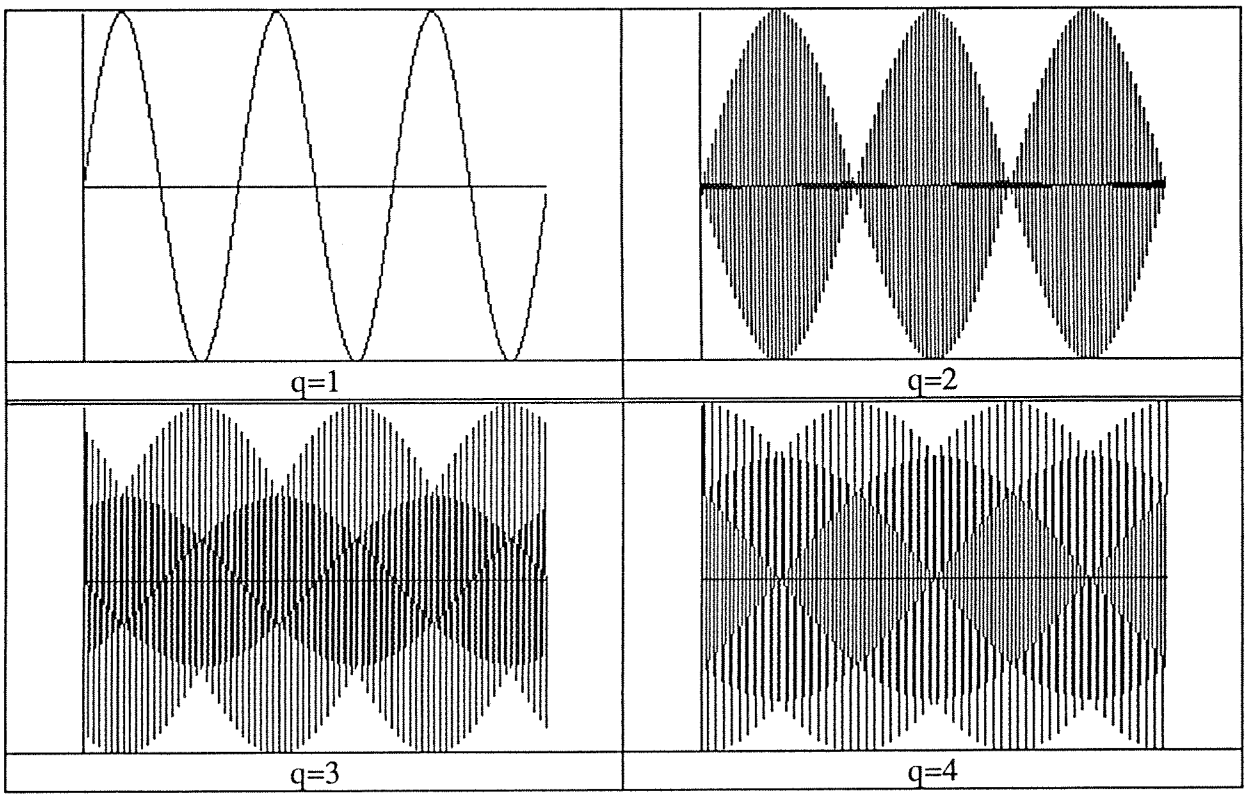
pour p = 1



pour p = 2



pour p = 3



pour p = 4