

RENCONTRE REGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

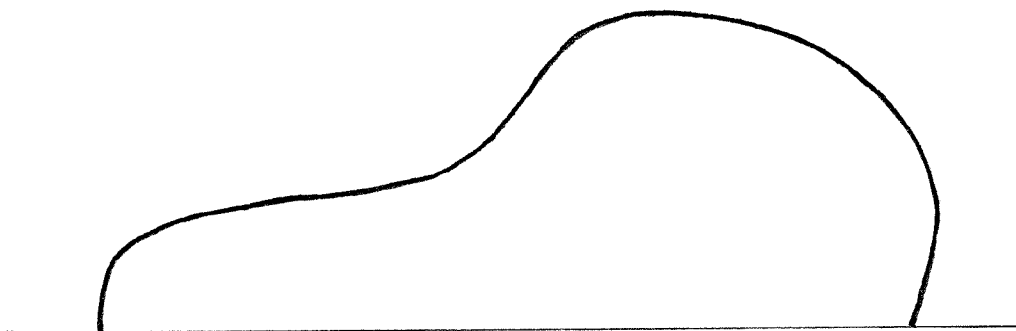
organisée par l'APMEP

Dans l'après-midi du samedi 30 mars 1996, une cinquantaine de professeurs de mathématiques se sont réunis au lycée Jean Monnet de Strasbourg. Une dizaine d'entre-eux avaient démarré cette rencontre par un déjeuner de travail au "Dodo gourmand" de Neudorf : tout un programme ! Les participants ont débuté l'après-midi avec une conférence plénière présentée par Etienne Meyer et intitulée "courbes de Bezier, Bspline et autres NURBS", avant de se répartir en différents ateliers aux thèmes variés : "l'enseignement des mathématiques en lycée" animé par Jean-Pierre Richeton, "les jeux à utiliser en classe" animé par François Drouin, et "la dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques" animé par Richard Cabassut. La dernière activité de cet après-midi, avant l'apéritif, fut l'assemblée générale ponctuée par l'élection d'un nouveau comité de la régionale APMEP d'Alsace. Pendant toute la rencontre, un stand était installé avec des brochures IREM et APMEP pour la consultation ou la vente.

COURBES DE BEZIER, BSPLINE ET AUTRES NURBS

Par Etienne Meyer

Un concepteur (dessinateur, technicien ou autre) aimerait que l'on puisse obtenir la "forme" F représentée sur le dessin n°1 et il lui faudrait des formules pour étudier, modifier, construire, réaliser ... cette forme.



Des formules ? oui, mais sous quelle forme ? La solution que nous allons retenir ici est celle des courbes paramétrées : dans un repère, les coordonnées d'un point courant de la courbe C sont données en fonction d'un paramètre à faire varier entre deux valeurs. Soit :

$$M(t) \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} \text{ avec } t \in [a, b].$$

Le résultat fondamental sur les courbes paramétrées est le suivant.

Appelons $\vec{V}(t)$ le vecteur de coordonnées $(x'(t); y'(t))$. Si ce vecteur n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(t)$.

Une interprétation importante des courbes paramétrées est donnée par la cinématique : en interprétant le paramètre t comme étant le temps, la courbe est la trajectoire d'un mobile $M(t)$, la loi horaire est définie par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point $M(t)$, le vecteur dérivé $\vec{V}(t)$ est le vecteur vitesse, et le vecteur dérivé de $\vec{V}(t)$ est le vecteur accélération.

Mais quelles formules choisir ? Et à partir de quoi ?

Première idée : l'interpolation

- Choisir des points de la "forme" F en donnant leurs coordonnées dans un repère fixé.
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **par** ces points : on prendra des polynômes et on parlera d'interpolation polynomiale.

Deuxième idée : l'approximation

- Choisir des points de la "forme" F
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **près de** ces points.

Nous n'allons pas aborder ce point de vue. C'est toutefois un aspect très important et très utile dans de nombreux domaines.

Troisième idée : interpolation par morceaux

- décomposer la courbe en plusieurs morceaux
- appliquer la première idée avec la contrainte : les courbes ont mêmes tangentes aux points de raccordement.

Une toute autre idée : les courbes à pôles

Il s'agit d'un procédé de définition de courbes qui permet d'en modifier simplement l'allure : ce n'est pas très lumineux pour l'instant, mais vous allez voir, c'est terriblement efficace !

Le premier qui en a eu l'idée et qui l'a appliquée aux problèmes de l'industrie automobile est P. Bézier, ingénieur chez Renault, encore en vie. Depuis, son idée a été exploitée par bien d'autres et a donné naissance à ce qu'on appelle les courbes à pôles, parmi lesquelles il y a les courbes de Bézier, les B-Splines et plus récemment, les NURBS (Non Uniform Rational BSpline).

Nous allons examiner rapidement quelques solutions liées à la première idée et mettre en évidence les inconvénients de cette approche. Nous parlerons de quelques améliorations possibles mais sans trop approfondir.

En illustrant la troisième idée avec des fonctions très simples, nous allons mettre en évidence les points essentiels permettant le développement de la quatrième idée.

Nous montrerons ensuite les qualités essentielles des courbes à pôles et nous parlerons des améliorations apportées sans trop rentrer dans les aspects de technique mathématique.

Courbes d'interpolation polynomiale

Le problème est le suivant :

Etant donnés n points $M_0, M_1 \dots M_{n-1}$, déterminer deux polynômes $x(t)$ et $y(t)$ définissant une courbe C passant par ces n points.

Voici une solution possible : en choisissant $n-1$ comme degré des polynômes et en traduisant la contrainte par $M(k) = M_k$ pour k de 0 à $n-1$, le problème possède en général une solution et une seule.

Examinons ceci sur un exemple :

Choix des points : $(0;0), (1;3), (11;5), (17;10), (27;6), (26;0)$.

Résultat (Dessin 2.1) : ce n'est pas très fameux !

Augmentons le nombre de points :

Après insertion du point $(5;4)$, on obtient le Dessin 2.2

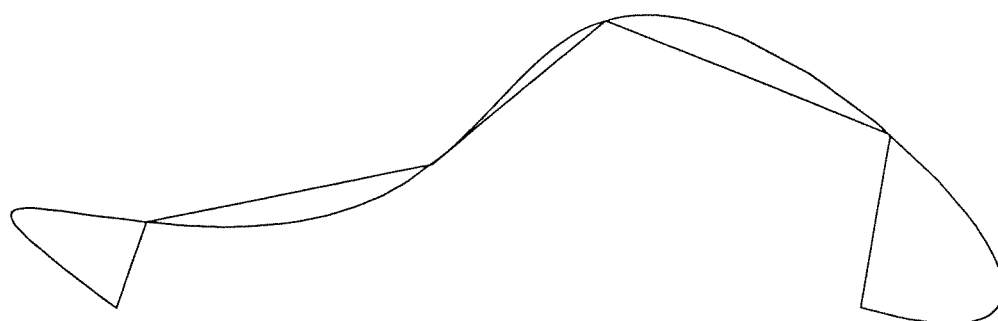
Après insertion supplémentaire de $(27;2)$, on obtient le Dessin 2.3 : cela ne s'arrange pas !

Ce phénomène est irrémédiable et bien connu : la solution ne consistera pas à augmenter le nombre de points !

Une amélioration est cependant possible en choisissant "mieux" les "nœuds", c'est à dire les valeurs du paramètre pour lesquelles $M(t)$ est l'un des points donnés.

Sans trop approfondir cette question, voici (Dessin 2.4) ce que l'on obtient en prenant comme suite des noeuds, $(0,1,5,8,12,14)$ à la place de $(0,1,2,3,4,5)$. Sur quoi ce choix est-il basé ? Voici la réponse : les valeurs du paramètre sont proportionnelles à la longueur de la ligne polygonale depuis M_0 .

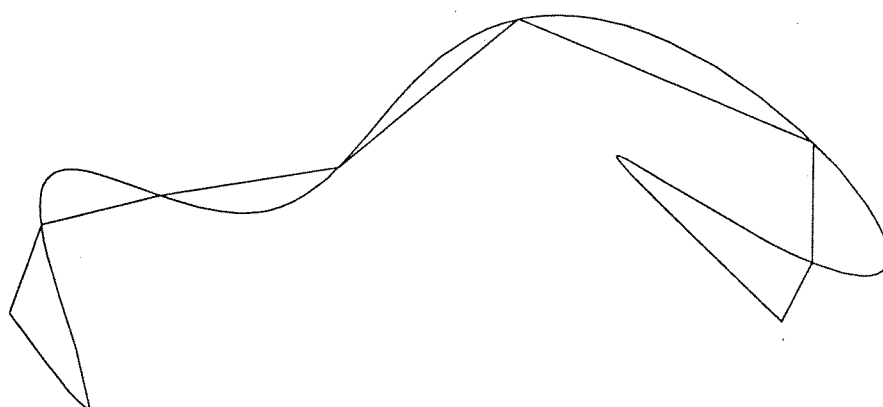
Une question importante se pose à priori : la courbe obtenue par ce procédé d'interpolation polynomiale, est-elle indépendante du repère dans lequel se font les calculs ?



2.1



2.2



2.3

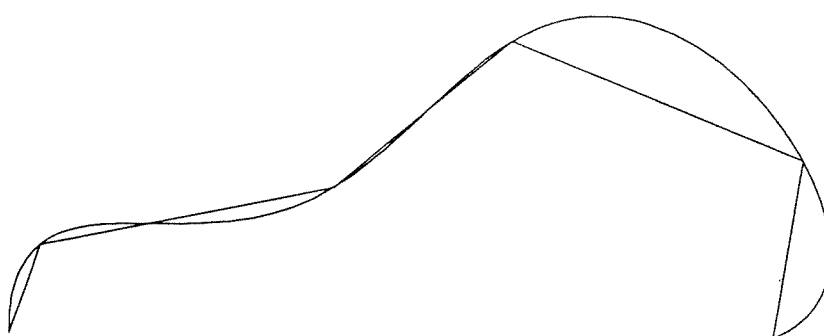


Figure 2

2.4

Interpolation par morceaux

En poussant l'idée à l'extrême voici la manière dont on peut poser et résoudre le problème :

- choisir n points de la courbe à obtenir
- pour chaque couple de points consécutifs, chercher une courbe passant par ces deux points et, sauf pour la première, tangente à la précédente au point de raccord.

On a donc, sauf pour la première courbe, trois conditions à respecter. D'où l'idée toute simple de chercher un paramétrage à l'aide de polynômes du second degré (en faisant varier à chaque fois le paramètre entre 0 et 1). Il restera encore un choix à effectuer pour le départ. La contrainte de tangence sera traduite par $\vec{V}_k(1) = \vec{V}_{k+1}(0)$.

Voir le résultat obtenu avec $\vec{V}(0) = (0;1)$ au dessin 3.1

Voir le résultat obtenu avec $\vec{V}(0) = (2;3)$ et en inversant la liste des points au dessin 3.2

Ce n'est toujours pas très fameux, mais des améliorations sont possibles :

- en remplaçant $\vec{V}_k(1) = \vec{V}_{k+1}(0)$ par $\vec{V}_k(1) = \lambda \cdot \vec{V}_{k+1}(0)$ (ce qui suffit pour la tangence des courbes). En choisissant λ pour que $\|\vec{V}_k(0)\| = \|\vec{M}_k \vec{M}_{k+1}\|$, voir ce que l'on obtient au dessin 3.3 (avec la liste initiale des points et un vecteur vitesse colinéaire à $(0;1)$ au départ)
- en prenant des polynômes de degré 3 : la liberté supplémentaire de raccord peut se traduire de diverses manières. Une solution consiste à imposer l'égalité des vecteurs vitesse et accélération. La liberté au départ peut se traduire par exemple en imposant des vecteurs accélération nuls au départ et à l'arrivée (voir dessin 3.4). C'est une solution effectivement utilisée, cumulée d'ailleurs avec l'amélioration précédente.

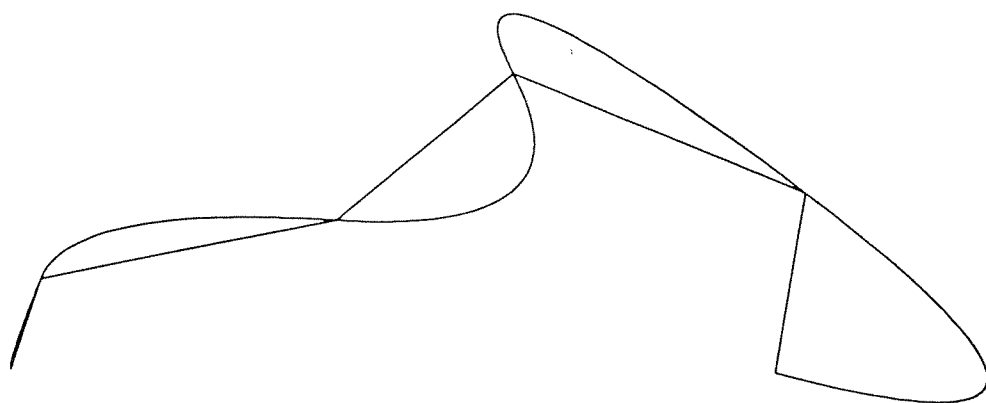
Etude de l'interpolation quadratique entre deux points

Problème :

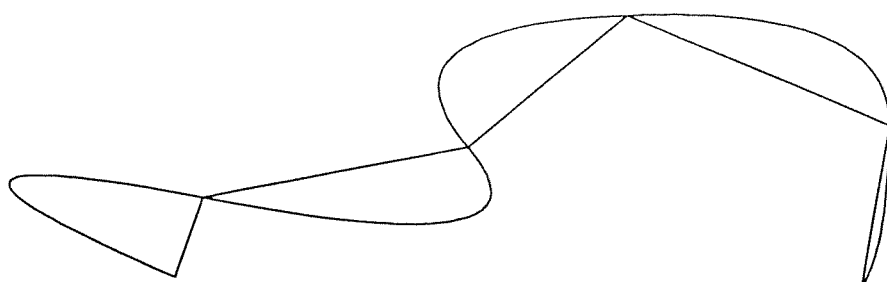
étant donné deux points M_0 et M_1 et un vecteur $\vec{V}_0$, déterminer trois vecteurs A , B et C

tels que la courbe paramétrée par $\vec{OM}(t) = t^2.A + t.B + C$ vérifie :
$$\begin{cases} M(0)=M_0 \\ M(1)=M_1 \\ \vec{V}(0)=\vec{V}_0 \end{cases}$$

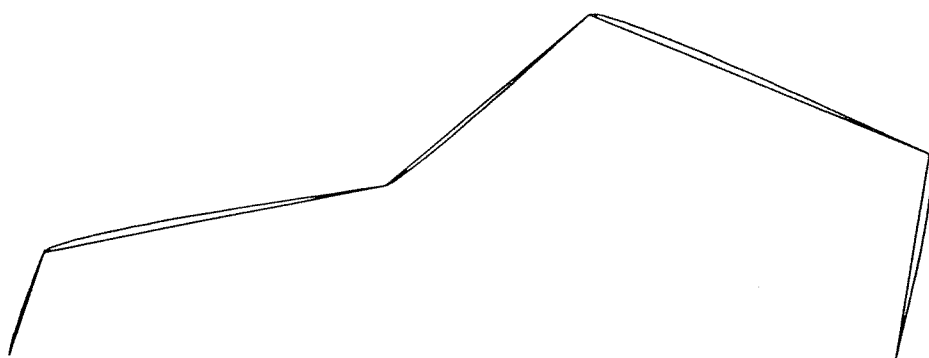
Ce problème est facile à résoudre et on obtient : $A = \vec{M_0 M_1} - \vec{V}_0$; $B = \vec{V}_0$; $C = \vec{OM_0}$



3.1



3.2



3.3



Figure 3

3.4

Remarque 1 : la courbe obtenue ne dépend pas du repère comme le montre clairement le résultat : $\overrightarrow{M_0M}(t) = t^2 \cdot \overrightarrow{M_0M_1} + t(1-t) \cdot \overrightarrow{V_0}$

Remarque 2 : en fait, il y a une écriture bien plus belle encore.

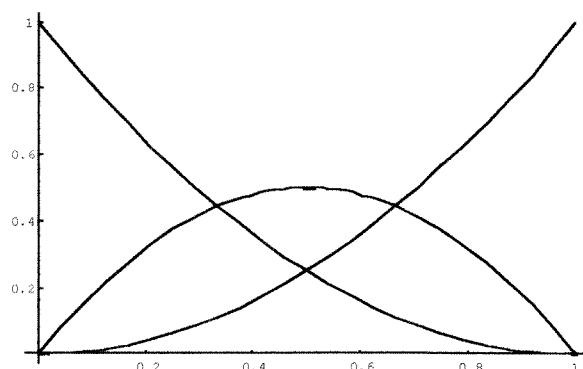
Faisons intervenir, par raison de "symétrie", le vecteur $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V(1)}$ et appelons P le point d'intersection des tangentes en M_0 et M_1 .

P est le milieu du segment M_0N_0 et du segment M_1N_1 , où N_0 et N_1 sont définis par $\overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = -\overrightarrow{V_1}$.

On obtient simplement : $\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OM_0} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OP} + t^2 \cdot \overrightarrow{OM_1}$.

Ceci s'interprète de la belle manière suivante : **M(t) est le barycentre des points M_0 , P et M_1 affectés des coefficients $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 dont la somme est bien égale à 1.** En effet, il s'agit de la formule du binôme appliquée à $((1-t) + t)^2$.

Voici comment évolue avec le paramètre t, les poids des points, leur importance, la force avec laquelle ils attirent la courbe vers eux :



Remarque 3 : construction du point courant et de la tangente courante.

$$\overrightarrow{V}(t) = 2(1-t) \cdot \overrightarrow{OM_0} + 2(1-2t) \cdot \overrightarrow{OP} + 2t \cdot \overrightarrow{OM_1}$$

Soit P_1 le barycentre de $(M_0, (1-t))$ et (P, t) ; soit P_2 le barycentre de $(P, (1-t))$ et (M_1, t)

Eh bien : M(t) est le barycentre de $(P_1, (1-t))$ et (P_2, t) et $\overrightarrow{V}(t) = 2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$

|| Dans ce petit exemple, et d'ailleurs dans les résultats que nous allons aborder maintenant, il y a l'essentiel des idées et des résultats des courbes de Bézier et des B-Splines.

Les courbes de Bézier

Définition :

Soit $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ $n+1$ points appelés pôles.

La courbe de Bézier définie par ces pôles est la courbe paramétrée définie par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \cdot \vec{OP}_k, \quad t \text{ variant de } 0 \text{ à } 1 \text{ avec } B_{n,k}(t) = C_n^k (1-t)^{n-k} t^k \text{ (Polynômes de Bernstein)}$$

Propriétés :

- $M(t)$ est le barycentre des points P_k affectés des coefficients $B_{n,k}(t)$: la définition ci-dessus est donc indépendante du repère
- $M(0) = P_0$; $M(1) = P_n$
- $\vec{V}(0)$ est dirigé par $\vec{P_0P_1}$; $\vec{V}(1)$ est dirigé par $\vec{P_{n-1}P_n}$
- Pour tout t , $M(t)$ est à l'intérieur du polygone convexe défini par les pôles
- l'influence de P_k est maximale pour $t = k/n$.
- construction du point courant et de la tangente courante : c'est le même principe que pour l'interpolation quadratique exposée ci-dessus. On les obtient par barycentres successifs (et pour obtenir les points les plus sous influence des pôles, faire ces constructions pour $t = k/n$).
- l'influence d'un pôle : elle est globale, mais essentielle sur la partie de la courbe voisine du point correspondant : voir figure 4 ci-contre.

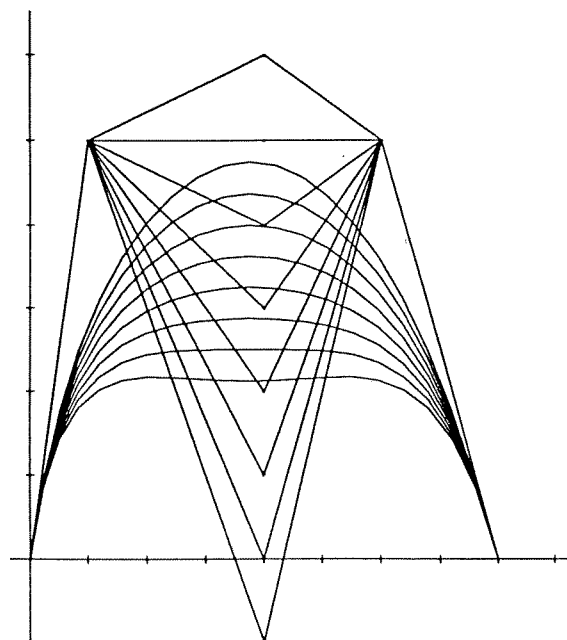
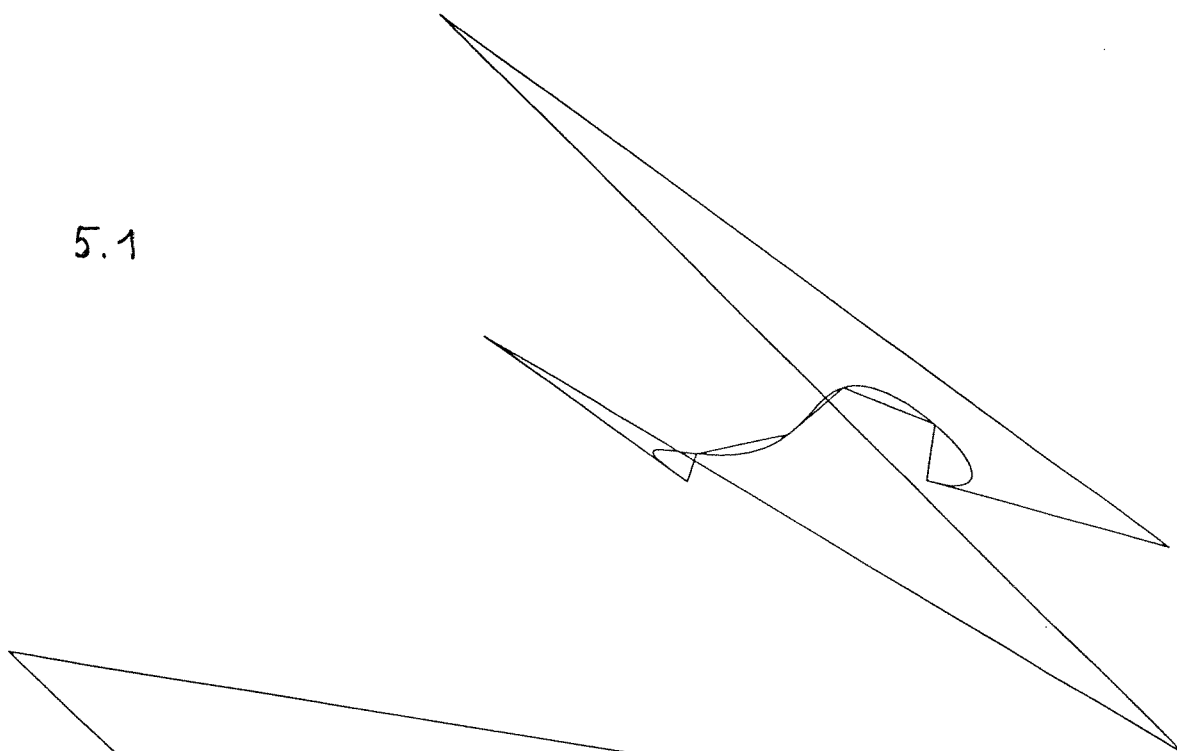


Illustration :

Revenons à notre problème initial : recherche d'une courbe paramétrée, maintenant sous forme de courbe de Bézier, approchant la forme donnée par le dessin n°1. Il s'agit de déterminer les pôles. Un technicien, dans son bureau d'études, le fera par essais-erreurs ou à partir d'exemples précédemment réalisés. Pour les besoins de cet article et l'intérêt mathématique que cela présente, procédons différemment. Cherchons (en résolvant un système linéaire) les pôles $P_0, P_1, \dots, P_5$ définissant une courbe de Bézier, de telle sorte que celle-ci passe par les six premiers points $M_0, M_1, \dots, M_5$ choisis sur la "forme". On aura en particulier $P_0 = M_0 = (0,0)$ et $P_5 = M_5 = (26,0)$. Mais les autres pôles P_i auront des positions bien différentes des points M_i et cette courbe identique à la courbe obtenue pour le dessin 2.1. Le résultat, on le sait, n'est guère satisfaisant pour le problème posé (voir dessin 5.1, sur lequel figure le polygone des points choisis sur la forme, le polygone des pôles calculés et la courbe de Bézier correspondante passant bien par les cinq points

choisis). Mais désormais nous disposons des pôles, et grâce à leurs propriétés (et à l'interprétation géométrique de ces propriétés) nous "savons" comment déplacer ces pôles pour que la courbe de Bézier associée donne un résultat satisfaisant notre attente. (l'Ouvert n'étant pas encore une revue électronique, il vous faut imaginer les manipulations faites pour aboutir au dessin 5.2 ; la courbe de Bézier obtenue ne passe plus exactement par les six points choisis mais fournit un résultat global plus satisfaisant).

5.1



5.2

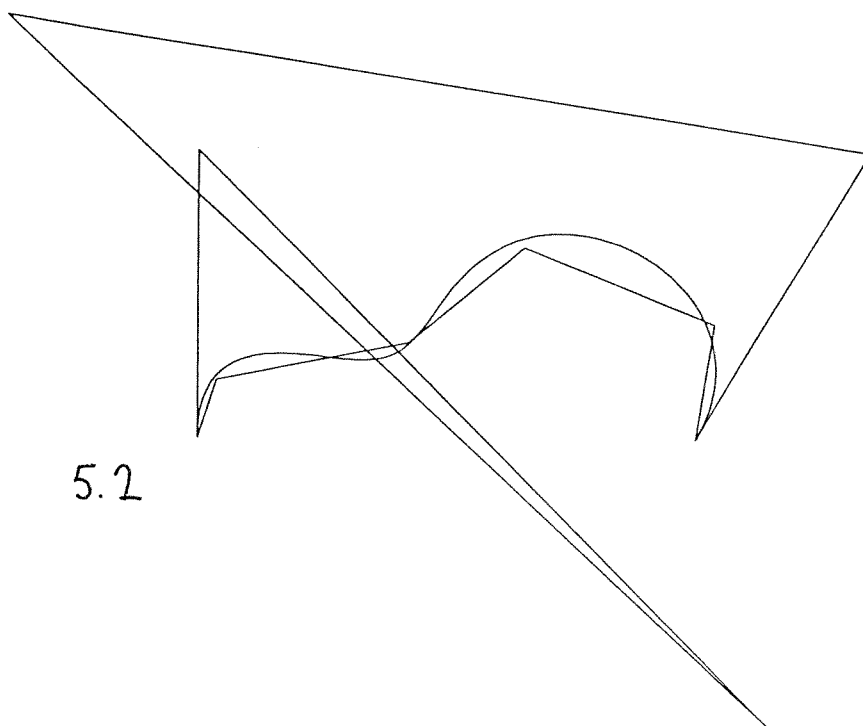


Figure 5

Les B-Splines

Parmi les inconvénients des courbes de Bézier, il y a le fait que la modification d'un pôle entraîne la modification de toute la courbe (avec toutefois une importance de la modification plus grande près du point correspondant au pôle) et surtout le fait que le degré des polynômes qui interviennent (et donc la complexité des calculs) est égal au nombre de pôles (moins 1).

Pour réduire ces inconvénients tout en gardant les avantages des courbes de Bézier, une solution consiste à changer les polynômes de bases qui interviennent pour le calcul de $M(t)$.

On aura toujours $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k(t) \cdot \overrightarrow{OP}_k$ mais avec d'autres fonctions $B_k(t)$. Celles-ci

seront définies à partir d'une séquence nodale $(t_0, t_1, \dots, t_p)$, le paramètre t variant de t_0 à t_p , mais garderont les propriétés fondamentales suivantes : pour tout t , $0 \leq B_k(t) \leq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{k=n} B_k(t) = 1.$$

Pour assurer une influence uniquement locale, les fonctions B_k seront nulles sur une bonne partie de l'intervalle $[t_0 ; t_p]$.

Les représentations de ces fonctions dans le cas d'ordre 2 et pour la séquence nodale $(0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$ sont données par la figure 6.

Ces fonctions ont des propriétés de calcul analogues aux polynômes de Bernstein (calcul récursif, calcul des dérivées) et procurent une grande souplesse tout en permettant l'usage de polynômes de faible degré.

Les polynômes de Bernstein apparaissent d'ailleurs comme des cas particuliers de Bsplines (avec des séquences nodales uniformes).

Les N.U.R.B.S.

Les possibilités offertes par les Bsplines ne règlent cependant pas le problème de la représentation du cercle comme une courbe à pôles. Or cette représentation serait d'une grande utilité : elle permettrait une uniformisation du type de courbes utilisées, "nécessaire" pour des questions de normalisation et de simplification des définitions de surface.

Un cercle ne peut pas être obtenu comme courbe paramétrée à l'aide de polynômes.

Essayons de nous en convaincre. Le degré 2 devrait suffire si cela était possible.

Or une courbe polynomiale de degré 2 est une parabole.

(Démonstration laissée aux soins du lecteur)

L'idée simple suivante va nous permettre d'obtenir une paramétrisation (non polynomiale) de tout arc de conique et en même temps nous fournir les bases de la généralisation des Bsplines : les NURBS.

Une parabole est une section particulière d'un cône. En faisant une projection conique de cette parabole à partir du sommet du cône et sur un plan orthogonal à l'axe du cône, on obtient bien un cercle (et d'autres coniques, en projetant sur d'autres plans).

D'où l'idée de définir une courbe de Bézier de degré 2 dans l'espace (une parabole) et de la projeter (en projection conique) sur un plan ne passant pas par le sommet. En prenant comme plan le plan d'équation $Z = 1$, cela revient à associer au point de l'espace (X, Y, Z) le point du plan $(x=X/Z, y=Y/Z)$. Cela revient en fait à faire de la géométrie projective !

Ce procédé se généralise aux courbes de Bézier de degré quelconque et même aux Bsplines.

Voici ce que cela donne pour les courbes de Bézier.

Point de vue théorique :

Soit $P_k(X_k, Y_k, Z_k)$ des pôles de l'espace.

$M(t)$, point de l'espace, est défini par $\sum B_{n,k}(t) \cdot P_k$, c'est-à-dire : $X(t) = \sum B_{n,k}(t) \cdot X_k$ et de même pour $Y(t)$ et $Z(t)$.

$$\text{On définit alors } m(t), \text{ point du plan, par } \begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot X_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \end{cases}$$

$$\text{En posant } x_k = X_k/Z_k \text{ et } y_k = Y_k/Z_k \text{ on obtient : } \begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k \cdot x_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k \cdot y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot Z_k} \end{cases}$$

Ceci fait encore apparaître $m(t)$ comme le barycentre des points $p_k (x_k, y_k)$ et on conserve ainsi une bonne partie de l'interprétation fondamentale des courbes à pôles.

Point de vue pratique : formules des courbes de Bézier rationnelles (cas particulier des NURBS)

Soient $P_k (x_k, y_k)$, $n+1$ pôles (du plan) et $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ des poids (nombres positifs).

On définit $M(t)$ par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k x_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k} \\ y(t) = \frac{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k y_k}{\sum B_{n,k}(t) \cdot h_k} \end{cases}$$

Les arcs de coniques peuvent être paramétrés de cette manière. En particulier, voici le choix des pôles et des poids pour obtenir l'arc de cercle de centre C, d'extrémités A et B :

$P_0 = A$, $P_2 = B$ et P_1 est le point d'intersection des tangentes en A et B.
 $h_0 = h_2 = 1$ et $h_1 = \cos(a)/2$ où a est l'angle intercepté.

Bibliographie : de très nombreux ouvrages existent sur la question.

En voici quelques uns :

A practical guide to splines - Carl de Boor - Springer-Verlag

Curves and surfaces for Computer aided geometric design - G. Farin - Academic Press

Modélisation et construction de surfaces pour la CAO - JC Léon - Hermès

Pour l'enseignement en BTS, on pourra se servir de Courbes de Bézier et B.Splines édité par l'IREM de Paris Nord.

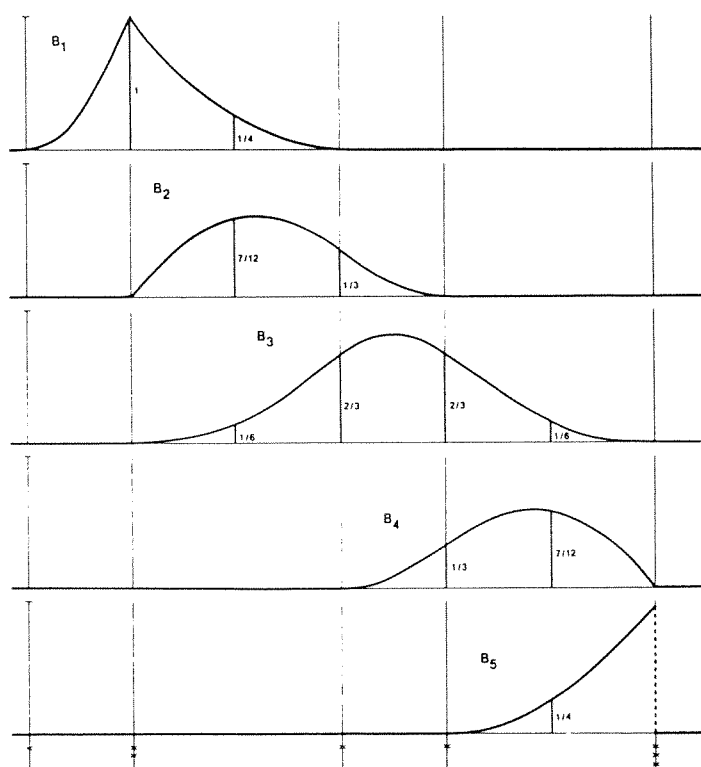


Figure 6

COMPTE-RENDU DE L'ATELIER "*ECHANGES SUR L'ENSEIGNEMENT EN LYCEE*"

Par Jean-Pierre Richeton, à l'époque membre du bureau national de l'A.P.M.E.P, chargé des lycées

"L'épreuve de mathématiques au bac permet-elle d'évaluer l'aptitude à la démarche scientifique?"

"Que signifie la réussite au bac en mathématiques?"...

"Quid des mathématiques du citoyen?"...

Questions déjà maintes fois posées... et qui le restent...

En tout cas elles ont permis, comme lors de la dernière réunion de la commission lycée de l'A.P.M.E.P, d'alimenter cet échange de manière fructueuse, en faisant encore avancer un peu plus notre réflexion, comme vous pourrez en juger par les interventions qui suivent.

- S'il est tout à fait souhaitable, qu'un jour d'examen, les élèves bénéficient d'indications leur permettant de ne pas rester "*bloqués*" ou leur permettant de pallier une erreur éventuelle aux répercussions disproportionnées, comment ne pas regretter cependant la rédaction des sujets actuels où les élèves sont guidés à l'excès, jusqu'à donner les réponses à certaines questions ainsi que **la** (?) méthode à utiliser.

N'est-ce pas en contradiction avec les objectifs du programme qui affirment viser à "*l'acquisition de méthodes*" ou à entraîner les élèves "*à choisir et utiliser les outils pertinents parmi...*"?

Où est la formation à "*la capacité à mettre en œuvre une démarche*"? et est-ce là la formation du citoyen tant prônée?

-Pourtant les élèves aiment *chercher, inventer*... Il suffit pour s'en persuader de constater le succès du *Rallye mathématique d'Alsace* ou de *Mathématiques sans frontières*...

- En classe aussi, quand on peut donner le temps à nos élèves pour les mettre dans une situation de véritable recherche (en modules par exemple), ceux-ci peuvent alors nous dévoiler toutes leurs qualités : *initiative, créativité, imagination* etc...

- D'ailleurs, peut-on admettre encore longtemps que perdure dans l'esprit du public et surtout de nos élèves qu'il y ait deux sortes de mathématiques : l'une, en classe, subie et rébarbative et l'autre ludique et enrichissante...?

- Il y a quelques années, dans le cadre d'un groupe "*heuristique*" de l'IREM de Strasbourg, des collègues avaient entraîné leurs élèves, à raison d'une heure par semaine, à la recherche de problèmes "*ouverts*". Cette expérience a permis de constater que

certain problèmes rédigés de deux façons, l'une à l'énoncé "*ouvert*" et l'autre où l'énoncé était plus "*fermé*" ("*décortiqué*" en étapes...) ont été mieux réussis à partir de l'énoncé "*ouvert*"...

- La commission lycée de l'A.P.M.E.P. propose d'amorcer un véritable "*virage*" en introduisant au bac un exercice de type "*recherche*" à **condition d'évaluer les candidats sur leurs démarches**, qu'elles soient fructueuses ou non, pourvu qu'elles soient explicitées. La **présence** d'un tel exercice **au bac** semble en effet la condition pour que les pratiques évoluent dans le sens souhaité par les objectifs des programmes cités plus haut.

- Mais, comme cela a déjà été dit, la "*règle doit être claire*" : il nous faut auparavant nous y préparer et préparer nos élèves et on ne se privera sans doute pas de nous objecter que ce type de démarche est coûteuse en temps.

- Autre "*inconvenient*", les effets de ce type de démarche ne sont pas immédiatement visibles. A l'inverse, par exemple, d'une séance de T.D. suivie d'une interrogation... mais qu'en est-il quelques semaines après? On sait en effet combien les élèves travaillent leur "*mémoire à court terme*" pour le lendemain voire les 5 minutes qui suivent, juste avant une interro...

- Se pose alors le problème de l'évaluation...

Le sentiment d'échec est écrasant pour qui n'est jamais en situation de réussite. Par conséquent il est important de pouvoir encourager un élève surtout s'il ne réussit pas à résoudre complètement un problème. Lors du dernier rallye mathématique d'Alsace, un professeur a eu le bon réflexe de demander aux élèves de rendre leurs brouillons avec leurs copies. Le résultat fut assez éloquent : en effet, autant certaines copies ont pu se révéler plutôt vides, autant certains brouillons se sont révélés riches des démarches essayées mais non dévoilées sur la copie. Ce qui tendrait à prouver qu'effectivement les élèves n'osent pas rendre un travail non "*bouclé*". D'autre part ces brouillons nous dévoilent combien nos élèves sont capables d'*initiatives* et d'*imagination* si l'on en juge par les essais de démonstrations qu'on y trouve.

En cela les exercices style "*narration de recherche*" peuvent, entre autres, permettre ces encouragements en valorisant, par exemple, toute piste essayée par l'élève même si elle n'a pas abouti. Une autre phrase est de l'entraîner à travailler par contre-exemples pour examiner si telle ou telle démarche a des chances d'être correcte ou au contraire pour qu'il se rende compte qu'il a fait "*fausse route*" et d'éviter que par la suite il puisse écrire une chose et son contraire comme c'est encore, hélas, trop souvent le cas aujourd'hui avec nos élèves. De toute évidence notre façon de noter serait à revoir pour ce type d'exercices...

Mais tout en ne perdant pas de vue que le but reste la démonstration, nous pensons qu'il est possible en mathématiques d'évaluer ce type de démarche, à l'instar de nos collègues de philosophie, ou d'histoire-géographie, par exemple.

Cependant cette évolution dans nos pratiques n'est pas sans soulever déjà quelques craintes voire des objections très marquées.

RENCONTRE REGIONALE APMEP

- L'enthousiasme rencontré lors de rallyes ou d'épreuves du même genre restera-t-il le même si cela devient obligatoire?
- Ne risque-t-on pas de voir ce type de démarche abandonné très vite au profit des mathématiques "*classiques*" plus sécurisantes pour le professeur, voire pour l'élève lui-même, sans parler de ses parents...?
- Ne risque-t-on pas de retomber dans une nouvelle forme de "*bachotage*"?...
- Il faudra veiller à éviter que ce type de démarche n'aboutisse à un discours creux (on raconte...) et bel et bien exiger dans une phase ultérieure, une fois passé le "*déblocage*" souhaité, l'apprentissage de la démonstration et de sa rédaction ordonnée avec rigueur.

Suivent alors quelques interrogations sur la façon d'annoter les copies d'examen et en particulier celles du bac. Depuis, l'Inspection Générale a adressé une note aux IPR avec des recommandations répondant à nos préoccupations.

Le problème posé par les derniers modèles de calculatrices est également abordé. Une réflexion de fond est également engagée à l'A.P.M.E.P sur ce sujet.

Cet échange se termine sur un constat en guise de *sonnette d'alarme* : si les mathématiques sont nécessaires, aujourd'hui plus que jamais, à la formation de tout individu, alors comment interpréter les dernières réformes et la perte sèche du nombre d'heures à assurer en mathématiques que cela a entraînée (diminution des horaires + diminution des effectifs...), sans parler de l'appauvrissement des contenus...?

... à suivre... ?

DES JEUX EN CLASSE DE COLLEGE.

POURQUOI? COMMENT?

François Drouin
APMEP Lorraine - Collège Les Avrils - 55300 SAINT-MIHIEL

Le 30 Mars dernier, une vingtaine d'adhérents de la Régionale alsacienne de l'APMEP ont eu quelques éléments de réponse à la question posée en titre, à partir d'une expérience durant depuis plusieurs années en Lorraine (et au collège de Saint Mihiel en particulier). Voici quelques lignes pour les collègues n'ayant pu participer à cette journée.

POURQUOI?

L'introduction du jeu en classe permet de ne pas réserver l'activité ludique à une certaine élite apte à sortir de l'aspect "*Mathématiques calculatoires, utilitaires*" et autorisée à connaître le plaisir de la recherche, du jeu, de la découverte, alors que l'élève moyen se contenterait de "*compétences exigibles*".

Il est clair que d'autres pistes tendent aux mêmes buts : la pratique du problème ouvert, les rallyes mathématiques en classe entière par exemple.

L'introduction du jeu en classe est une des occasions d'analyser la perception par le geste, le toucher. L'usage du compas, de la règle, de l'équerre offrent des possibilités semblables mais ces objets sont trop souvent considérés comme de vulgaires outils. Les pièces d'un jeu s'utilisent de façon réfléchie et leur manipulation est un des éléments du jeu.

L'introduction du jeu en classe est également une des possibilités de remotivation d'élèves fâchés avec le travail intellectuel et les mathématiques en particulier. Les élèves acceptent d'être en situation de recherche pendant des durées dépassant l'heure de cours. L'élaboration et la construction de jeux en classe offre l'occasion de réintroduire des activités mathématiques dans des familles croyant avoir perdu contact avec cette matière.

Lors du déroulement d'un jeu, TOUT élève est actif, en situation de recherche et progresse vers le but final. En classe, trop d'élèves se contentent d'écouter ou de recopier les mathématiques faites par le professeur ou d'autres élèves.

COMMENT?

L'enseignant peut faire jouer ses élèves seuls ou à plusieurs. Les brochures "*Jeu de l'oie*" et "*Dominos mathématiques*" (IREM de Lorraine) présentent des exemples de jeux pour des groupes de 2, 3 ou 4 élèves. Le gain du jeu nécessite alors d'être meilleur (ou plus chanceux...) que ses adversaires, tandis que dans le cas du jeu en solitaire, ce gain n'est acquis que par la volonté de réussite du joueur.

Pour l'enseignant, la prudence s'impose alors. En cas d'échec, l'élève joueur doit malgré tout s'estimer en réussite partielle et croire en ses possibilités de progrès. Il aura par exemple placé **presque toutes** les pièces du jeu, d'où le succès constaté en classe des "*24 carrés de Mac Mahon*" (Jeux 1, APMEP) et des "*combis*" (Ludi-Math n°1, APMEP de Poitiers).

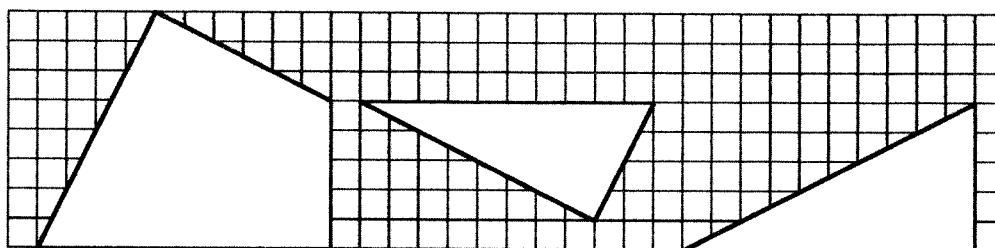
La règle du jeu doit être rapidement assimilée (carrés de Mac Mahon et combis déjà cités, polycubes comme le cube Soma (Jeux 3, APMEP), puzzles de la famille du Tangram (Jeux 1, APMEP).

Ces quelques conditions respectées, il n'est que peu d'élèves refusant ce type d'activités. Reste alors à l'enseignant à créer des prolongements mathématiques ou utiliser les mathématiques présentes à l'intérieur du jeu.

Pour l'observateur ou le joueur, d'autres questions se posent :

QUEL ASPECT DOMINE : LE JEU OU L'ACTIVITE MATHEMATIQUE?

Mettons-nous un instant à la place de l'élève dans sa classe (ou à la place de l'enseignant lors d'un stage de formation).

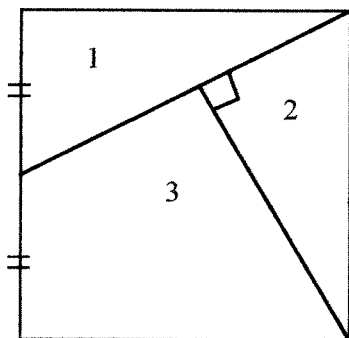


Voici trois pièces d'un puzzle.

Utilise ces pièces pour réaliser un parallélogramme non rectangle, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un carré, un rectangle non carré.

Réalisons ces pièces sur du carton, cherchons ce qui est demandé et notons nos réactions, nos stratégies, notre temps de recherche.

Le hasard tient une grande place et l'élève n'est guère tenté de faire une analyse des pièces et des configurations à obtenir.



Réalisons maintenant cette deuxième activité :

Découpe les trois pièces dans un carré de carton de 10 cm de côté.

Avec les trois pièces, réalise un parallélogramme non rectangle, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un rectangle non carré.

COMMENCE LA RECHERCHE DE CHAQUE POLYGONE A PARTIR DU CARRE RECONSTITUE.

Les transformations géométriques apparaissent rapidement : rotations, translation, ... etc...

Des questions viennent :

- le rectangle obtenu est-il un "*vrai rectangle*"?
- les triangles 1 et 2 ont-ils des angles égaux?

D'autres peuvent être suggérées :

- l'aire de la pièce 3 est-elle égale à la somme des aires des pièces 1 et 2?
- le périmètre de la pièce 3 est-il égal au périmètre de la pièce 1?
- quel est le périmètre des trois pièces du jeu?

La manipulation de ce jeu utilise des compétences mathématiques et est source d'autres prolongements en utilisant les questions que peuvent se poser l'utilisateur ou l'observateur.

En classe, l'activité mathématique devient rapidement prépondérante mais l'élève ne se rend pas toujours compte du moment où celle-ci glisse du jeu vers les mathématiques. Le temps passé à jouer devient temps d'apprentissage.

ET LE PROGRAMME?

Pour répondre à cette question, voici quelques extraits du nouveau programme de la classe de 6^e.

FINALITES ET OBJECTIFS :

Au collège, on constate qu'une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Il est possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité est ainsi accessible au plus grand nombre et a une valeur formatrice évidente.

OU TROUVER DES IDEES?

Jeux 1 - Jeux 2 - Jeux 3 (APMEP)
Ludi Maths 1, 2, 3 et 4 (APMEP - Poitiers)
Objets mathématiques (A paraître - APMEP Lorraine)
Jeux de formes et formes de jeux (IREM - CRDP Besançon)
Jeux de l'oie (IREM de Lorraine)
Dominos mathématiques (IREM de Lorraine)
Autour du cube Soma (IREM de Lorraine)
Spiele : Mathematik (J. Lichtenberger - Schwann)
Rechenspiele (J. Lichtenberger - U. Mittrowann - Cornelsen)
Spiele Ritsel Zahlen (J. Lichtenberger - Cornelsen)
... Lege Spiele (K.H. Coch - Dumont Taschenbcher).

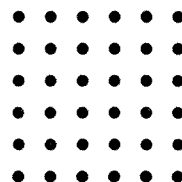
ET VOUS, CHERS LECTEURS, SI VOUS JOUIEZ?

Le jeu utilisé dans la "*fiche élèves*" ci-dessous vous donnera, je l'espère, quelques envies.
(Le jeu de HIP est présenté dans Ludi Maths 2 - APMEP Poitiers).

JEU DE HIP

Matériel : Un plateau de jeu percé de 36 trous disposés en carrés 6×6 pour 2 joueurs - 18 pions d'une couleur, 18 pions d'une autre couleur.

A défaut de plateau, du papier quadrillé sur lequel sont marqués 36 points disposés en carré et deux stylos de couleurs différentes pour marquer les emplacements des "*pions*".



1) Jeu à deux joueurs (jouez 3 parties) :

chaque joueur prend 18 pions d'une même couleur.

L'un des joueurs commence. Pour les parties suivantes, honneur au perdant.

Chaque joueur, à son tour, place un pion de sa couleur dans un des trous du plateau, en évitant de faire un carré (attention aux carrés dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords du plateau!!!).

Le gagnant est le premier qui dénonce un carré chez l'adversaire.

Remarques : Il faut bien sûr éviter de jouer, si possible, sur les cases qui occasionnent la réalisation d'un carré chez l'adversaire, pour que celui-ci soit obligé le premier, de jouer sur l'une de ces cases. Il existe une stratégie non perdante pour le 2^e joueur. Peut être la trouverez-vous?

2) Jeu en solitaire (dans le cas où les membres du groupe sont en nombre impair) :

Sans tenir compte de la couleur des pions, le joueur place des pions dans les trous.

Les pions doivent être placés de telle sorte que 4 quelconques d'entre eux ne forment pas de carrés.

Combien le joueur peut-il, au maximum, placer de pions?

3) Dessins de carrés :

Sur ton cahier, en utilisant les intersections du quadrillage, **dessine 6 carrés** tels que :

- a) leurs côtés aient 6 longueurs différentes,
- b) les côtés de deux carrés différents ne soient jamais parallèles,
- c) les sommets des carrés sont des points d'intersection du quadrillage.

DIMENSION INTERNATIONALE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Par Richard Cabassut

Une rencontre a été proposée dans le cadre de la journée régionale de l'A.P.M.E.P sur le thème de la dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques. Trois thèmes ont été abordés par 11 participants : l'enseignement en sections européennes, l'option internationale de l'IUFM et les échanges internationaux.

1. L'enseignement mathématique en sections européennes.

La circulaire ministérielle du 19 août 1992 a mis en place les sections européennes destinées, à moyen terme, à remplacer les sections appelées jusqu'ici "*bilingues*". Les services du rectorat expliquent les spécificités des sections européennes : "*Un enseignement renforcé de la langue vivante, la substitution progressive à cet enseignement renforcé de langue, de l'enseignement d'une discipline dans la langue vivante choisie. Le choix de la discipline n'est pas déterminé a priori. Il se fait en*

fonction des ouvertures culturelles qu'il facilite et des compétences des maîtres. Cet enseignement est conduit par des enseignants de l'établissement, avec le concours d'enseignants étrangers affectés aux établissements dans le cadre des échanges de maîtres, ou d'intervenants choisis pour leur compétence. Enfin dans le cadre du projet d'établissement, des activités culturelles et d'échanges avec des établissements étrangers peuvent être organisées en vue de l'acquisition d'une connaissance approfondie de la culture de la langue de la section."

En 1995 on dénombrait 6 collèges, 3 lycées et 1 L.E.P où des sections européennes impliquaient l'enseignement des mathématiques en langue étrangère, pas nécessairement comme discipline officielle, mais comme discipline associée dans le cadre du projet d'établissement.

Les collègues présents à la rencontre de Strasbourg enseignent en collège ou en lycée, en sections européennes rattachées à l'une des trois langues, Anglais, Allemand, Espagnol.

Un collègue enseigne les mathématiques en allemand au collège. C'est en allemand que le dispositif est le plus avancé. Rappelons qu'en Alsace des élèves ont pu suivre dès la maternelle un enseignement sur site bilingue (13 heures en allemand et 13 heures en français). Pour ces élèves, à l'école primaire, les mathématiques font partie des matières enseignées en allemand, à l'exception de la géométrie. Au collège et au lycée, les mathématiques sont enseignées partiellement en allemand. En sixième et cinquième il y a sensibilisation sur des regroupements d'heures de soutien ou approfondissement. En quatrième et troisième une heure est prise sur la dotation horaire globale pour être consacrée à cet enseignement. Bien entendu il ne faut pas mettre les élèves en échec par rapport aux mathématiques à cause de la pratique d'une langue étrangère.

En anglais, le collègue présent enseigne en lycée et prépare ses élèves au bac mention section européenne langue anglais. Pour obtenir cette mention l'élève reçoit une note de contrôle continu et passe les épreuves d'un bac normal auxquelles se rajoute une épreuve de mathématique orale en anglais. L'interrogation est faite par deux professeurs, l'un de mathématique, l'autre d'anglais. En seconde une heure supplémentaire par semaine est réservée à un enseignement de l'anglais. On y aborde des notions qui sont au programme du collège. En première deux heures supplémentaires sont prévues avec un groupe d'élèves regroupant des séries S et L, parmi lesquels des élèves de série L ne suivant pas l'option mathématiques. En Terminale, deux heures supplémentaires sont prévues avec un groupe d'élèves regroupant des séries S et ES. Les élèves font des exposés en anglais. L'enseignement essaie de se détacher des programmes français.

En espagnol, le collègue fait une intervention de 6 heures annuelles dans une classe de troisième pour les mathématiques (et également 6 heures pour les sciences physiques), avec un statut d'intervenant extérieur.

On signale le travail en collaboration avec le professeur de langue : préparation commune de cours, visite de classes, expérience de double correction ou de correction commune.

Pour les collègues d'anglais et d'espagnol, l'isolement très grand dans l'académie et l'éloignement des pays où la langue est pratiquée, souligne le besoin d'un matériel pédagogique adapté et d'une structure d'échange entre collègues partageant la même expérience.

Pour les collègues d'allemand, leur plus grand nombre leur permet d'échanger plus facilement. La proximité avec l'Allemagne permet de mettre en place des partenariats

frontaliers qui sont sources de documents et de matériels pédagogiques. Un groupe de recherche formation, dans le cadre des inspections régionales de mathématiques et d'allemand, a été mis en place et produira prochainement une brochure en octobre 1996. Une université d'été sur ce thème a eu lieu l'été 1995.

2. L'option internationale de l'IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres).

Parmi les collègues présents, 3 stagiaires en IUFM et 1 ancien stagiaire ont suivi l'option internationale de l'IUFM.

Il existe à l'IUFM d'Alsace une formation de pratique professionnelle au Royaume-Uni (Irlande du Nord) et en Allemagne (Bade - Wurtemberg). Les objectifs sont :

- faire découvrir aux professeurs stagiaires de quelques disciplines le système éducatif du pays, sa culture scolaire, des établissements scolaires, les programmes de leur discipline, la pédagogie et la didactique de leur discipline ;
- participer à une réflexion sur la didactique de leur discipline en section européenne ;
- rencontrer des enseignants du pays, effectuer des visites dans leurs classes, enseigner à des élèves du pays sous leur responsabilité ;
- élaborer un mémoire professionnel à caractère international et soutenu partiellement dans la langue du pays.

La durée du stage de pratique professionnelle à l'étranger est de quarante heures, soit dix jours de suite au Royaume-Uni, et de deux fois vingt heures, soit deux fois cinq jours en Allemagne. Le stagiaire accomplit dans la mesure du possible une partie du stage de pratique accompagnée dans une section européenne.

Cette année à l'IUFM d'Alsace, l'option internationale était suivie en anglais par 7 stagiaires dont deux en mathématiques, et en allemand par 22 stagiaires dont cinq en mathématiques. On peut consulter à la bibliothèque de l'IREM des mémoires professionnels des années précédentes : par exemple l'un d'eux s'intitule *"la note : l'arbre qui cache la forêt"*, comparant l'évaluation entre l'Allemagne et la France ; un autre sur *"La place de la démonstration en France et en Allemagne"*.

Ces formations initiales devraient permettre d'assurer les postes d'enseignants pour les sections européennes à venir.

3. Mathématiques dans les échanges internationaux.

Des collègues ont témoigné sur la pratique d'échanges. Au lycée Jean Monnet des classes de seconde et première, appelées classes Jean Monnet, partent pour 3 semaines dans un pays avec accueil en famille. Il est difficile d'impliquer l'enseignement des mathématiques. Cependant des tentatives demeurent : par exemple des élèves de seconde ont réalisé en allemand une enquête statistique, avec une dimension culturelle, durant leur séjour chez leurs correspondants allemands. Ces échanges nécessitent une reprise en main des élèves sur 10 jours, au retour. Ils posent le problème de l'accueil réciproque des élèves

étrangers, qui restent bien souvent inactifs au fond de la classe, et qu'il est difficile d'intégrer dans le cours à cause des problèmes de langue.

Il est également indiqué le cas d'un échange en immersion entre le lycée Jean Monnet et le lycée allemand Viscardi. Pendant trois semaines la moitié d'une classe de seconde est hébergée par une demi classe 10 allemande (niveau seconde) et suit tous les enseignements et évaluations en Allemagne. Pendant cette période les demi classes restantes font la même chose en France. Après trois semaines, les groupes changent de pays. L'enseignement des mathématiques est beaucoup plus impliqué dans ce type d'échanges, comme le montre le compte-rendu détaillé paru dans le n°82 de la revue "L'Ouvert".

Il est enfin évoqué un échange mathématique à distance, par lettres et fax, entre une classe de première française et une classe danoise, sur une modélisation de pisciculture, avec utilisation de calculatrices programmables et du logiciel Excel.

En conclusion

Le groupe a émis les souhaits suivants :

- constituer des groupes d'étude des programmes et manuels de mathématiques des différents pays ;
- établir des relations entre associations de professeurs de mathématiques et associations de professeurs de langue ;
- établir des relations entre associations de professeurs français de mathématiques et associations de professeurs étrangers de mathématiques ;
- continuer à se voir pour échanger ses expériences ;
- constituer des recueils de compte-rendus d'expériences réalisées.

