JACOB STEINER, UN GÉOMÈTRE ROMANTIQUE ?

Anne BOYE

Centre François Viète, Université de Nantes

Découvrant un jour dans un album sur la peinture romantique allemande un tableau de P.O.Runge, "*La naissance de l'âme de l'homme*", j'éprouvais un sentiment de parfaite correspondance avec ce que je ressentais à la lecture du mathématicien Jacob Steiner, un homme dans son temps, participant pleinement au renouveau de la pensée, voire de l'idéologie et emporté même par ce mouvement romantique.

Je me propose de mettre en lumière ce romantisme tant dans la vie de Jacob Steiner , que dans son éducation, dans ses idées pédagogiques (car ce fut aussi un grand pédagogue), dans son comportement plus ou moins "asocial", et également, dans sa pensée mathématique.

Selon l'idée que l'on se fait du personnage romantique le qualificatif de romantique pourra sûrement être contesté. Ce que ses amis ou collègues écriront de Steiner à sa mort évoque déjà un homme peu ordinaire. Pour Otto Hesse : "*Steiner a la réputation d'être le premier géomètre de son temps*", pour Geiser : "*Si dans le futur un géomètre brille au dessus de ses contemporains et de ses semblables par la plénitude de sa puissance de découverte et la maîtrise de ses descriptions, alors on pourra dire de lui qu'il est la réincarnation de Steiner*". *Geiser* encore à l'exhumation des restes de Steiner : "*Nous avons eu avec lui le plus grand géomètre de notre temps, dont les créations seront poursuivies dans les siècles à venir, dans l'enseignement comme dans la recherche.* Jacobi écrit aussi: "*Il n'a pas seulement fait avancer la synthèse, mais il a aussi mis sur pied pour toutes les branches des mathématiques un modèle de méthode et d'investigation.*"[1]

Steiner apparaît estimé de ses collègues, même s'il leur reprochait sans cesse de ne pas reconnaître suffisamment ses mérites. Lui-même oubliait souvent de citer ses sources.

Il est né dans le canton de Berne le 18 mars 1796 et mort à Berne le 1er avril 1863. Les années décisives, aussi bien pour son œuvre mathématique que pour sa carrière se situent entre 1814 et 1832.

Le contexte historique :

Je ferai commencer mon histoire aux environs du 14 octobre 1806, au lendemain de la bataille de Iéna. Iéna est un lieu important du romantisme allemand. S'y rencontrent Novalis, Gœthe, le linguiste Karl Wilhelm von Humboldt, les philosophes Fichte et Shelling. En particulier Karl Wilhelm von Humboldt et Fichte vont être des acteurs de premier plan dans la réforme de l'éducation prussienne et jouer un rôle décisif dans la carrière de Jacob Steiner. Les réformateurs prussiens rendent le système d'éducation responsable de la cuisante défaite de Iéna, et vont entreprendre une réforme profonde de ce système. "*Il est nécessaire d'apprendre aux citoyens comment penser*".[2]. En 1810, W. von Humboldt devenu directeur des cultes et de l'instruction publique, crée l'université

---

[1]Pour ces citations et leurs références voir: J-P SYDLER.

[2]H. Brunschwig, *Société et romantisme en Prusse au XVIII° siècle,*

© L'OUVERT **85** (1996)

de Berlin, liée à l'Académie royale de Prusse, qui sera dirigée par les plus grands savants allemands. Le premier recteur élu en sera Fichte. Cette université a pour tâche essentielle et avouée d'animer la prise de conscience de la nation allemande. Les réformateurs sont très influencés par les idées du pédagogue suisse Johann Heinrich Pestalozzi. Et de fait, Fichte, dans son discours à la nation allemande de 1808 déclare: " *La doctrine de Pestalozzi a assez de puissance pour aider les peuples et l'espèce humaine à sortir de l'état misérable dans lequel ils croupissent*"[3].

Les idées de Pestalozzi :

Quelle est cette doctrine, mise en avant par Fichte ?

J.Pestalozzi a en quelque sorte popularisé les idées de Rousseau, en les corrigeant. Il veut en particulier améliorer l'éducation des enfants pauvres ; il préconise un enseignement mutuel, et fait de l'intuition le fondement de l'éducation ; par l'intuition l'on peut "*saisir le sens profond caché sous les apparences, l'unité du monde masquée par sa diversité*". En mathématiques, en particulier, la géométrie est privilégiée et enseignée suivant une méthode dite "naturelle", où l'on examine les formes qui sont données, où l'on exerce son esprit à trouver les relations qui les lient, cela, sans préjugés ; la connaissance doit être produite et découverte par l'étudiant lui-même, seulement guidé par le professeur, selon la méthode socratique.

"L'ignorance est meilleure qu'une connaissance qui ne serait que préjugés... Arriver à la connaissance lentement, mais par sa propre expérience, vaut mieux qu'apprendre par coeur, à la hâte, des faits que d'autres personnes savent et, l'esprit encombré de mots, perdre ses facultés individuelles et libres d'observation... Le but supérieur de l'enseignement est de préparer l'individu à utiliser librement et en toute confiance toutes les facultés que le créateur lui a accordées, et de diriger ces facultés afin d'améliorer toute vie humaine"[4].

Grâce à ces principes, Fichte, Humboldt et Stein, un autre réformateur, pensent pouvoir former des citoyens et non pas des sujets, utiles à l'État et à la Nation. Le dressage mécanique doit y faire place à des exercices conduisant à un développement heureux de toutes les facultés. Ces recommandations doivent être prises en compte dès l'enseignement élémentaire. Si l'on amène l'étudiant à utiliser les pouvoirs créateurs de son esprit, il appréciera alors la valeur de la république et la nécessité de combattre pour sa liberté. Certains diront que se rencontrent à Berlin l'esprit des lumières et celui du romantisme.

Où apparaît Jacob Steiner :

Fichte, Humboldt, Stein, envoyèrent donc beaucoup de leurs amis visiter l'institut de Pestalozzi à Yverdon, en Suisse, pour les former à sa méthode. C'est là qu'apparaît le jeune Jacob Steiner.

Cinquième enfant d'une famille de paysans du canton de Berne[5]. son éducation fut très rudimentaire; à 14 ans, il savait à peine lire et écrire. En 1814, malgré les réticences de ses parents, il se rend à Yverdon, à l'institut de Pestalozzi, où il est admis gratuitement. Il

---

[3]*Histoire mondiale de l'éducation*,II

[4]*Ibid.*

[5]Sur la vie de Jacob Steiner consulter par exemple; CARL FRIEDRICH GEISER. C.F. Geiser était le petit neveu de Steiner.

impressionne rapidement ses professeurs, de mathématiques en particulier. Au bout d'un an et demi, il est engagé comme professeur de mathématiques à l'institut. En 1818, il part à l'université de Heidelberg; il y reste cinq semestres, en donnant des cours particuliers pour payer ses études. Sur les conseils d'un ami, peut-être un peu trop précipitamment , il se présente en 1821 au Friedrich Werden Gymnasium de Berlin, postulant sur un poste de professeur. Muni des recommandations de l'université de Heidelberg et de Pestalozzi lui-même, le directeur l'engage pour enseigner la géométrie élémentaire. Cependant, le conseil d'établissement exige qu'il subisse les examens habituels; ceux-ci requéraient la preuve de connaissances générales dans toutes les branches du savoir. Or la formation de Steiner laisse à désirer sur bien des points. En particulier c'est Hegel, professeur à l'Université de Berlin, qui l'interroge en philosophie, et qui déplore son insuffisance. Le sujet proposé était le suivant: "Est ce que l'usage et l'exercice de la mémoire, que l'on entraîne généralement dès les études primaires, gênent ou favorisent le développement de l'intelligence?". Les méthodes de Pestalozzi, que Steiner avaient évidemment faites siennes, ne plurent pas vraiment. On confie cependant à Steiner un poste de maître auxiliaire intérimaire pour les petites classes.

En 1822, il est congédié, sous le prétexte qu'on ne peut lui confier l'enseignement d'une autre discipline. En fait ses méthodes d'enseignement sont peu conventionnelles, nous le verrons dans la suite, et Steiner prétend qu'il est renvoyé pour avoir refusé d'utiliser le manuel écrit par le directeur Zimmermann Il doit alors donner des leçons particulières pour subsister. Il devient un professeur privé, renommé, et compte parmi ses élèves le prince Auguste et le fils de Wilhelm von Humboldt. Ce sont pourtant de dures années, et Steiner se plaint de ne pouvoir consacrer le temps qu'il voudrait à ses propres recherches. Ces années cependant sont très fructueuses pour sa vie mathématique. Il écrit le manuscrit de son premier ouvrage ***Théorie universelle des contacts et intersections de cercles et de sphères***. [6] Le titre original en était: ***L'intersection (incluant le contact) des cercles dans le plan, l'intersection des sphères dans l'espace, et l'intersection des cercles à la surface de la sphère***. Cet ouvrage ne fut publié qu'en 1931 par Gonseth à Berne[7], quand ont été retrouvés ses papiers; il manque le dernier chapitre. La qualité de ses travaux décide, entre autre, Crelle à commencer la publication d'un journal de mathématiques, sachant qu'il pourra compter sur des contributions de Steiner et aussi d' Abel, un autre jeune mathématicien prometteur.

De fait, en 1827, deuxième année du journal, les essais de Steiner représentent le tiers des articles publiés.

Autre circonstance heureuse, est créée en 1826 la Gewerbeschule de Berlin (École des arts et métiers), et le directeur est partisan des méthodes de Pestalozzi. Il engage donc Steiner. Quoique ce dernier ait un caractère assez violent et ne semble pas imposer une discipline exemplaire à ses élèves, il restera en poste grâce au soutien actif de la famille von Humboldt. En 1831, par exemple le directeur menace de le licencier, et doit le prier "*de ne pas employer d'expressions grossières, de ne pas se laisser aller à la colère, car il nuit ainsi à la réputation de l'école*". Quant au maire de la ville, il ajoute (xénophobie ou sarcasme):"*Je dois avouer que c'est un grand avantage d'écarter un tel homme de l'enseignement, et ceci, quand bien même il serait Archimède lui même! Il n'a aucune notion de ce qu'est la subordination et ne peut donc maintenir la moindre discipline avec*

---

[6] *Allgemeine Theorie über das Berührens und Schneiden des Kreise und der Kugeln*

[7] R. Fueter et Gonseth , eds, Zurich-Leipzig, 1931.

ses élèves. Qu'il retourne donc avec les siens dans les montagnes de son maudit pays, et qu'il cesse de corrompre nos Brandebourgeois!"[8]

Steiner avait cependant obtenu en 1827 une subvention de l'académie de Berlin, et en 1832 il pouvait publier son œuvre: ***Développement systématique de l'interdépendance des conceptions géométriques***[9]. Ce sera sa contribution majeure.

Sa renommée est assurée. Une chaire de géométrie est créée pour lui à l'Université de Berlin. Il formera là une génération de savants allemands, dont B.Riemann. En 1834, il devient membre de l'Académie des sciences de Berlin, en 1853 membre correspondant de l'Academia dei Lincei, l'année suivante il est membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris.

Il ne sera toutefois jamais nommé professeur ordinaire et sa santé laisse à désirer. Il revient souvent à Berne, et c'est là qu'il s'éteint en 1863.

Les idées pédagogiques de Steiner, sa conception des mathématiques, ses travaux :

Ces trois aspects sont intimement liés chez Jacob Steiner, et, si l'on pense le savoir romantique comme critique de la science établie, refus d'obéissance à des normes, comme défenseur de l'imagination créatrice, de l'intuition, du sentiment, de l'expérience ressentie, alors, sans doute, nous conclurons que l'œuvre de Jacob Steiner est véritablement romantique.

L'accès au savoir ne peut être obtenu par un enseignement discursif, il présuppose une initiation et un engagement de la personne toute entière. Alors que la pédagogie traditionnelle semble procéder du dehors au dedans, (peut-être pour assurer la bonne intégration de la jeune génération dans la société adulte), la pédagogie de Pestalozzi, dont Steiner est imprégné, demande de procéder du dedans au dehors, pour que chacun puisse conquérir sa propre identité, et découvrir une certaine forme unitaire du savoir.

Voici ce qu'écrit Steiner à l'occasion d'une demande de subventions pour ses recherches en 1826-1827 :

"*La méthode employée à l'institut de Pestalozzi, consistant à traiter les vérités mathématiques comme des sujets de libre réflexion, m'a amené, alors que j'étais élève, à chercher si possible, à la place des proposition avancées pendant l'instruction, d'autres propositions qui fussent plus profondes que celles que présentaient les professeurs, et bien souvent, j'y arrivais si bien, que les professeurs préféraient mes démonstrations aux leurs.*

En tant qu'élève, après avoir étudié plusieurs manuels de géométrie, je me rendis compte de la nature arbitraire de l'ordre qui, du fait du manque de relation substantielle, émanait des relations entre les différentes propositions. J'ai trouvé de façon un peu arbitraire, un peu empirique, que la nécessité de la science se démontre dans la substance de son contenu et que, d'après un sentiment qui m'enthousiasmait mystérieusement, la

---

[8]J.P.Sydler, ouvrage cité.

[9]*Systematische Entwicklung des Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*

multiplicité des connaissances doit dériver de son unité générale et doit être abordée ainsi."[10]

Il faut retrouver l'ordre naturel, et c'est l'intuition qui permettra de saisir l'unité des mathématiques masquée par sa diversité.

Et c'est la géométrie synthétique[11] (que Carnot qualifiait de "naturelle", qui fut appelée géométrie "pure" dans le Journal de Crelle, et qui sera "supérieure" avec Poncelet puis Chasles) qui permet seule de libérer en chacun les possibilités en sommeil. C'est aussi le lieu où l'acte créateur s'accomplit. Jacob Steiner l'impose donc contre la géométrie analytique qui n'est qu'un savoir neutre, déductif, coupé de la passion de construire, et qui n'a elle aucun pouvoir créateur. La géométrie analytique ne peut venir qu'après coup, pour vérifier le cas échéant, une fois que la découverte a été effectuée. La géométrie analytique est la géométrie acquise " de l'extérieur", alors que les principes de la géométrie synthétique sont pour ainsi dire dans le sentiment, et permettent à des élèves n'ayant reçu aucune formation spécialisée d'accéder aux conceptions les plus avancées.

La méthode géométrique est une discipline formatrice de l'esprit, une méthode de découverte, alors que l'algèbre ne mène à découvrir que ce que l' on savait déjà implicitement au départ.

Dans la géométrie synthétique, les objets sont considérés pour eux mêmes, dans l'espace; les propriétés sont recherchées en se basant sur une sorte de réalisation, parfois uniquement imaginative, mais qui suppose une certaine vision ou représentation des figures. Cette vision permet ensuite d'appliquer le raisonnement logique aux endroits les plus favorables, ce qui révèle de nouvelles propriétés, une nouvelle vision, etc...

"Steiner n'utilisait pas de figures pendant ses cours. La pensée active de l'auditeur devait engendrer une image si claire dans son imagination qu'il n'avait pas besoin d'une image matérielle." raconte Felix Klein. [12]

Au delà de ce pouvoir visionnaire au service de l'imagination créatrice, ce qui est fondamental, c'est le besoin de synthèse; il faut restituer l'unité organique de la nature, qui est diversifiée à l'infini; J. Steiner souligne le besoin qu'il a d'établir des relations entre des propriétés à première vue indépendantes, toujours dans ce texte de demande de subventions :

"Il me paraissait clair que, tant que l'on recherchait la méthode synthétique dans une relation extérieure arbitraire entre les différentes propositions, on ne faisait que fourvoyer l'élève en lui donnant l'impression que ces diverses propositions étaient l'objet de la science, si bien que pour lui, la perception de l'unité synthétique générale de la science était si obscurcie qu'il n'apprenait à saisir celle-ci que sous la forme de différentes propositions, et jamais dans son originalité substantielle. En tant que professeur, mon problème était donc dans la mesure du possible de traiter chaque discipline sous la forme de quelques concepts et de faire émerger les propositions individuelles du développement de ces quelques concepts.

---

[10] Traduction Xavier Lefort et Anne Boyé.

[11] Le nom de géométrie synthétique, au XIX° siècle , a été créé par opposition à la géométrie analytique, ou géométrie des coordonnées, qui suppose l'analyse. La géométrie analytique peut se développer sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures. La géométrie synthétique s'appuie sur des considérations d'espace et de figures, et des postulats liés à notre perception. Sur ces géométries on pourra consulter l'*Encyclopédie des sciences mathématiques.*

[12] J.P.Sydler, ouvrage cité

Dès lors, la notion de systématisation, telle qu'on la trouve dans les traités de géométrie, est complètement transformée. Je luttais pour cette unité des moyens de construction géométrique, sans qu'on me l'ait montrée, je luttais pour la genèse qui se trouve à la base de la géométrie synthétique et dont dépend toute découverte géométrique.

En revanche, la façon dont on l'avait fait jusque là me semblait n'être qu'un moyen mnémotechnique d'associer les diverses propositions ou de les appliquer, et non une façon de les dériver par une méthode exhaustive.[13]"

Il habituait ainsi ses élèves à penser en forme de relations et non d'objets fixes, et à utiliser pleinement leur imagination.

Tous ceux qui ont lu les oeuvres de Jacob Steiner, que ce soit son premier manuscrit (***Théorie générale des contacts et intersections de cercles et de sphères)***, ou le ***Développement systématique de l'interdépendance des concepts géométriques***, ou bien encore les publications qui suivront, ont été frappé par l'impression d'équilibre et d'ordre qui suggère un véritable schéma général d'où tout découle. Voici ce qu'il écrit dans son introduction au "***Développement systématique":***

"Ce traité essaie de découvrir l'organisme dans lequel des phénomènes hétérogènes du monde de l'espace sont liés les uns aux autres. Il produit une poignée de relations fondamentales complètement simples, qui expriment l'ossature de l'organisme et à partir desquelles la masse restante des théorèmes suit et se développe sans difficulté. En assimilant ces quelques relations fondamentales nouvelles, on maîtrise la totalité du sujet; on introduit de l'ordre dans le chaos apparent et l'on voit comment toutes les parties s'articulent les unes les autres en accord avec la nature, s'arrangent dans un bel ordre de succession et se transforment et s'unissent en un corps bien défini. De cette façon, on arrive à la possession des éléments dont procède la Nature, et l'on peut, le plus simplement et avec le maximum d'économie, enseigner les innombrables caractéristiques des figures."[14]

Il s'agit bien là de la Nature Romantique, unité organique diversifiée à l'infini; c'est le postulat unitaire de la Naturphilosophie. La critique de la science établie, le refus d'obéissance aux normes, sont au service de la recherche de cet ordre et de cet équilibre.

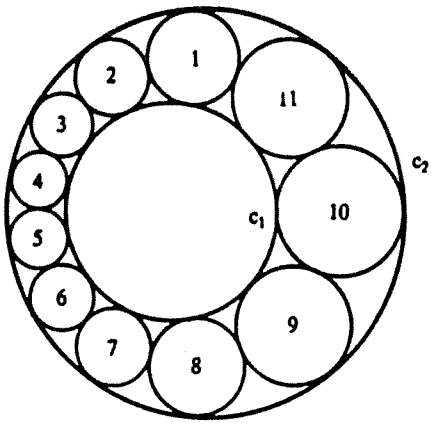
Dans le même temps, une impression de simplicité émane de l'œuvre de Steiner. Dans la deuxième publication qu'il fait dans le Journal de Crelle (1827), il expose des théories élémentaires sur lesquelles repose son ouvrage "***Théorie universelle des contacts***". Il s'y montre brillant par la simplicité avec laquelle il résout différent problèmes, en particulier le problème de **Pappus**[15] qui établit des relations entre les rayons des cercles en chaîne inscrits entre deux cercles, ou le problème de **Malfatti**, où il s'agit de tracer trois cercles tangents deux à deux et dont chacun touche deux côtés d'un triangle donné. Il le généralise même en le transportant dans l'espace.

---

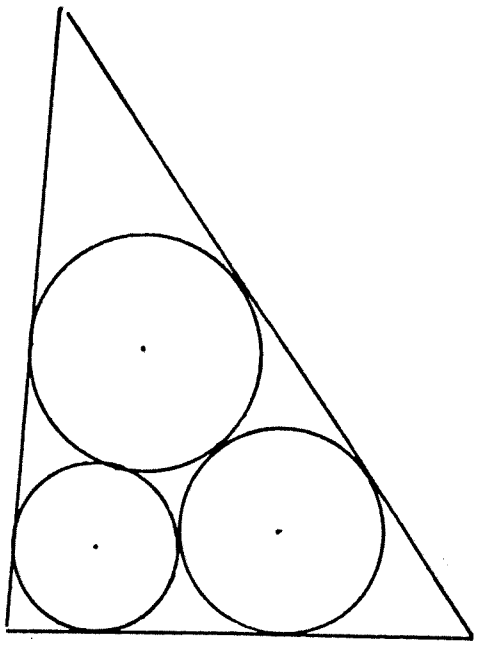
[13]Traduction Xavier Lefort et Anne Boyé

[14] Idem

[15]Si on a pu construire une chaîne de cercles (par exemple 11 cercles sur ma figure), tangents entre eux et tangents aux cercles C_1 et C_2, alors on pourra construire une autre chaîne d'autant de cercles, en partant d'un cercle quelconque tangent à C_1 et C_2.



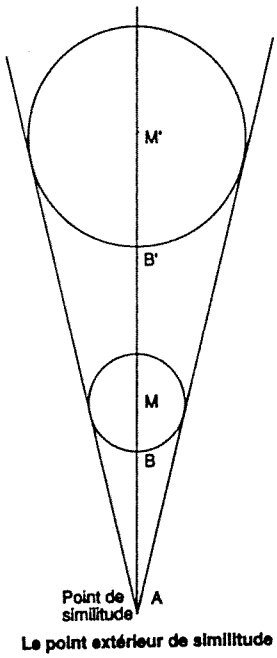
Problème de Pappus



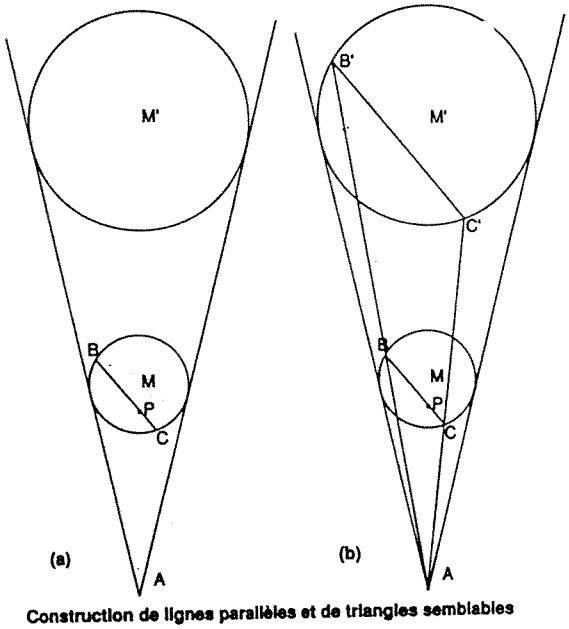
Problème de Malfatti

Pour avoir une meilleure approche de la simplicité des relations fondamentales sur lesquelles repose le ***"Développement général"*** , examinons en quelques principes.

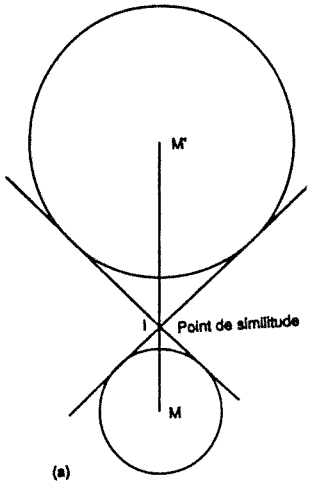
Deux cercles étant donnés, en traçant les tangentes communes, nous trouverons le point extérieur de similitude , ou le point intérieur de similitude (qui sont pour nous les centres d'homothétie). L'on peut alors établir une correspondance (appelée projection) entre les points de deux cercles puis entre tous les points du plan.

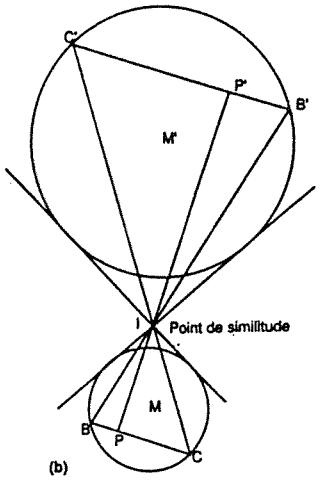


Le point extérieur de similitude



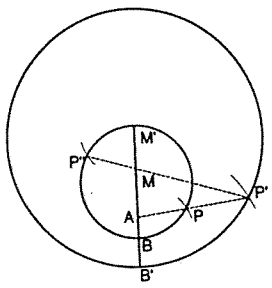
Construction de lignes parallèles et de triangles semblables

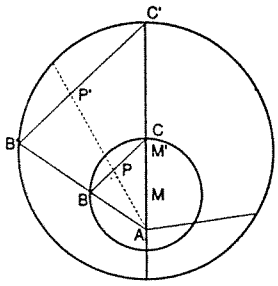




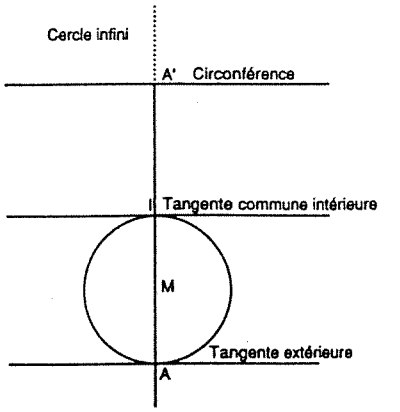
La construction du point intérieur de similitude

Cette correspondance, par continuité, peut s'établir même si l'on part de cercles intérieurs l'un à l'autre. La "ligne de similitude" sera la droite joignant les centres des cercles, et les rayons détermineront des arcs correspondants ; ensuite par le système des parallèles la correspondance pourra être poursuivie.



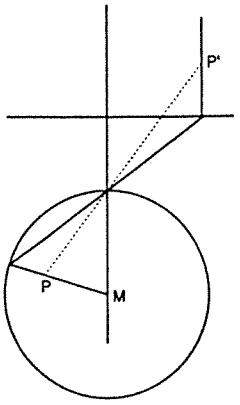


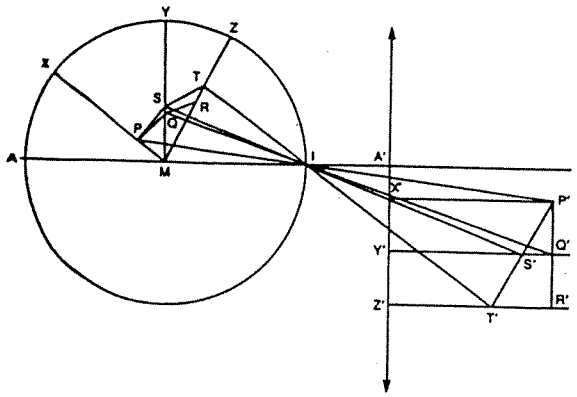
Si l'un des cercles devient infiniment grand, par exemple le cercle M' des figures précédentes, la circonférence devient une droite, mais elle coupe toujours l'axe des centres au point A' fixe. Le centre de M' s'éloigne indéfiniment sur la droite des centres, donc la "droite circonférence" sera perpendiculaire à la droite des centres ; pendant ce temps les tangentes communes intérieures et extérieures feront entre elles un angle de plus en plus grand, et le cercle M sera de plus en plus proche du point d'intersection des tangentes ; en fin de parcours, nous obtenons la figure ci-dessous :



Les points de similitude entre des cercles fini et infini

Les rayons du cercle infini passent par le centre rejeté à l'infini donc ce sont des demi-droites perpendiculaires à la "droite circonférence". Pour faire correspondre les points du cercle fini à ceux du cercle infini nous les utilisons donc. Il est à remarquer que le passage du fini à l'infini a induit cependant un changement notable, une "discontinuité", puisque les images de points non alignés, comme PQR sont des points alignés, P'Q'R'.





Ainsi va naître la géométrie projective de Steiner qui sera mise en place véritablement dans le ***"Développement systématique"***. Pour cette géométrie, il définit des formes fondamentales, telles les faisceaux de droites ou les faisceaux de coniques, entre lesquelles il fait intervenir une correspondance, la perspectivité (que l'on peut tout à fait rapprocher de la perspective des peintres).

Le français Poncelet a déjà consacré une publication à cette géométrie en 1822. Il n'est pas très facile de démêler les influences réciproques de ces deux créateurs ; il est fort probable cependant que Steiner ait eu connaissance du travail de Poncelet, qui se plaindra un peu plus tard de ne pouvoir lire Steiner par méconnaissance de l'allemand. Il reste au demeurant que leurs préoccupations sont communes mais que leur œuvre se développera de façon indépendante et originale.

Pour ces ressemblances cependant, il n'est pas inintéressant de noter ce que Gergonne écrira dans une note de ses annales en 1827[16]:

"Je persiste à penser que M.Poncelet a gravement compromis ses doctrines en mêlant au classique que tout le monde admet, le romantisme que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel on discute encore."

Ce romantisme mis en lumière par Gergonne réside principalement dans le principe de continuité (un peu comme il a été vu plus haut)qui permet d'affirmer que certaines propriétés sont conservées si une figure varie par degrés insensibles, et engendrera des points imaginaires (d'intersections par exemple), et des points à l'infini (tels les intersections de droites parallèles).

Une quantité de propriétés découlent soudain de ces quelques principes simples. De nombreux théorèmes qui semblaient ne posséder aucune relation entre eux viennent s'ordonner dans une vaste structure.

La géométrie projective par le biais de la perspectivité pourrait donc être la science du mouvement, la théorie de la métamorphose des figures ; elle recherche ce qui est "invariant" dans la métamorphose, la réalité sous jacente qui est cachée dans la figure, et en fait un procédé de démonstration.

Le ***"Développement systématique"*** est un ouvrage fondamental, et c'est un peu le couronnement de cette éducation que Steiner a reçue chez Pestalozzi et des idées qu'il essaiera de transmettre au long de sa vie à ses élèves, à travers des méthodes très personnelles comme nous l'avons vu plus haut.

La vision de l'espace, sa représentation, sa correspondance avec le monde intérieur, celui de l'âme de l'homme sont finalement au coeur de la vie et de l'oeuvre de notre mathématicien. Aussi pour terminer je ne peux m'empêcher de rapprocher Gaspard David Friedrich, un autre peintre allemand du début du XIX° siècle, qui écrivait: *"Clos ton œil physique afin de voir d'abord avec l'oeil de ton esprit"*, et le vieux Jacob Steiner se plaignant à son ami Schläfli de sa fatigue qui l'empêchait de travailler car *"lorsqu'il fermait les yeux pour voir , il s'endormait."*

Indications bibliographiques :

BRUNSCHWIG, H., *Société et romantisme en Prusse au XVIII° siècle*, Paris, 1973, Flammarion, p.32-40.
BURCKHARDT, J.J., article Steiner, D.S.B.
GEISER, C.F., *Zur Erinnenrung an Jakob Steiner*, Schaffhausen, 1874.
SYDLER,J.P., *Aperçus sur la vie et l'oeuvre de Jacob Steiner*, Bulletin de la société mathématique de Suisse, juin 1964, in Enseignement mathématique, 2nd ser, 11 (1965), p 240-241.
Annales de mathématiques pures et appliquées, sous la direction de Joseph Diez Gergonne, tome XVII et XVIII.
Encyclopédie de sciences mathématiques, édition française, Gauthier-Villars, 1915, réed. Jacques Gabay, Paris, 1991, tome III, vol.1, p 185-259.
Histoire mondiale de l'éducation, tome II, publié sous la direction de Gaston Mialaret et Jean Vial, Paris, 1974, PUF.

[16]Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XVIII, p.135