I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88 41 64 40
Fax : 88 41 64 49

ACTIVITES GEOMETRIQUES

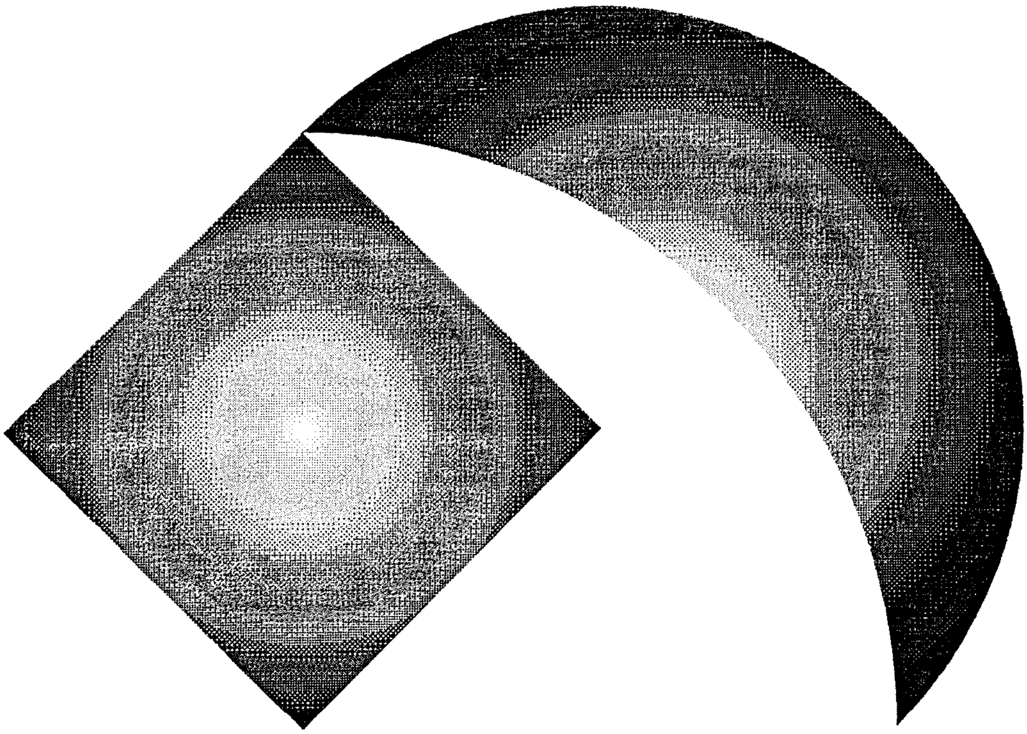
POUR LE COLLEGE ET LE LYCEE

PRESENTEES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

(Volume II)

PAR LE GROUPE D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES
DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG :

M. CINUS - P.H. CLAVIER - A. CUZIN - J.P. FRIEDELMEYER
M. KRIER - M. SARROUY - A. STOLL - K. VOLKERT



1996

Table des Matières
(Volume I)

Table des Matières
(Volume II)

INTRODUCTION.

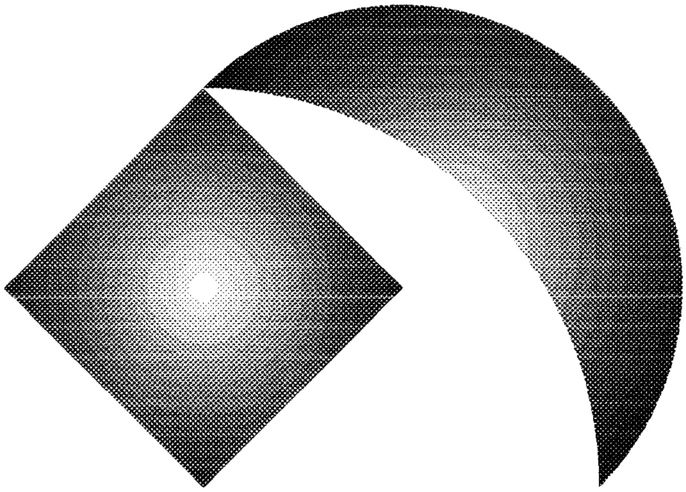
Nous savons depuis un peu plus d'un siècle que le problème de la quadrature du cercle qui consiste à construire un carré de même aire qu'un cercle donné n'a pas de solution par la seule utilisation de la règle et du compas. De nombreux chercheurs se sont intéressés à ce problème et la recherche de la solution s'est révélée d'une grande importance dans le développement des mathématiques. Les activités ci-dessous en présentent quelques exemples: Les lunules d'Hippocrate de Chio, la quadratrice d'Hippias d'Elis, la spirale d'Archimède. Ce dernier montre que le problème de la quadrature du cercle est équivalent au problème de la rectification du cercle, c'est à dire à la construction d'un segment de droite ayant la même longueur que la circonférence du cercle donné. Ce thème est l'objet de la deuxième activité de ce volume.

Au XVII^{ième} siècle, Cavalieri, un mathématicien italien, élève de Galilée, développe une méthode nouvelle appelée "la méthode des indivisibles". Celle-ci consiste à comparer l'aire de deux surfaces. Cette méthode, reprise par l'ensemble des mathématiciens de l'époque dont Torricelli, Roberval, Pascal..., permet de réaliser de nouvelles quadratures, ou quelquefois de comparer l'aire d'un cercle à l'aire d'autre surface comme une ellipse, un segment de spirale, une arche de cycloïde... La méthode des indivisibles appliquée à la tangente permet dans certains cas de comparer la longueur de deux courbes (la spirale et la parabole, une arche de cycloïde et le rayon du cercle générateur, ...).

Parallèlement aux problèmes de quadrature, les mathématiciens du XVII^{ième} siècle ont étudié le problème de la tangente à certaines courbes. La méthode de Roberval, qui est l'objet d'une autre activité de cette brochure, consiste à considérer la tangente comme la direction d'un mobile. Elle ne s'applique pas à n'importe quelle courbe. Toutefois, l'exploitation de la méthode de Roberval dans une classe de première donne un sens nouveau à la notion de tangente et fait le lien entre les notions de dérivée, de vitesse, de rectification. Elle permet également de montrer le lien entre deux problèmes qui semblent totalement indépendants: le problème de la recherche d'une tangente et celui de la quadrature, c'est à dire, en langage actuel, le lien entre le calcul d'une surface et la recherche d'une primitive.

L'ensemble des activités de la deuxième partie de la brochure s'adresse à des enseignants de lycée (classes de première, de terminale ou de BTS). Un des objectifs est de (re)donner du sens au calcul intégral et différentiel afin que celui-ci soit autre chose qu'un simple "truc".

Les lunules d'Hippocrate de Chio



Dans la première partie de cette brochure, nous avons vu comment les Grecs quarraient (à la règle et au compas) une figure rectiligne quelconque. Mais, à quelques exceptions près, les Grecs ne savaient pas quarrer les figures planes délimitées en parties ou entièrement par des lignes courbes.

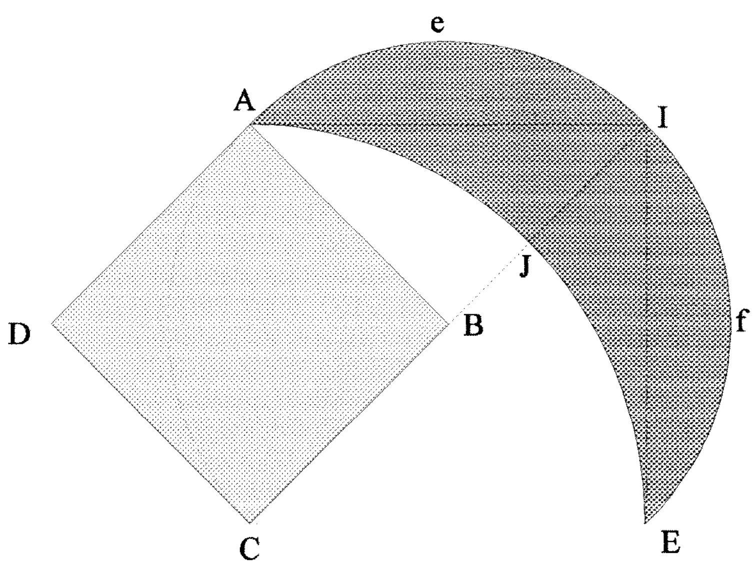
Si la quadrature de la parabole par Archimède est certainement la plus connue de ces exceptions, ce n'est pas la plus ancienne. En effet, Hippocrate de Chio, qui vivait à Athènes dans la seconde moitié du V$^{\text{ième}}$ siècle avant J.C. et qu'il ne faut pas le confondre avec Hippocrate de Cos le médecin, est le premier mathématicien connu à avoir réalisé la quadrature de figures curvilignes appelées lunules. - Une lunule étant une figure délimitée par des arcs de cercle qui aboutissent aux mêmes extrémités et dont les concavités sont tournées du même côté. L'idée de quarrer (à la règle et au compas, bien sûr !) des lunules pouvait laisser espérer la quadrature du cercle. Remarquons que Hippocrate a découvert trois lunules particulières qui sont quarrables.

PREMIERE PARTIE: Les trois lunules d'HIPPOCRATE.

Le premier exemple, le plus simple et longtemps le seul connu, correspond à la lunule délimitée par le quart de cercle AJE de centre C et le demi cercle AIE de centre B (Cf. figure 1).

Nous ne possédons aucun texte permettant de connaître les méthodes de démonstration d'Hippocrate de Chio. Toutefois, des commentaires ultérieurs, nous autorisent à penser qu'un des théorèmes de base est le suivant: "Les segments de cercles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes." (Cf. encadré ci-dessous)

figure 1

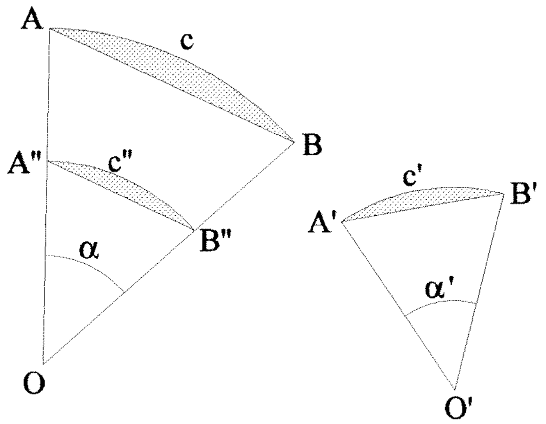


Théorème

Lorsque les angles α et α' sont égaux, les segments de cercle (AcBA) et (A'c'B'A') sont semblables.

Dans ce cas, en notant de la même manière une surface et son aire, on a:

$$\frac{(AcBA)}{(A'c'B'A')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$



EXERCICE 1:

A l'aide du théorème ci-dessus, démontrer que la lunule AJEIA a la même aire que le carré ABCD (Cf. figure 1)

Les deux autres lunules d'Hippocrate de Chio sont construites à partir d'un trapèze isocèle ABCD $((AD)//(BC))$ tel que: $AB = BC = CD$.

EXERCICE 2:
1. Montrer qu'un trapèze ABCD tel que $AB = BC = CD$ est inscriptible dans un cercle.
2. On prend $AB=BC=CD$ comme unité et on pose $a=AD$; Exprimer en fonction de a le rayon de ce cercle et l'angle $\widehat{DAC}$.

En traçant l'arc de cercle AND tangent aux diagonales (AC) et (BD), on obtient une lunule ABCDNA. (cf. figure 2). Lorsque le trapèze ABCD vérifie $AD^2 = 3\ AB^2$, l'aire de la lunule ABCDNA est égale à l'aire du trapèze ABCD.

EXERCICE 3: (cf. figure 2)

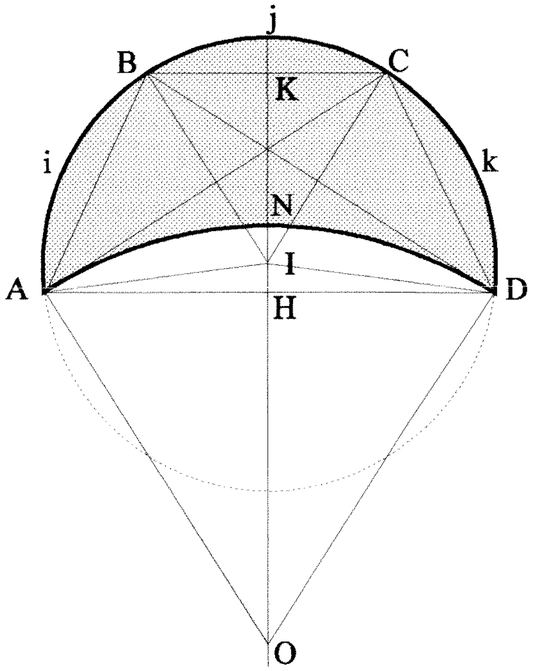
I désigne le centre du cercle circonscrit au trapèze ABCD et O le centre de l'arc de cercle AND

1. Montrer que $\widehat{AOD} = \widehat{AIB}$ et en déduire:

$$\frac{(\text{AiBA})}{(\text{ANDA})} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

2. Démontrer que si de plus $AD^2 = 3\ AB^2$ alors l'aire de la lunule ABCDNA est égale à l'aire du trapèze ABCD.
3. Démontrer que l'aire du trapèze ABCD est égale à l'aire du quadrilatère AIDO.

figure 2



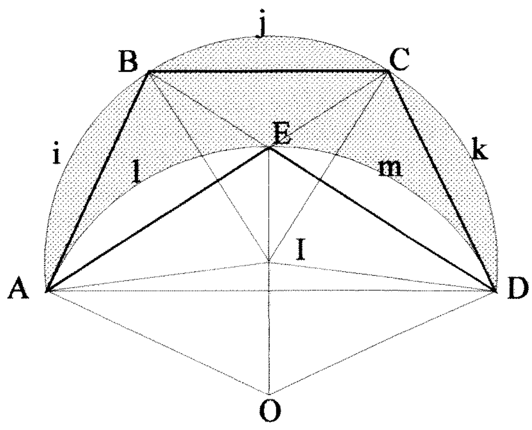
La lunule ABCDNA est donc quarrable car, d'une part, nous savons construire à la règle et au compas le trapèze ABCD et, d'autre part nous savons le quarrer.

EXERCICE 4:
Construire un trapèze ABCD qui vérifie $AB = BC = CD$ et $AD^2 = 3\ AB^2$ et la lunule correspondante. (Indication: ce problème se ramène à la construction du nombre $\sqrt{3}$.)

Revenons au trapèze isocèle tel que $AB = BC = CD$ et traçons le cercle circonscrit au triangle AED (E est le point d'intersection des diagonales)(cf. figure 3). Ce cercle est tangent aux droites (AB) et (CD) (Pourquoi ?) Lorsque $2AE^2 = 3AB^2$, une démonstration analogue à la précédente permet d'établir l'égalité des aires de la lunule ABCDEA et du pentagone à angle rentrant du même nom. Par suite, la lunule est quarrable à condition d'arriver à construire un trapèze ABCD isocèle qui vérifie à la fois $AB = BC = CD$ et $2AE^2 = 3AB^2$.

Hippocrate de Chio n'indique pas comment réaliser cette opération autrement que par tâtonnements. Pourtant un tel trapèze est constructible à la règle et au compas. En effet, comme CD est tangent au cercle circonscrit au triangle AED, on a $CD^2 = CE.CA$. Soit, en posant $a = AB = BC = CD$, $a^2 = CA.CE$. Or, d'autre part on a: $CA - CE = AE = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Il s'agit donc de construire deux longueurs CA et CE dont on connaît la différence et le produit. Euclide traite ce problème dans les Eléments (Livre VI proposition 29). Une interprétation de la proposition d'Euclide est donnée ci-dessous en annexe.

figure 3

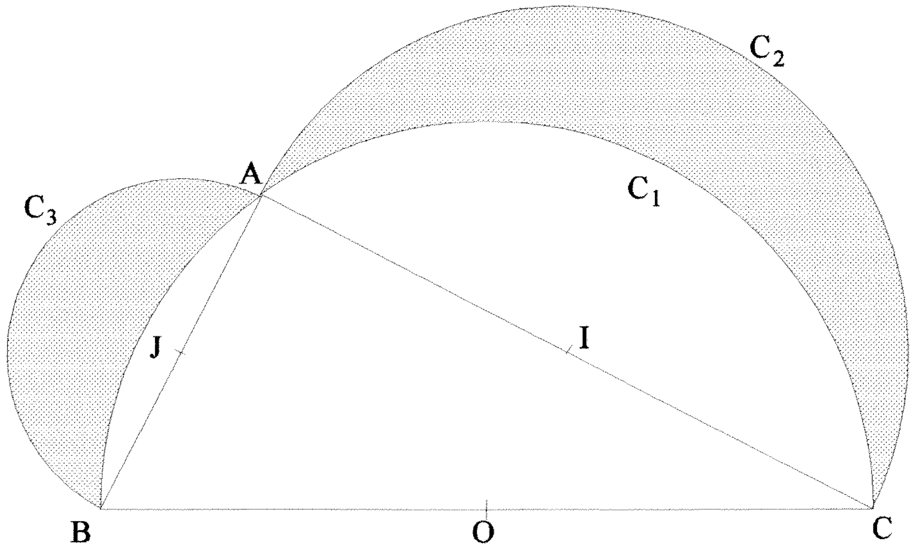


DEUXIEME PARTIE: deux exercices

EXERCICE 5:

Soit ABC un triangle rectangle en A; C_1, C_2, C_3 les 1/2 cercles de centres O, I, J milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Démontrer que l'aire hachurée est égale à l'aire du triangle rectangle ABC.

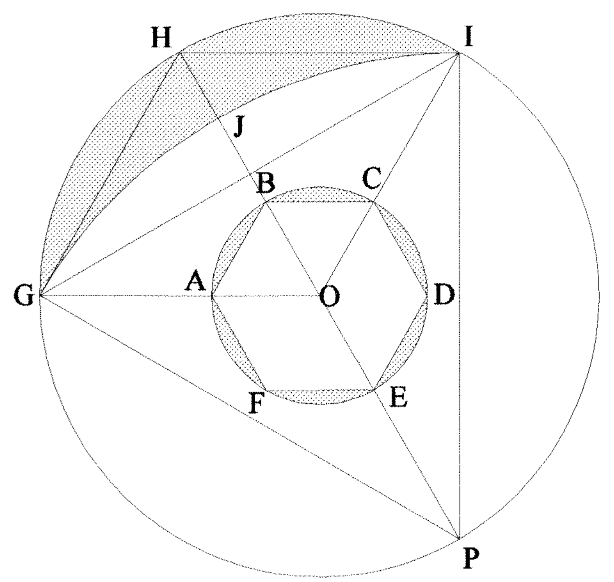


Un autre exemple de lunule est construit en partant de deux cercles concentriques (centre O) et tels que les rayons vérifient $R^2 = 6r^2$ (cf.figure 4). L'arc de cercle GJI, de centre P, est tangent à GH et HI.

EXERCICE 6:

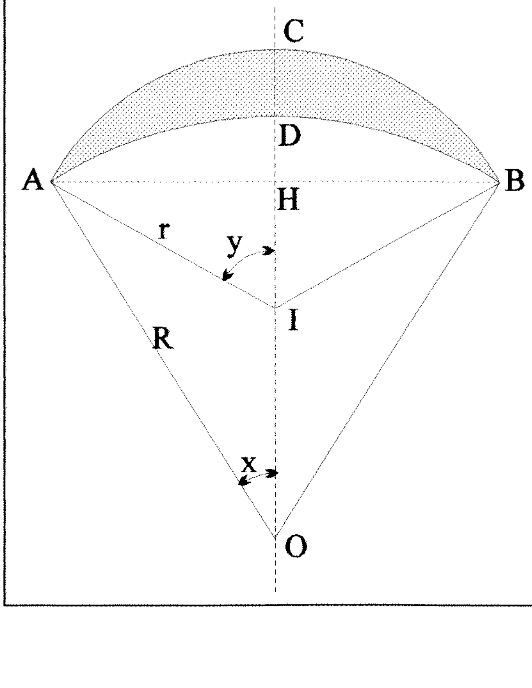
Montrer que l'aire de la lunule GHIJG augmentée des six segments de cercle AB, BC, CD, DE, EF, FA est égale à l'aire du triangle GHI.

figure 4



TROISIEME PARTIE: Existe-t-il d'autres lunules quarrables ?

figure 5



Il est probable que de nombreux savants aient cherché d'autres lunules quarrables en essayant de résoudre le problème de la quadrature du cercle. Pourtant, nous ne possédons aucune trace d'une telle recherche antérieure à 1840, année où Th. Clausen publie un article dans le *Journal de Crelle* (tome XXI pages 375-376) intitulé: "Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist." c'est à dire "Quatre nouvelles lunules quarrables."

La solution exposée par Clausen dans cet article n'est pas géométrique mais analytique. Il calcule l'aire de la lunule et cherche des conditions pour que celle-ci soit quarrable.

Avec les notations de la figure 5, l'aire de la lunule ACBDA est égale à l'aire du quadrilatère AIBD augmentée de la différence des aires des deux secteurs angulaires IACBI et OADBO. Lorsque cette dernière est nulle, la lunule est quarrable car équivalente au quadrilatère AIBO. D'où une première équation:

$$(1)\ r^2 y = R^2 x.$$

D'autre part, en écrivant que les deux secteurs angulaires ont une corde commune (AB), on trouve une deuxième équation:

$$(2)\ R.\sin x = r.\sin y$$

Lorsque les angles x et y sont des multiples entiers d'un angle α $(x = m\alpha \text{ et } y = n\alpha)$, l'équation (2) s'écrit: $\frac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ (3). Or, le rapport $\frac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha}$ s'exprime par une fraction rationnelle de la variable $\cos\alpha$. L'équation (3) conduit donc à une équation polynomiale en $\cos\alpha$.

La lunule est quarrable lorsque les racines de cette équation s'expriment par des racines carrées. Ceci se produit - au moins - dans les cinq cas suivants:

n=2 et m=1
n=3 et m=1
n=3 et m=2
n=5 et m=1
n=5 et m=3

EXERCICE 7:

Etudier les trois premiers cas et montrer qu'ils correspondent aux trois lunules d'Hippocrate.

Remarque: A la date de la publication de Th. Clausen (1840), seule la première lunule était connue. Ceci explique pourquoi Clausen présente comme nouvelle les deux autres.

Lorsque $n = 5, m = 1$, l'équation (3) s'écrit: $\frac{\sin(5\alpha)}{\sin\alpha} = \sqrt{5}$.

Soit:

$$4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$$

Et finalement:

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}} - 1}{4}$$

Ce qui correspond à un angle α d'environ 23,44 degrés.

Quant au cas $n = 5, m = 3$, un calcul identique au calcul précédent donne:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}}\right)$$

Soit:

$$\alpha \approx 16{,}8°$$

EXERCICE 8:

Construire les lunules correspondant au cas $n = 5, m = 1$ et au cas $n = 5, m = 3$.

EXERCICE 9:

Existe-t-il d'autres lunules quarrables ?

QUATRIEME PARTIE: Corrigé - partiel - de quelques exercices.

Corrigé de l' EXERCICE 1: les segments de cercle (AeIA) et (AJEA) sont semblables car inscrits dans des ¼ de cercle. Par conséquent, on a, en notant de la même manière une surface et l'aire de cette surface, les égalités suivantes:

$$\frac{\text{AeIA}}{\text{AJEA}} = \frac{\text{AI}^2}{\text{AE}^2} = \frac{1}{2}$$

D'où:

$$\text{AeIA} + \text{IfEI} = \text{AJEA}$$

Et, finalement:

$$\text{AeIfEJA} = \text{AeIA} + \text{IfEI} + \text{AIEJA} = \text{AJEA} + \text{AIEJA} = \text{AIE} = \text{ABCD}.$$

Corrigé de EXERCICE 2 (question 2): (cf. figure 6) Soit A' le point diamétralement opposé à D; alors,

$\sin \widehat{\text{DA'C}} = \dfrac{\text{CD}}{2.\text{AI}} = \dfrac{1}{2.\text{AI}}$ car le triangle A'DC est rectangle et $\widehat{\text{DA'C}} = \widehat{\text{DAC}} = \widehat{\text{CAB}}$.

D'où: $\text{AI} = \dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{\widehat{\text{DAB}}}{2}\right)}$

Or:

$$\sin^2\left(\frac{\widehat{\text{DAB}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\widehat{\text{DAB}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{AF}}{\text{AB}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \text{AF}) = \frac{3 - \text{AD}}{4} = \frac{3 - \text{a}}{4}$$

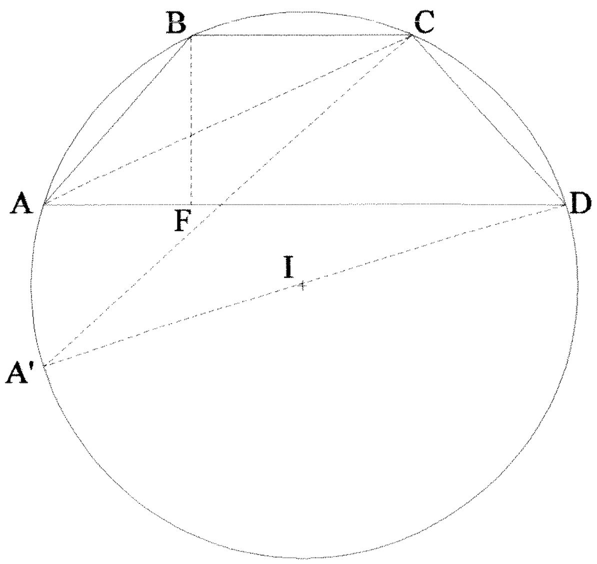


figure 6

Par conséquent:

$$2.\sin\widehat{\text{DAC}} = 2.\sin\left(\frac{\widehat{\text{DAB}}}{2}\right) = \sqrt{3 - \text{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{AI} = \frac{1}{\sqrt{3 - \text{a}}}}$$

Corrigé de l' EXERCICE 3: Des considérations sur les aires montrent que l'aire de la lunule est égale à l'aire du quadrilatère AIOD augmentée de la différence des aires des deux secteurs angulaires IABCDI et OANDO. Or cette dernière est nulle car, en posant $x = \widehat{\text{AOH}} = \widehat{\text{DAC}} = \frac{1}{3}\widehat{\text{AIj}}$, on a : $\sin x = \dfrac{1}{2.\text{AI}} = \dfrac{\text{AH}}{\text{OA}}$. D'où $\text{OA} = 2.\text{AH}.\text{AI} = \text{AD}.\text{AI}$ et l'aire de chacun des deux secteurs angulaires est $x.\text{OA}^2 = 3x.\text{AI}^2$.

Corrigé de l'EXERCICE 6: Les angles $\widehat{GPI}$, $\widehat{GOH}$ et $\widehat{AOB}$ sont égaux. Les segments de cercle correspondant sont donc semblables et on a:

$$\frac{GJIG}{GHG} = \frac{GI^2}{GH^2} = 3 \text{ car } GI^2 = 3R^2 = 3.GH^2$$

$$\frac{ABA}{GHG} = \frac{AB^2}{GH^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{6} \text{ d'où } 6.ABA = GHG$$

Par conséquent:

$$GJIG = 3.GHG = GHG + HIH + 6.ABA$$

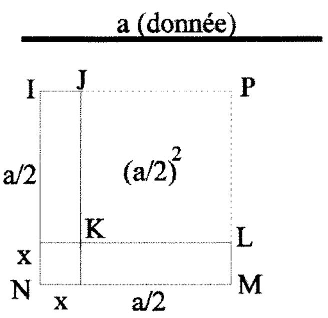
Et finalement:

$$GHI = GHIJG + GJIG - GHG - HIH = GHIJG + 6.ABA.$$

Corrigé de l'EXERCICE 9: question ouverte.

ANNEXE: Une longueur a et un rectangle d'aire k étant donnés, trouver deux longueurs x et y dont la différence est a et telles que l'aire du rectangle construit sur ces deux longueurs soit égale à k.

figure 7



Analyse. (cf. figure 7) Le problème se traduit par $\begin{cases} y - x = a \\ xy = k \end{cases}$.

Soit:

$$x(x + a) = k$$

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x = k$$

Or $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x$ est l'aire du gnomon IJKLMN.

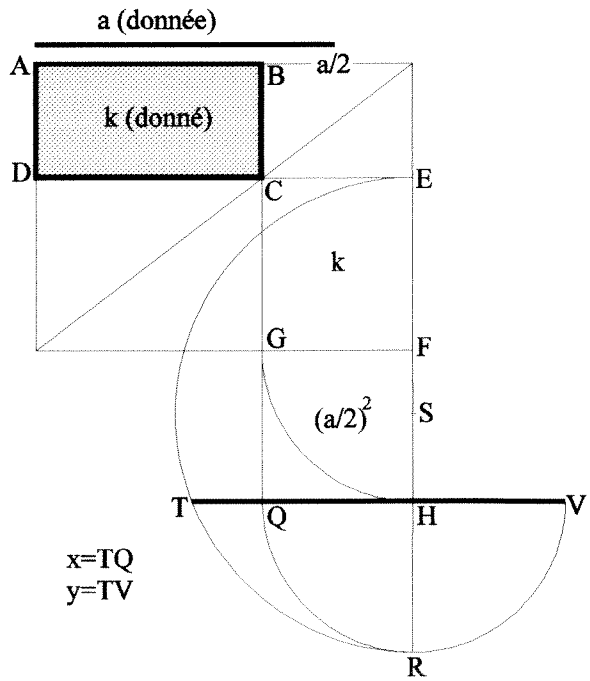
En "complétant" ce gnomon pour avoir un carré IPMN, le problème se ramène à la construction d'un carré d'aire $k + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Synthèse. La première opération consiste à construire un rectangle CEFG d'aire k et dont la longueur du côté CE est égale à $\frac{a}{2}$.

Au rectangle CEFG, on ajoute le carré GFHQ pour obtenir un rectangle d'aire $k + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

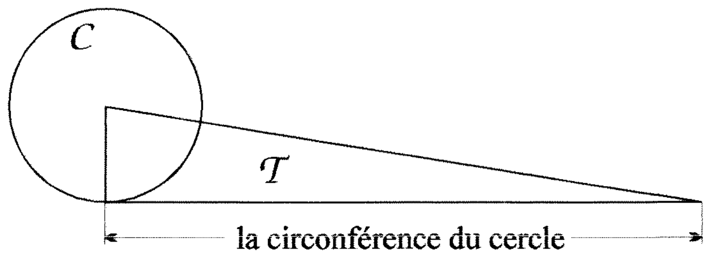
La quadrature du rectangle CEHR nous donne la solution du problème.

figure 8



Rectification et quadrature du cercle: Deux problèmes équivalents?

figure 1



Dans le traité intitulé *de la mesure du cercle,* Archimède énonce la proposition suivante (cf.figure 1): "*Tout cercle a la même aire qu'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et l'autre à la circonférence du cercle.*"

Une des conséquences de cette proposition est que le coefficient de proportionnalité, que nous appelons actuellement π, qui intervient dans les deux formules, celle de l'aire d'un cercle et celle de sa circonférence, est le même. Ce résultat, que nous avons appris dès l'école primaire et que nous admettons depuis, est loin d'être évident !

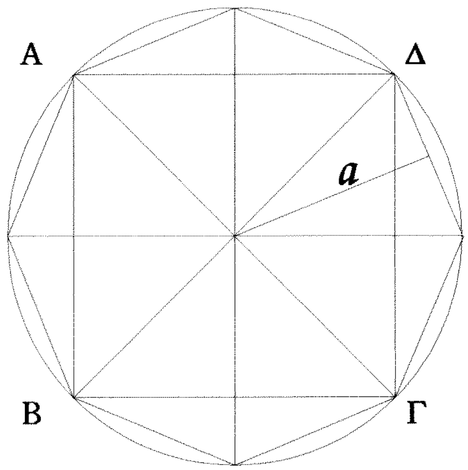
Le but du document ci-dessous est de présenter, avec des notations modernes, la démonstration de la proposition énoncée par Archimède au troisième siècle avant Jésus-Christ. Cette démonstration qui est caractéristique de la méthode Archimédienne, repose d'une part sur la méthode d'exhaustion et d'autre part sur une double réduction à l'absurde.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $\mathcal{T}$ un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et l'autre à la circonférence du cercle (cf. figure 1) Supposons que l'aire $\mathcal{S}$ du cercle soit strictement supérieure à l'aire $\mathcal{E}$ du triangle. A la manière d' Archimède, inscrivons dans le cercle un carré ΑΒΓΔ et divisons en deux parties égales les arcs ayant comme cordes les côtés du carré. Nous obtenons ainsi un polygone régulier à 8 côtés (cf. figure 2). Répétons les opérations de division en deux parties égales jusqu'à ce que "les segments de cercle aient une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle":

$$(\mathcal{S} - \mathcal{T}_n) < (\mathcal{S} - \mathcal{E})$$

($\mathcal{T}_n$ désigne l'aire du polygone régulier à "n" côtés.)

figure 2



Pour la clarté de la figure, nous nous sommes arrêtés à n = 8

On en déduit:

$$\mathcal{T}_n > \mathcal{E}$$

Or, si on appelle a l'apothème et ℓ le périmètre du polygone, nous avons:

$$\mathcal{T}_n = n\left(\frac{a\ell}{2n}\right) = \frac{a\ell}{2}$$

Comme a est inférieur au rayon du cercle et ℓ inférieur à la circonférence du cercle, nous en déduisons que:

$$\mathcal{T}_n < \mathcal{E}$$

Ce qui est contredit l'hypothèse et par suite est absurde.

EXERCICE 1:

De la même manière, en considérant des polygones circonscrits, montrer que l'hypothèse "$\mathcal{S}$ strictement inférieure à $\mathcal{E}$ " est impossible et en déduire que:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}$$

La proposition ainsi démontrée prouve que les deux problèmes, celui de la rectification et celui de la quadrature d'un cercle sont équivalents.

Rappelons que "rectifier un cercle" consiste à construire à la règle et au compas un segment ayant même longueur que le cercle et "quarrer un cercle" consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant même aire que le cercle.

EXERCICE 2:

Démontrer que ces deux problèmes sont équivalents.
(En d'autres termes, si on savait rectifier un cercle, on saurait le quarrer et réciproquement)

EXERCICE 3:

Déduire de la proposition d'Archimède que le coefficient de proportionnalité qui intervient dans le calcul de l'aire d'un cercle est le même que le coefficient de proportionnalité qui intervient dans le calcul de la circonférence.

Remarque: Depuis le début du XVIII ième siècle, ce coefficient de proportionnalité est désigné par la lettre π qui est l'initiale du grec περιμετρος, le périmètre.

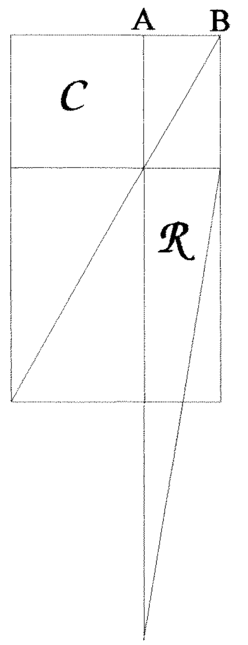


figure 3

Corrigé de l'EXERCICE 2

Supposons un instant que nous sachions rectifier un cercle. Dans ce cas, la quadrature du cercle se ramène à la construction d'un carré ayant la même aire qu'un triangle rectangle ayant pour hauteur le rayon du cercle et pour base la circonférence. Cette construction qui ne pose aucun problème, est laissée en exercice au lecteur.

Inversement, si on savait quarrer un cercle, on saurait également le rectifier. En effet, soit $\mathcal{C}$ un carré ayant même aire qu'un cercle donné et AB un segment de longueur le rayon. Une construction classique (cf.figure 3) nous donne un rectangle $\mathcal{R}$ ayant même aire que le carré $\mathcal{C}$ et de largeur AB. La longueur de ce rectangle $\mathcal{R}$ est la moitié de la circonférence du cercle.
Ainsi, les deux problèmes sont équivalents.

Corrigé de l'EXERCICE 3

En langage actuel, le résultat d'Archimède s'écrit, en posant comme ci-dessus $\mathcal{S}$ l'aire du cercle, $\mathcal{L}$ sa circonférence et R son rayon:

$$\frac{\mathrm{R}\mathcal{L}}{2} = \mathcal{S}$$

D'où en divisant par le carré du rayon:

$$\frac{\mathcal{L}}{2\mathrm{R}} = \frac{\mathcal{S}}{\mathrm{R}^2}$$

Ce qui prouve que le coefficient de proportionnalité qui intervient dans les formules donnant l'aire et la circonférence d'un cercle est effectivement le même.

La méthode des indivisibles
et
quelques applications.

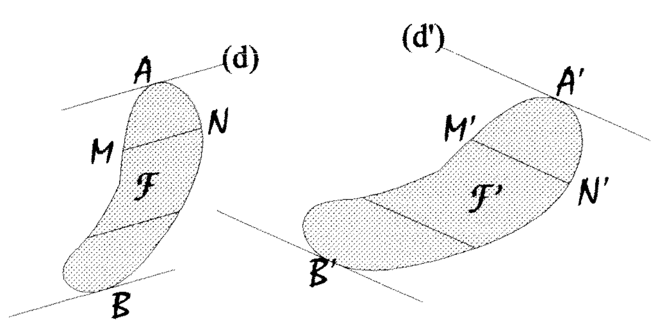
"Il est plus facile une fois qu'on a acquis une certaine connaissance de la question d'en imaginer la démonstration, que si l'on recherchait celle-ci sans aucune notion préalable." (Archimède)

La méthode des indivisibles

"Il y a la même proportion entre deux figures planes qu'entre toutes les lignes de ces deux figures, déterminées selon une règle quelconque; et il y a la même proportion entre deux figures solides qu'entre tous les plans de ces deux figures, déterminées selon une règle quelconque." (CAVALIERI: Théorème 3 de la *Geometria Indivisibilibus* 1635)

Les mathématiciens du XVI^{ième} et du XVII ^{ième} siècles abandonnent progressivement la rigueur grecque caractérisée par la méthode d'exhaustion et ont recours de plus en plus fréquemment a des considérations infinitésimales pour calculer des aires, des volumes mais aussi des centres de gravité et des tangentes à une courbe.

figure 1



En Italie, un élève de G. Galilée, Cavalieri (1598-1647), développe une méthode nouvelle, appelée la méthode des indivisibles. Celle-ci consiste à découper une surface donnée en segments, parallèlement à une droite donnée, appelée "règle". Ces segments sont "les indivisibles de la surface" (Par exemple, le segment MN de la figure 1 est un indivisible selon la règle (d) de la surface $\mathcal{F}$). On compare ensuite les indivisibles de deux surfaces et, s'il existe un même rapport entre tous les indivisibles correspondants, on conclut que les aires de ces deux surfaces sont dans le même rapport.[1]

Notons (provisoirement) $\sum MN$ "la somme des indivisibles" [2] de la surface $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F})$ l'aire de cette surface. S'il existe k tel que pour tout M, $\frac{MN}{M'N'} = k$ alors, on a aussi $\frac{(\mathcal{F})}{(\mathcal{F}')} = \frac{\sum MN}{\sum M'N'} = k$.

(Cette méthode consiste à généraliser <u>à un nombre infini</u> de proportions, la proposition (V, 12) d'Euclide qui affirme que si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$ alors: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k$).

De la même façon, en considérant des "indivisibles plans" on peut comparer les volumes de deux solides.

[1] Il faut insister sur le fait que la méthode des indivisibles n'est pas une méthode de calcul d'aire ou de volume mais une méthode de comparaison: on compare les aires de deux surfaces en comparant leurs indivisibles respectifs.

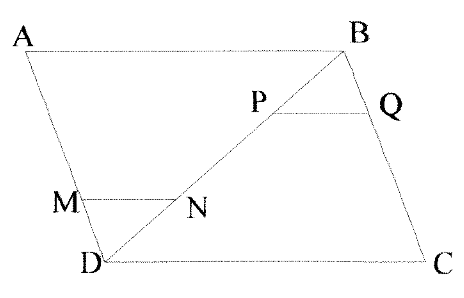
[2] Dans la *Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi,* Blaise Pascal parle de " la somme des lignes" ou de "la somme des plans" d'où l'idée de cette notation et de l'expression "somme des indivisibles".

Cette méthode fournit une "démonstration" simple et rapide des deux théorèmes suivants:

Théorème 1: Tout parallélogramme est partagé par sa diagonale en deux triangles d'aires égales. (figure 2)

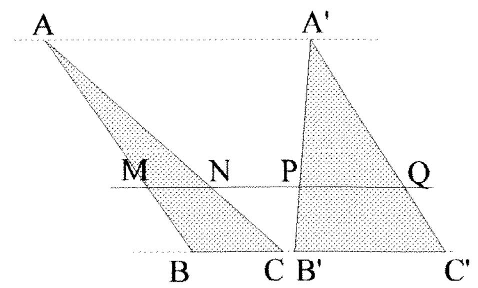
Théorème 2: Deux triangles qui ont la même hauteur, ont des aires proportionnelles à leurs bases. (figure 3)

figure 2



Pour démontrer le théorème 1, il suffit de comparer les indivisibles des deux triangles ABD et CDB selon la règle (AB). Prises à des distances égales de D et de B (cf. figure 2), les lignes MN et PQ sont égales et on a: $\frac{(ABD)}{(CDB)} = \frac{\sum MN}{\sum PQ} = 1$ d'où le résultat.

figure 3



EXERCICE 1:

De la même manière, en vous inspirant de la figure 3, démontrer le théorème 2.

Contrairement à la méthode d'exhaustion qui est une méthode de démonstration d'un résultat conjecturé, la méthode des indivisibles est une méthode heuristique: de nouveaux résultats sont découverts par cette méthode. C'est ainsi que G. P. Roberval et B. Pascal calculent l'aire d'une arche de cycloïde[3].

Appliquons par exemple la méthode des indivisibles au calcul de l'aire d'une ellipse.

Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ de grand axe a et de petit axe b;
Comparons l'aire de cette ellipse avec l'aire du cercle $\mathcal{C}$ de rayon a.
Quel que soit la ligne MN de l'ellipse, on a:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{b}{a} \text{ (figure 4)}$$

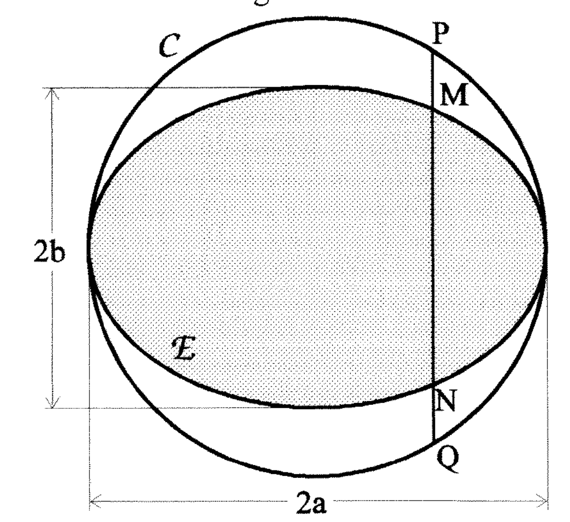
Par conséquent:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{C}} = \frac{\sum MN}{\sum PQ} = \frac{b}{a}$$

Si on admet que l'aire du cercle est πa^2 alors l'aire de l'ellipse est:

$$\boxed{\mathcal{E} = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab}$$

figure 4



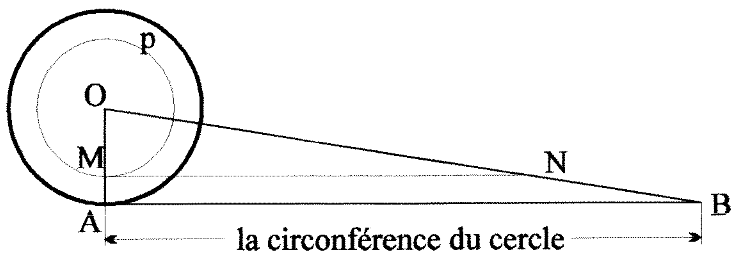
[3] Voir, par exemple le document intitulé "la cycloïde"

Dans les exemples ci-dessus, nous nous sommes limités aux indivisibles rectilignes. L'utilisation d'indivisibles non rectilignes permet de trouver de nouveaux résultats.

A titre d'exercice, traitons par les indivisibles, le théorème suivant démontré par Archimède à l'aide de la méthode d'exhaustion: "*Tout cercle a la même aire qu'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et l'autre à la circonférence du cercle.*" [4] (cf. figure 5)

En effet, l'aire du cercle est la somme des indivisibles $\overset{\frown}{MpM}$ qui sont ici des cercles concentriques. Or, la longueur de cette ligne est égale à la longueur du segment MN. Le cercle et le triangle sont donc formés par des mêmes indivisibles de même longueur. Ils ont donc même aire.(Remarque: la longueur du cercle $\overset{\frown}{MpM}$ est proportionnelle à AB et au rayon du cercle qui a engendré les indivisibles donc OAB est effectivement un triangle)

figure 5



Cette méthode permet également de retrouver un autre théorème démontré par Archimède concernant l'aire délimitée par un segment de spirale[5]: « *Je* [Archimède] *dis[...] que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite.* »

Les mathématiciens du XVII$^{\text{ième}}$ accueillirent la méthode des indivisibles avec beaucoup d'enthousiasme car, non seulement elle est compatible avec la méthode des anciens, puisqu'on retrouve les mêmes résultats, mais, de plus, elle contribue de manière simple et rapide à la découverte de nouveaux théorèmes.

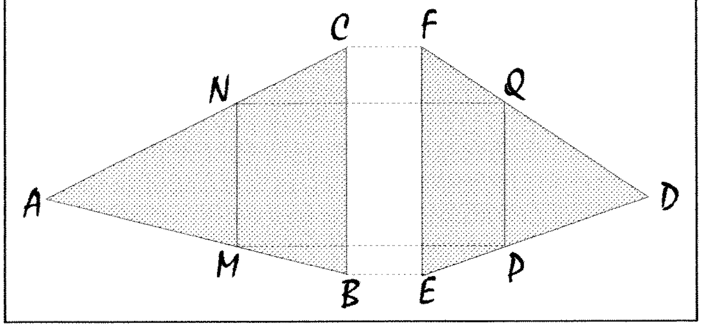
Et pourtant... Deux figures peuvent être constituées des mêmes indivisibles sans avoir la même aire ou le même volume !!!

Un premier paradoxe est le suivant:

[4] Voir le document "Rectification et quadrature du cercle: deux problèmes équivalents ? "

[5] Voir le document "La spirale d'Archimède"

figure 6



Comparons à l'aide des indivisibles les aires des deux triangles ABC et DEF ci-contre:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\sum MN}{\sum PQ} = 1 \text{ puisque}$$

à chaque ligne MN de ABC correspond exactement une ligne PQ du triangle DEF et inversement. Les deux triangles auraient par conséquent la même aire!!! Ce résultat est évidemment absurde.

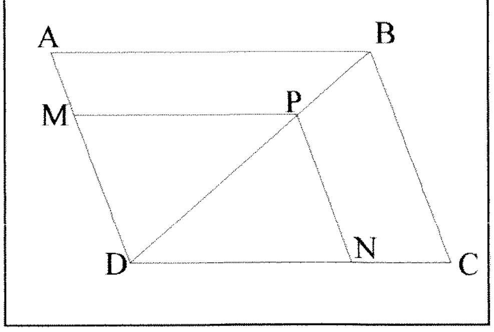
De même, en reprenant le parallélogramme de la figure 2 et en découpant le triangle ABD suivant la règle AB et le triangle CBD suivant la règle BC, on a (cf.figure 7):

$$\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{\sum MP}{\sum PN} = \frac{AB}{BC}$$

puisque pour tout $P \in [BD]$, $\frac{MP}{PN} = \frac{AB}{BC}$.

Ce résultat contredit le résultat ci-dessus qui affirme que les deux triangles (ABD) et (CBD) ont la même aire!!!

figure 7

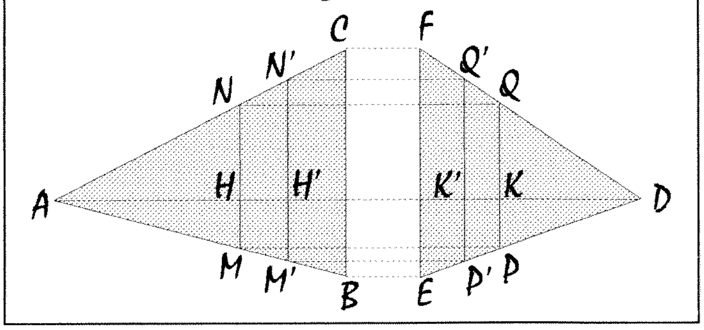


Où l'on rencontre des lignes plus épaisses que d'autres lignes...

Pour "résoudre ces paradoxes", Torricelli considère les indivisibles non pas comme des lignes mais comme des vestiges de surfaces infiniment petites. Ceci le conduit à admettre qu'il existe des "lignes plus larges que d'autres" et, par suite, à attribuer une certaine épaisseur aux indivisibles.

Quelle épaisseur attribuer à une ligne?

figure 8



Reprenons les deux triangles de la figure 6. Prenons M'N' un autre indivisible du triangle ABC et P'Q' l'indivisible correspondant du triangle DEF (Cf. figure 8). Alors: $\frac{HH'}{KK'} = \frac{h}{k}$ où h et k sont les longueurs des hauteurs des deux triangles ABC et DEF. Lorsque le point M' se rapproche du point M, le rapport $\frac{HH'}{KK'} = \frac{h}{k}$ ne dépend pas de H'. C'est donc tout naturellement que nous attribuerons cette valeur au rapport des épaisseurs des deux lignes MN et PQ. Notons HH l'épaisseur de la ligne MN et KK celle de la ligne PQ, alors:

$$\frac{HH}{KK} = \frac{h}{k}$$

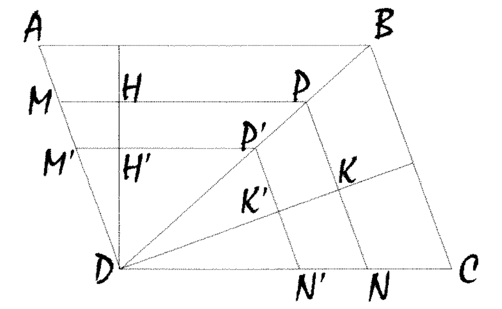
Faisons également intervenir cette épaisseur dans la notation des indivisibles et écrivons dorénavant:

$$(ABC) = \sum MN.HH$$

Dans ces conditions:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\sum MN.HH}{\sum PQ.KK} = \frac{h}{k} \text{ puisque pour tout point M, on a: } \frac{MN.HH}{PQ.KK} = \frac{HH}{KK} = \frac{h}{k}.$$

figure 9



De la même façon, dans le cas du parallélogramme de la figure 7, attribuons aux lignes PM et PN les épaisseurs HH et KK de telle sorte que: $\frac{HH}{KK} = \frac{BC}{AB}$.

Dans ces conditions:

$$\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{\sum PM.HH}{\sum PN.KK} = 1 \text{ puisque pour tout P, on a:}$$

$$\frac{PM.HH}{PN.KK} = \frac{PM}{PN}.\frac{HH}{KK} = \frac{AB}{BC}.\frac{BC}{AB} = 1.$$

On retrouve ainsi le théorème 1 ci-dessus.

EXERCICE 2: Une fonction qui transforme un produit en somme.

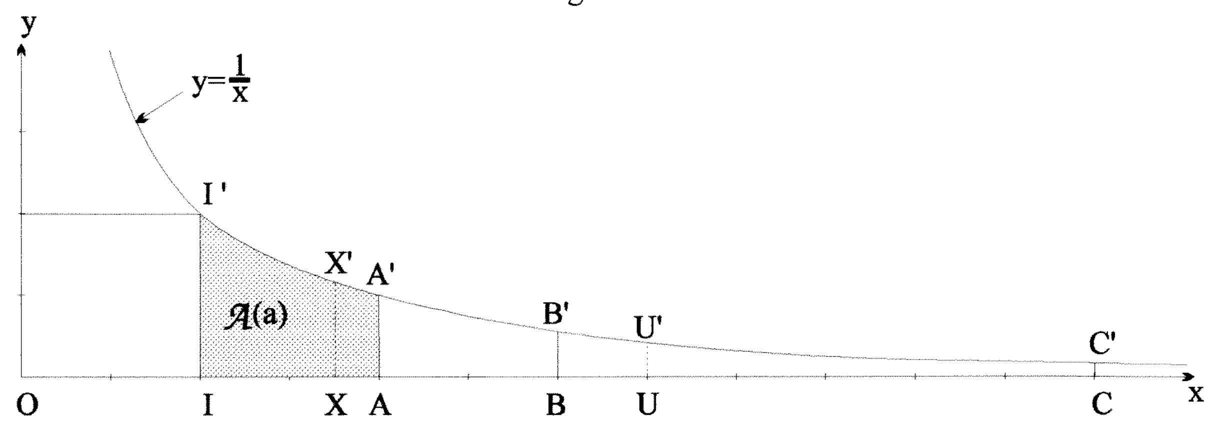
Soit l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et les points I, A, B et C de l'axe [Ox, d'abscisse respective 1, a, b et ab où a et b sont deux nombres réels supérieurs à 1.

On pose $\mathcal{A}(a)$ l'aire de la surface (IAA' I') (pour les notations, voir figure 10)

1. On considère la surface (II'B'B) comme la somme des lignes XX': $II'B'B = \sum XX'.XX$.
   A chaque ligne XX' de (II'B'B), on associe la ligne UU' de (AA'C'C) telle que $OU = a.OX$. (Ainsi, à la ligne II' correspond la ligne AA' et à la ligne BB' correspond la ligne CC').
   Montrez que $XX' = a.UU'$
2. Quelle est la valeur du rapport $\frac{UU}{XX}$?
3. Déduisez-en l'égalité des aires des deux surfaces (II'B'B) et (AA'C'C) et la propriété suivante de la fonction $\mathcal{A}$:

$$\boxed{\mathcal{A}(ab) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)}$$

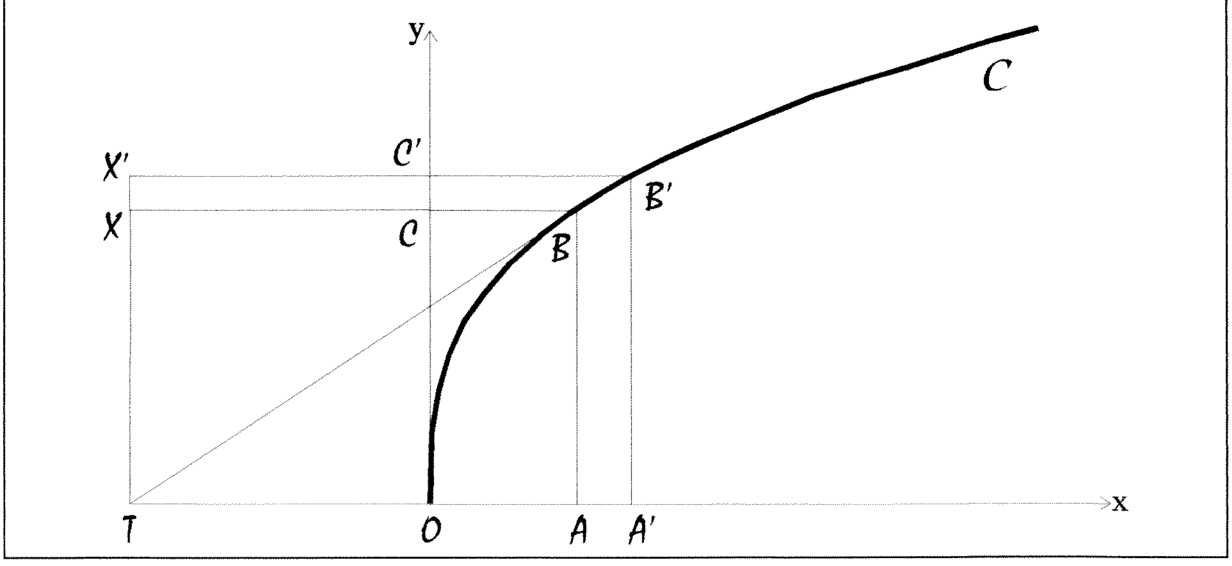
figure 10



Comment trouver la tangente à une parabole grâce aux indivisibles ?

A l'aide des indivisibles, Torricelli construit la tangente à *"une parabole infinie"* c'est à dire une courbe qui admet une équation de la forme $y^m = \alpha x^n$ où m et n sont deux entiers naturels et α un nombre positif quelconque. Voici sa méthode.

figure 11



1. Soit B un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^m = \alpha x^n$ (cf. figure 11) et B' un autre point de $\mathcal{C}$ assez proche pour que l'on puisse confondre l'arc $\overset{\frown}{BB'}$ et [BB'].
   Pourquoi peut-on écrire:
   - $(A'B')^m = (AB + CC')^m = AB^m + mAB^{m-1}.CC'$
   - $(A'B')^m = \alpha(OA')^n = \alpha(OA + AA')^n = \alpha OA^n + \alpha nOA^{n-1}.AA'$.

2. En déduire successivement:
   - $AB^m + mAB^{m-1}.CC' = \alpha OA^n + \alpha nOA^{n-1}.AA'$
   - $mAB^{m-1}.CC' = \alpha nOA^{n-1}.AA'$
   - $1 = \dfrac{AB^m}{\alpha OA^n} = \dfrac{AB^{m-1}}{\alpha OA^{n-1}}.\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{nAA'}{mCC'}.\dfrac{AB}{OA}$
   - $\dfrac{AA'}{CC'} = \dfrac{m}{n}.\dfrac{OA}{AB}$
3. En écrivant que ce dernier rapport est conservé lorsque le point B' vient en B, montrer que le rapport des "épaisseurs" des lignes AB et CB est:
$$\frac{AA}{CC} = \frac{m}{n}.\frac{OA}{AB}$$
4. Soit à présent T le point d'intersection de OA et de la tangente BT à $\mathcal{C}$ (T est le point cherché). Montrer que:
$$\frac{AT}{AO}\frac{n}{m} = 1$$
(Indication: remarquer que les deux surfaces (BB'X'X) et (BB'A'A) ont la même aire puis "faire venir" B' en B).

Finalement, on a:
$$AT = AO.\frac{m}{n}$$
et cette dernière égalité permet de construire le point T.

Remarque: lorsque n=2 et m=1, c'est à dire lorsque $\mathcal{C}$ est la parabole habituelle, on retrouve le résultat bien connu qui dit que T est le milieu de OA.

Application des indivisibles à la recherche des centres de gravité[6].

Problème:

Soit $\overset{\frown}{AB}$ une ligne convexe ou concave, trouver le centre de gravité G de cette ligne $\overset{\frown}{AB}$.

[6] Cette partie est inspirée de la *"Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi"* écrite par Blaise Pascal en 1659.

On considère le repère d'origine O tel que A soit sur l'axe des abscisses et B sur l'axe des ordonnées.

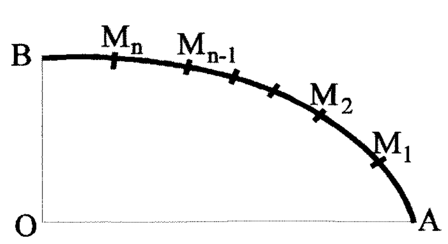


figure 12

Pour résoudre le problème, il suffit de calculer l'abscisse et l'ordonnée du point G

Soit n un nombre entier naturel "grand"; on partage la ligne $\overset{\frown}{AB}$ aux points: $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1} = B$ et on appelle I_k le centre de gravité du segment M_kM_{k+1} et m_k sa longueur. Dans ces conditions:

$$\overrightarrow{OG} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} m_k \overrightarrow{OI_k}}{\sum_{k=0}^{n} m_k}$$

Appelons y_k l'ordonnée de I_k alors l'ordonnée de G est: $y = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{k=n} m_k y_k}{\sum_{k=0}^{k=n} m_k}$

Or, $\sum_{k=0}^{k=n} m_k$ est la longueur de la courbe $\overset{\frown}{AB}$

Quant à $\sum_{k=0}^{k=n} m_k y_k$, elle représente l'aire de la surface "cyclindrique" (BCA) construite sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la manière suivante: perpendiculairement au plan de la ligne $\overset{\frown}{AB}$ et en chaque point M, on prend le segment [MP] de même longueur que le segment [MQ]

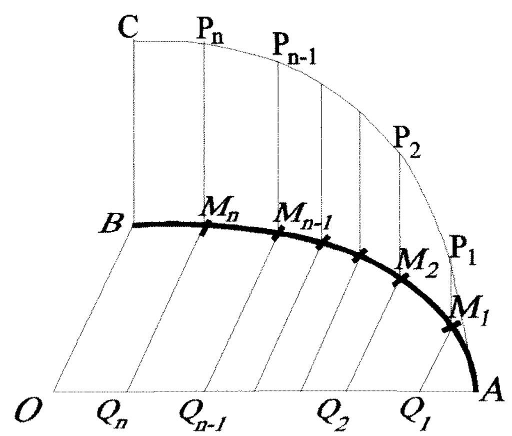


figure 13

Conclusion:

$$\boxed{y = \frac{\text{aire (BCA)}}{\text{longueur } \overset{\frown}{AB}}}$$

Par exemple, lorsque $\overset{\frown}{AB}$ est un quart de cercle de rayon une unité, l'aire (BCA) est égale à une unité carrée (voir ci dessus: calcul de l'aire d'une arche de sinusoïde) et par suite: $y = \dfrac{2}{\pi}$.

Dans le cas de la cycloïde, en "déroulant" la surface (ABC), on obtient un arc de parabole. En effet, on a: $\overset{\frown}{BM} = -4r\cos\frac{\varphi}{2}$ avec $\pi \le \varphi \le 2\pi$ et $MP = r(1-\cos\varphi)$. Par conséquent, $MP = \frac{1}{8r}\left(16r^2 - \overset{\frown}{BM}^2\right)$.

L'aire de ce segment de parabole est égale au $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC.

Finalement:

$$\boxed{y = \frac{4}{3}r}$$

EXERCICE 3:

Soit G le centre de gravité de la surface (OAB) et H la projection de G sur (OA) (figure 14). Montrer par un calcul analogue au calcul ci-dessus que la distance OH est égale au rapport du volume du solide (OABC) sur l'aire de la surface (OAB); La surface plane (OBC) étant l'intersection du cylindre construit sur (OAB) et du plan contenant la droite (OB) et passant par C tel que OA = CA

Remarque: pour calculer le volume de (OABC), on peut utiliser les indivisibles rectangulaires XYNM ou alors les triangles isocèles rectangles PQR. Dans le premier cas, on obtient:

$$(OABC) = \sum (XYNM).XX = \sum XY.XM.XX = \sum XY.OX.XX$$

Dans le deuxième cas, $(OABC) = \sum (PQR).PP = \frac{1}{2}\sum PQ^2.PP$

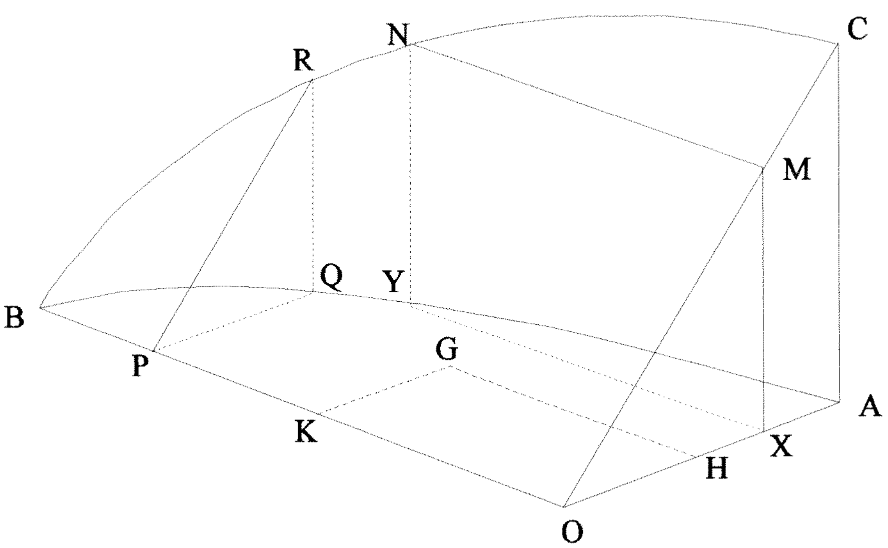
Avec les notations intégrales actuelles, ceci se traduit par:

$$(OABC) = \int y.x.dx = \frac{1}{2}\int x^2.dy$$

en prenant OA pour l'axe des abscisses et OB pour l'axe des ordonnées. On retrouve ainsi la formule qui dit que l'ordonnée du centre de gravité est:

$$\frac{\int x.f(x).dx}{\int f(x).dx}$$

figure 14



A la manière de Blaise Pascal, calculons l'aire d'une arche de sinusoïde[7].

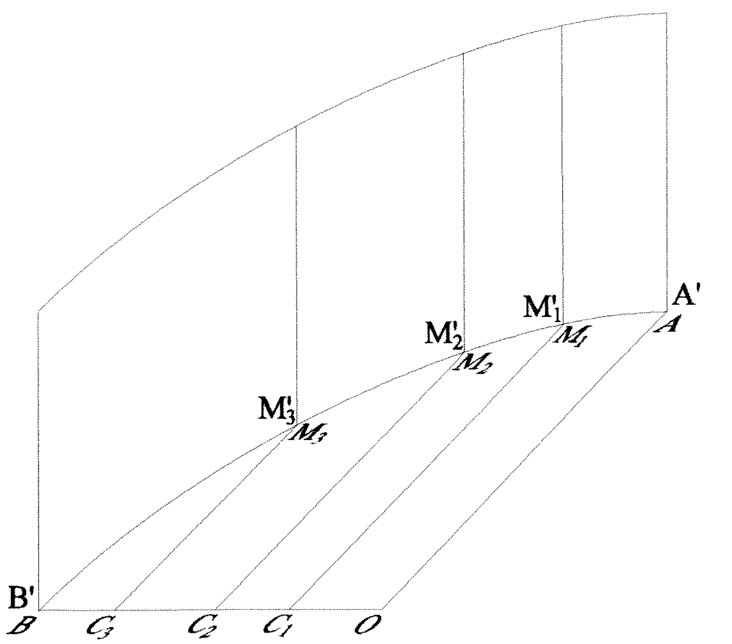
Première partie: Construction de la sinusoïde.

1. Tracer un quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ de centre O et de rayon 1dm.
2. Soit "n" un nombre entier naturel (remarque: plus n est grand, plus le dessin final sera précis).

   Sur le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$, marquer des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
3. Construire les projections orthogonales $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sur le segment [OB]. (Cf. figure 15)
4. Perpendiculairement au plan du quart de cercle, enrouler une feuille de papier sur le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et marquer les points $A', M'_1, M'_2, \ldots, M'_n, B'$ en face des points $A, M_1, M_2, \ldots, M_n, B$.
5. Dérouler la feuille.
6. Perpendiculairement au segment [A'B'], tracer le segment [A'Q] et les segments $[M'_k Q_k]$ de telle sorte que $A'Q = AO$ et $M'_k Q_k = M_k C_k$ (cf. figure 16).
7. Relier les points Q_k.

La courbe B'Q ainsi obtenue est une sinusoïde.

figure 15



Remarque: pour ne pas surcharger cette figure, on a pris n = 3. Il est clair que cette valeur est insuffisante pour un dessin correct de la sinusoïde.

Deuxième partie: Calcul de l'aire de la surface délimitée par la sinusoïde.

Le but de l'exercice ci-dessous est de calculer l'aire de la surface délimitée par la sinusoïde et les segments A'Q et A'B'.

La surface $(A'QB')$ est la réunion des surfaces $(M'_k Q_k Q_{k+1} M'_{k+1})$ donc l'aire de $(A'QB')$ est

[7] Remarque: Cette partie est inspirée très librement du *"Traité des sinus du quart de cercle"* (1659) de Blaise Pascal. Elle pourrait faire l'objet d'un module en classe de première. Le but principal est de faire réfléchir sur les notions d'approximation d'une surface par des surfaces qui deviennent infiniment petites mais aussi d'approximation d'arcs de cercle par des segments de tangente. Il n'est pas nécessaire de connaître la définition des fonctions trigonométriques ou de la sinusoïde.

la somme des aires de $\left(M'_k Q_k Q_{k+1} M'_{k+1}\right)$.

Or, lorsque le nombre "n" est grand, la surface $\left(M'_k Q_k Q_{k+1} M'_{k+1}\right)$ peut être assimilée à un rectangle et son aire est: $\mathcal{A}_k = M'_k Q_k \,.\, M'_k M'_{k+1}$.

1. En revenant au cercle qui a donné naissance à la sinusoïde, montrer que:

$$\mathcal{A}_k = M_k C_k \,.\, \overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$$

2. Tracer la tangente au cercle qui passe par le point M_k. Celle-ci coupe la droite $C_{k+1}M_{k+1}$ au point P_{k+1} (Ce point n'a pas été dessiné sur le figure 16).

   Pourquoi peut-on confondre la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$ avec la longueur du segment $M_k M_{k+1}$?

3. On appelle H_{k+1} le point d'intersection de la droite $C_{k+1}M_{k+1}$ avec la parallèle à (OB) qui passe par le point M_k.

   Montrer que les triangles OC_kM_k et $M_{k+1}H_{k+1}M_k$ sont semblables et en déduire que :

$$M_k C_k . M_k M_{k+1} = OM_k . H_{k+1} M_k$$

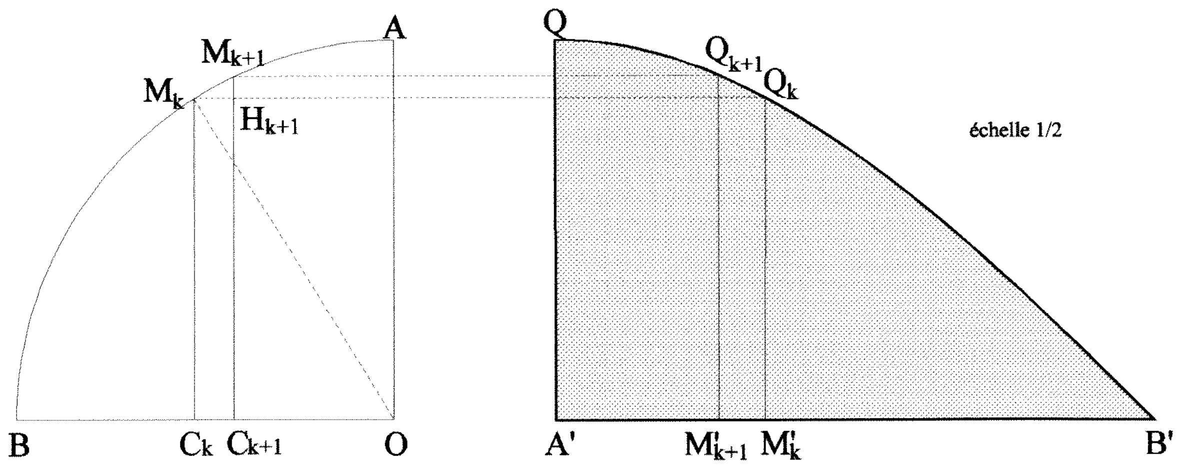
   et que:

$$\mathcal{A}_k = OA.\, C_k C_{k+1}.$$

4. Montrer que:

$$\boxed{\text{L'aire cherchée est égale à } \mathbf{1\ dm^2}}$$

figure 16



Tangente à une courbe.

Résoudre des problèmes par le mouvement...

"*Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle*" (Euclide, livre III des Eléments). Cette notion de tangente chez les Anciens - Une droite qui touche une courbe en un seul point - ne permet pas l'élaboration d'une méthode générale de construction de la tangente. Jusqu'au XVII$^{\text{ième}}$ siècle, la recherche de la tangente à une courbe est un problème secondaire, qui n'aura été traité que dans le cas du cercle, des coniques par Apollonius ou de la spirale par Archimède.

Au milieu du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, des préoccupations nouvelles (par exemples en optique ou en cinématique) font évoluer la notion de tangente. Pour de nombreux savants de cette époque (Torricelli, Roberval,...), une courbe est la trajectoire d'un point mobile et la tangente à cette courbe, une représentation de la vitesse du point. Cette nouvelle approche permet non seulement de retrouver les résultats d'Apollonius et d'Archimède, mais aussi de construire la tangente à d'autres courbes comme la cycloïde, la quadratrice d'Hippias, etc. La relation entre la tangente et l'idée de vitesse est à la base de la notion de dérivée et du calcul différentiel.

Deux autres savants du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, Pierre de Fermat et Isaac Barrow proposent une autre approche de la tangente. Sans la définir explicitement, Fermat considère la tangente comme la position limite d'une sécante lorsque les points d'intersection avec la courbe tendent à se rapprocher. A partir de cette notion de "position limite", Fermat élabore une méthode générale de construction de la tangente à une courbe. Cette méthode est celle qu'on utilise encore de nos jours.

Parallèlement au développement de la recherche des tangentes, de nouvelles méthodes de quadrature voient le jour au XVII$^{\text{ième}}$ siècle. Celles-ci donnent naissance au calcul intégral. A la fin du siècle, Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz reconnaissent le lien entre deux problèmes apparemment indépendants: le problème des tangentes est l'inverse du problème des quadratures et vice versa. Actuellement, nous résumons cette relation fondamentale entre le calcul différentiel et le calcul intégral par la formule: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Dans son ouvrage intitulé "*Introduction à l'analyse des infinis*" paru en 1748, Leonhard Euler inverse l'ordre épistémologique et construit l'analyse en partant de la notion de fonction pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral: la mécanique et la géométrie qui sont à la base des principales notions d'analyse ne sont plus que des applications de celle-ci ! Depuis Euler, les mathématiciens ont conservé cette nouvelle architecture, qui est également celle des programmes d'enseignement.

Le document ci-dessous cherche à rétablir, en partie, l'ordre historique qui consiste à construire la tangente à une certaine courbe par la méthode de G.P. Roberval. Dans un deuxième temps, il exploite la relation entre les notions de tangente, de vitesse et éventuellement de dérivée pour résoudre des problèmes de rectification d'une courbe, c'est à dire de la comparaison de la longueur d'une courbe à la longueur d'un segment de droite.

La méthode de Gilles Personne de ROBERVAL.

La tangente (Roberval dit *la touchante*) à une courbe en un point M est la direction du mouvement de ce point. (Voir encadré ci-dessous extrait du "Traité des indivisibles" de G.P. ROBERVAL (1693)).

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mémes mélez.
Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de proprietez ſpécifiques, qui nous faſſent connoitre les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.
Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dés qu'on l'aura conſideré avec un peu d'at tention.

Regle generale.

PAR les proprietez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.
La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt trés generale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répéter.

Remarque 1: Pour faciliter le travail de recherche de la direction lorsque le mouvement du point M est la conséquence de plusieurs mouvements, nous utiliserons l'outil vectoriel et nous représenterons chaque mouvement par un vecteur -appelé « vecteur vitesse » qui a pour direction et sens, la direction et le sens du mouvement et pour norme la vitesse linéaire du point.

Par exemple lorsque le point M se déplace sur une droite (d), le déplacement de ce point est représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la droite (d), pour sens le sens du déplacement et pour norme la vitesse linéaire de M (cf.figure 1).

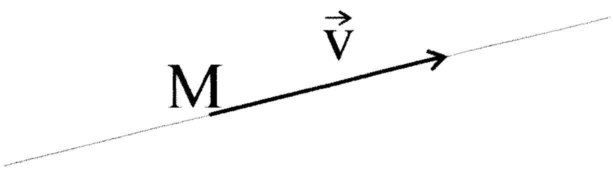


figure 1

Tangente à une courbe

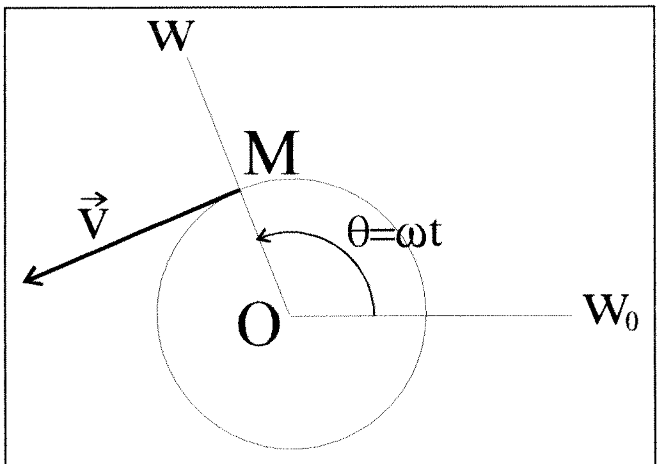


figure 2

Lorsque le point M est fixe sur une demi-droite [Ow qui pivote autour du point O avec une vitesse angulaire ω (exprimée en rad/s), le point M décrit un cercle de centre O et de rayon OM. Le déplacement de M est représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la perpendiculaire à (OM), pour sens, le sens de rotation et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 2).

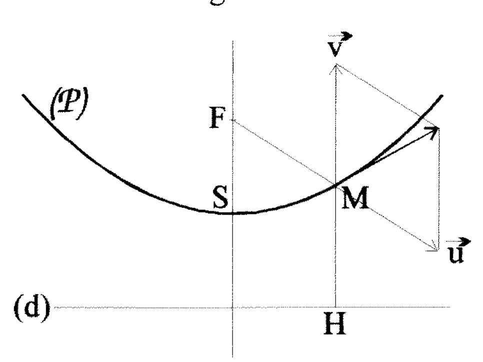
EXERCICE 1:

1. Montrer que dans ce dernier cas, la vitesse linéaire de M est $OM.\omega$.
2. Connaissant le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M, construire le vecteur vitesse d'un point quelconque de la demi-droite [Ow.

Remarque 2: Lorsque le déplacement de M résulte de la composition de plusieurs mouvements, celui-ci est représenté par la somme des vecteurs représentant chaque mouvement.

Application aux coniques.

figure 3



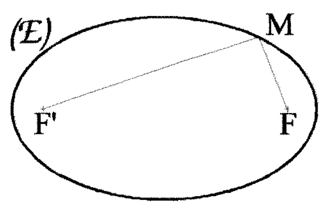
La parabole (𝒫) de foyer F et de directrice (d) est l'ensemble des points M qui vérifient $MF = MH$ (cf. figure 3) Le mouvement du point M, décrivant la parabole, est composé de deux mouvements représentés par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de direction $\vec{FM}$ et $\vec{HM}$ et de même norme. La direction de la tangente à la parabole (𝒫) en M est donc la direction de la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$.

EXERCICE 2:

1. Soit l'ellipse (ℰ) de foyers F et F' (ℰ est l'ensemble des points M qui vérifient $MF + MF' = 2a$); montrer que la tangente à l'ellipse est la bissectrice (extérieure) de l'angle $\widehat{FMF'}$. (cf. figure 4)

2. De la même manière, chercher la tangente à une hyperbole dont on connaît les deux foyers.

figure 4



Applications: tangente à la spirale d'Archimède et à la cycloïde.

Voir les documents consacrés à ces courbes.

Rectification d'une courbe

La connaissance de la tangente à une courbe peut servir à rectifier c'est à dire à "calculer" la longueur de cette courbe.

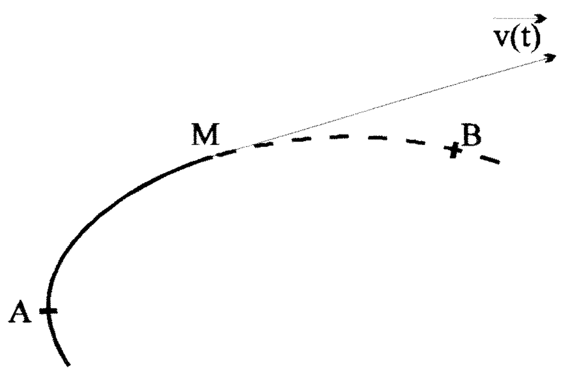
Par exemple, pour calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la figure 5, supposons connue la vitesse $v(t) = \left\| \vec{v}(t) \right\|$ du point mobile M à chaque instant t. Posons $s(t) = \overset{\frown}{AM}$.

Alors, par définition, on a:

$$\dot{s}(t) = v(t).$$

Lorsqu'il est possible de trouver une primitive de v(t), il est possible de calculer la longueur de $\overset{\frown}{AB}$:

figure 5



$$\overset{\frown}{AB} = s(t_B) - s(t_A)$$

où t_A et t_B désignent les instants où le mobile est respectivement en A et en B. Ce résultat est celui qui est appliqué pour trouver la longueur d'une arche de cycloïde. (voir le document "cycloïde").

Dans le cas de la spirale, il n'est pas facile de trouver une primitive de v(t). On peut dans ce cas chercher une valeur approchée de la manière suivante.
Avec les données du document intitulé "la spirale d'Archimède" et les notations de la figure 6, on a:

$$v_1 = \left\| \vec{v_1} \right\| = 2 \quad cm / s$$

$$\omega = 1 \text{ tour par seconde } = 2\pi \quad rd / s \quad \text{d'où} \quad v_2 = \left\| \vec{v_2} \right\| = OM.\omega = 4\pi t \quad cm / s$$

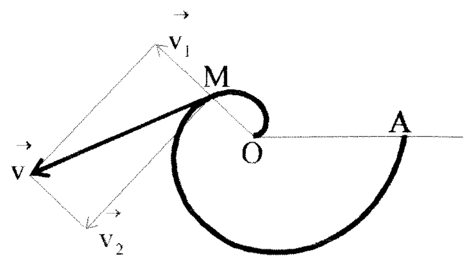
Les deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ étant orthogonaux, on peut écrire:

Tangente à une courbe

$v(t) = \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4 + 16\pi^2 t^2}$

La fonction $t \longrightarrow v(t)$ est croissante, donc la distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 est comprise entre $v(t_1).(t_2 - t_1)$ et $v(t_2).(t_2 - t_1)$.

figure 6



EXERCICE 3:

1. A l'aide d'une calculatrice, trouver un encadrement des distances parcourues par le point M entre les instants 0 et 0,1 s; 0,1 et 0,2 s;...; 0,8 et 0,9 s; 0,9 et 1,0 s.
2. En déduire une valeur approchée de la longueur de l'arc de spirale $\overset{\frown}{OA}$.

Application à l'épicycloïde.

Définition: soit (C) et (C') deux cercles de centres O (fixe) et Ω, de rayons R et r; le cercle (C') roule sans glisser sur le cercle (C), M un point quelconque sur (C'); La trajectoire de M est appelée « épicycloïde ». (cf. figure 7)

EXERCICE 4.

1. Construire la tangente à l'épicycloïde en un point M quelconque et montrer que la normale en M est la droite (MP).
2. Montrer que la longueur d'une arche d'épicycloïde est: $8r\left(1 + \frac{r}{R}\right)$

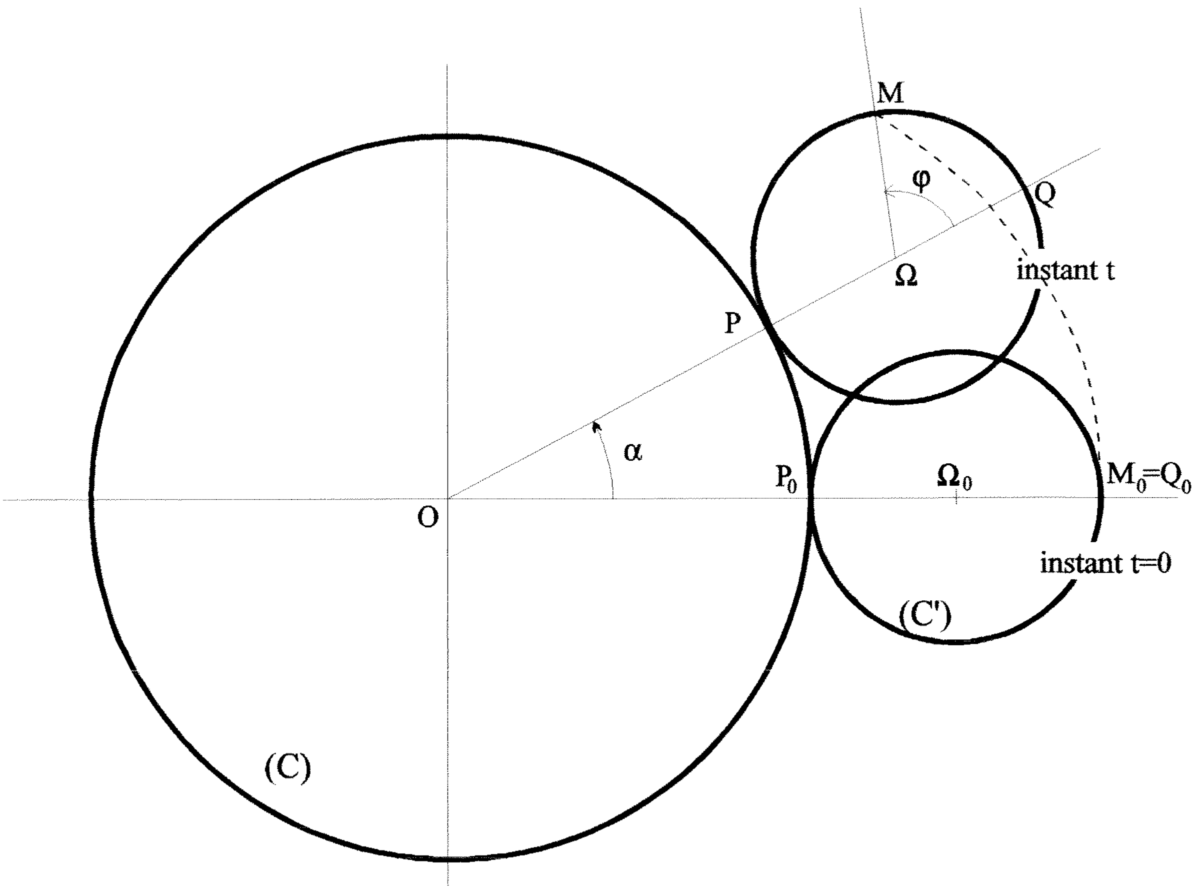
   (Une arche de l'épicycloïde correspond à un tour complet du cercle (C'))

Application à la quadratrice d'Hippias.

Définition de la quadratrice d'Hippias.

Soit $\overset{\frown}{AB}$ un quart de cercle de centre O et de rayon 1; Deux points mobiles, P et Q, partent à l'instant $t = 0$ du point A pour se diriger respectivement vers B, en restant sur le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$, et vers O, en suivant le segment [AO]. Les vitesses des deux points sont constantes et telles que P arrive en B et Q en O à l'instant $t = 1$.

figure 7



La condition de roulement sans glissement s'exprime par: $\overset{\frown}{P_0P} = \overset{\frown}{QM}$ soit, à l'aide des angles:

$$\boxed{R\alpha = r\varphi}$$

La quadratrice d'Hippias est la trajectoire du point M, le point d'intersection de [OP] et de la parallèle à [OB] passant par Q (cf. figure 8).

Construction de la quadratrice d'Hippias.

Il est facile de construire autant de points de cette courbe que l'on souhaite en construisant la bissectrice des angles et la médiatrice des segments (cf. figure 9). Mais la construction à la règle et au compas d'un point quelconque est impossible.

Tangente à une courbe

Tangente à la quadratrice d'Hippias.

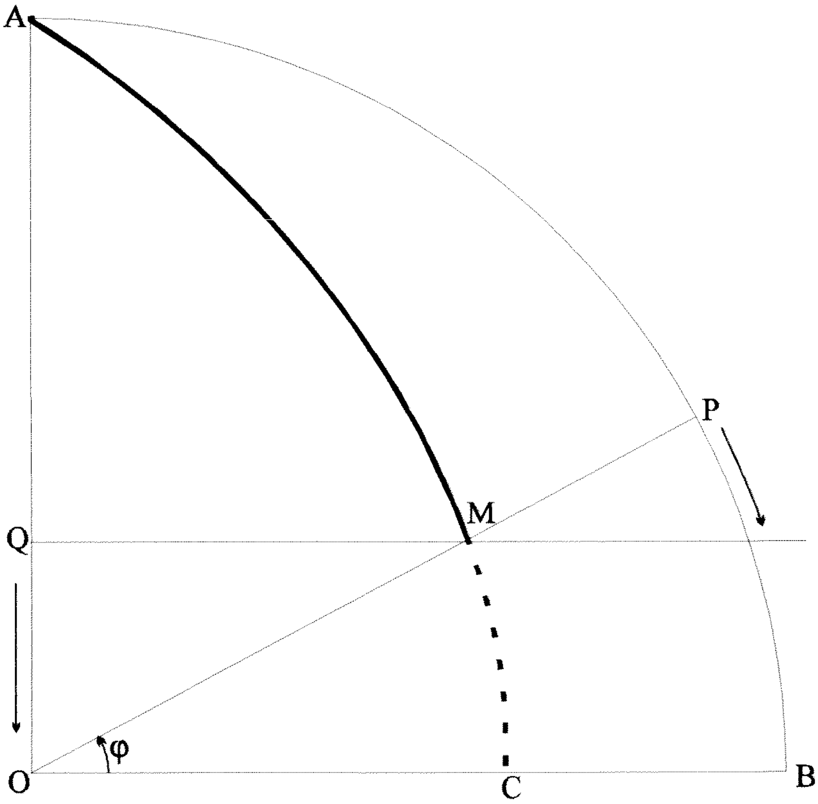
(On appelle $\overrightarrow{MU}$ un vecteur tangent à la quadratrice en un point quelconque M.)

Supposons le problème résolu...

On considère le vecteur $\overrightarrow{MU}$ comme le vecteur vitesse du point mobile M. Celui-ci se décompose de deux manières différentes:

1. $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MV}$ où $\overrightarrow{MH}$ représente la vitesse horizontale du point M et $\overrightarrow{MV}$ la vitesse verticale.
2. $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MT}$ où $\overrightarrow{MN}$ représente la vitesse normale au segment [OP] du point M et $\overrightarrow{MT}$ la vitesse suivant [OP].

figure 8



EXERCICE 5

1. Montrer que $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{AO}$
2. En supposant connue la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, construire le vecteur vitesse $\overrightarrow{PR}$ du point P et en déduire le vecteur $\overrightarrow{MN}$.
3. Par projection sur (MV), montrer que $\overrightarrow{MT'} = \overrightarrow{N'V}$.
4. En déduire la construction de $\overrightarrow{MT}$ puis de $\overrightarrow{MU}$.

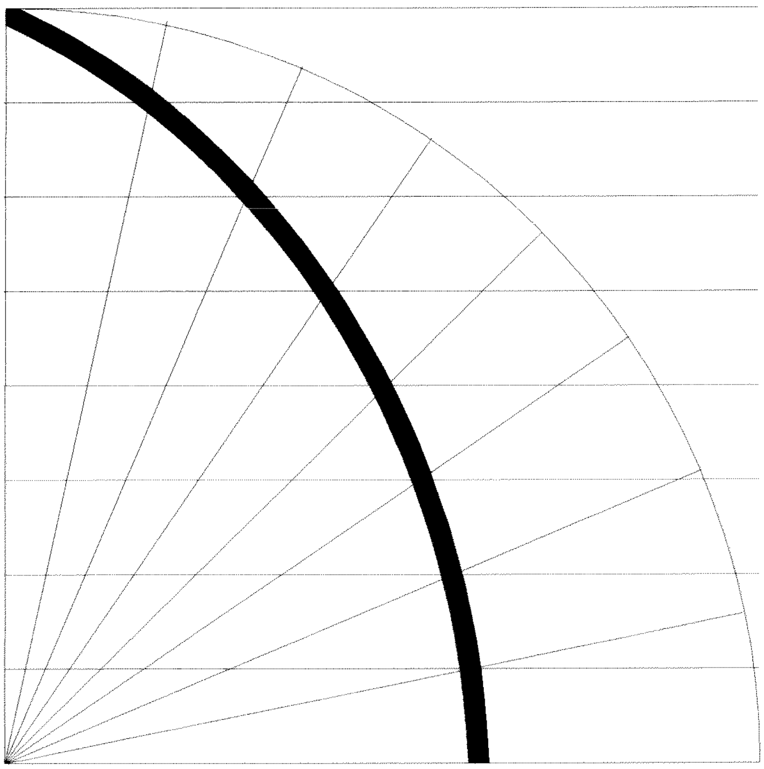
EXERCICE 6

Le but de cet exercice est de trouver le point d'intersection C de la quadratrice avec [OB].

1. Montrer que lorsque le point M est en C, $\vec{MN} = \vec{MU} = \vec{MV}$
2. En déduire que:

$$\boxed{OC = \frac{1}{\overset{\frown}{AB}}}$$

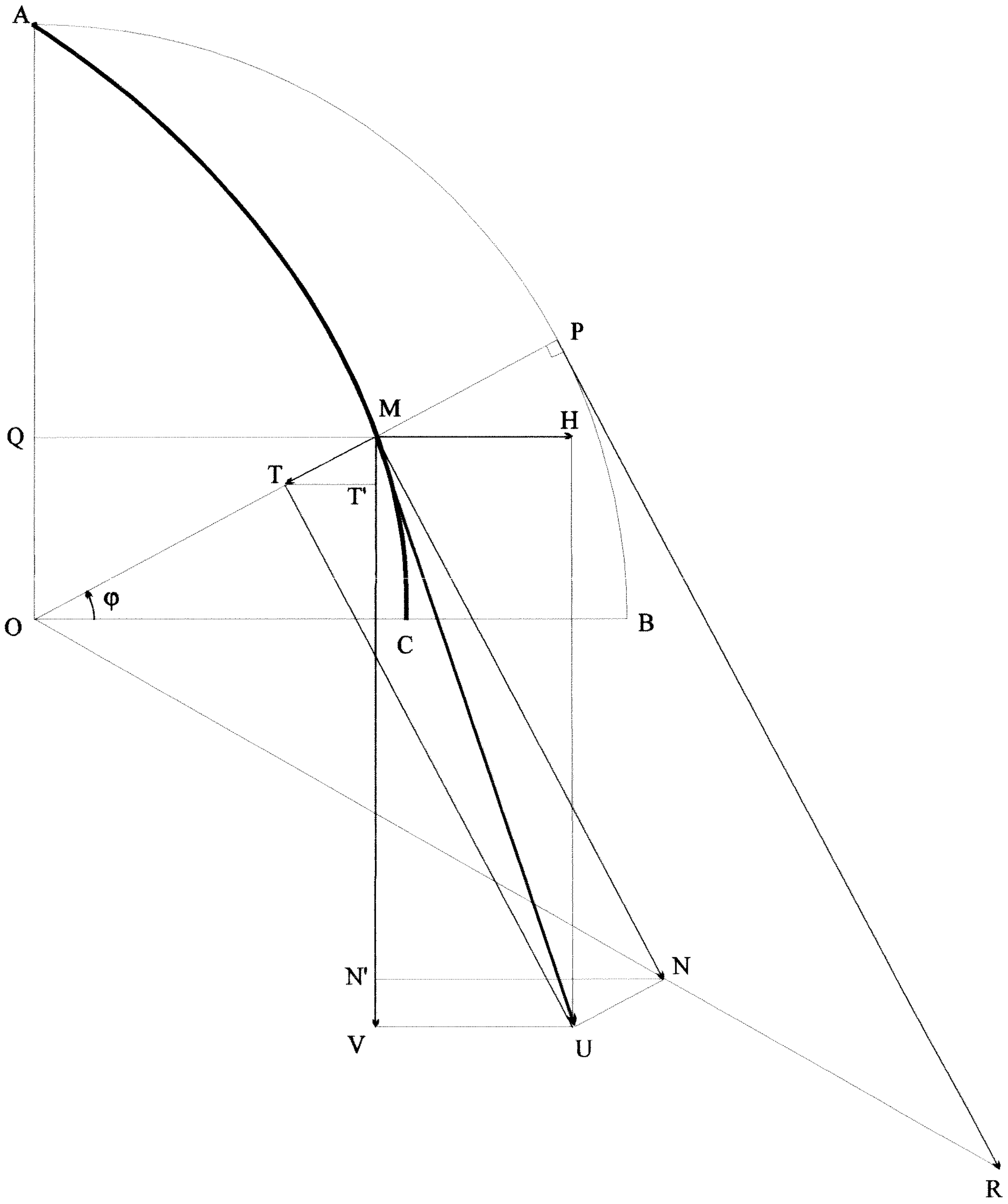
figure 9



Si on savait construire le point C de la quadratrice, on saurait construire un segment de longueur égale à un quart de cercle, et, par suite, on saurait rectifier le cercle. Malheureusement nous ne savons pas construire le point C.

Toutefois le résultat ci-dessus est intéressant car il nous permet de trouver " la limite quand y tend vers 0 de $\dfrac{y}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}y\right)}$ "

figure 10



EXERCICE 7

1. Exprimer, en fonction de t, l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}\right)$ et l'ordonnée du point Q.
2. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du point M; exprimer $\frac{y}{x}$ en fonction de φ et montrer que $x = \dfrac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)}$.
3. En déduire (avec les notations actuelles): $\boxed{\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)} = \dfrac{2}{\pi}}$

La démonstration de Pappus d'Alexandrie de: $OC = \dfrac{1}{\overset{\frown}{AB}}$.

Pour démontrer l'égalité $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$, Pappus d'Alexandrie raisonne par l'absurde.

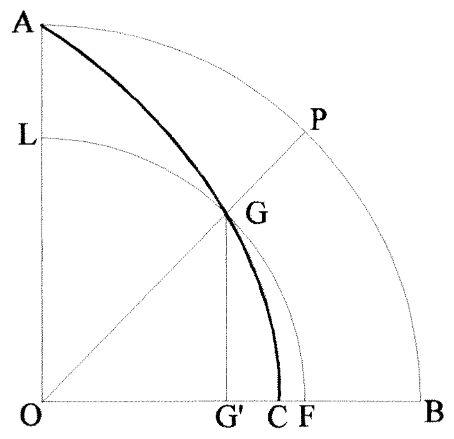
Il considère un point F sur [OB] et étudie les trois possibilités qui peuvent se présenter:

ou $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$ avec $OF > OC$

ou $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$ avec $OF < OC$

ou $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$ avec $OF = OC$

figure 11



Dans le premier cas, il trace le cercle de centre O et de rayon OF. Ce cercle coupe la quadratrice en G et [OA] en L. G' est la projection de G sur [OB] (cf. figure 11).
Comme les arcs de cercle sont proportionnels aux rayons, on a:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OB} = \frac{OB}{OF} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{LF}} \quad \text{d'où} \quad \overset{\frown}{LF} = OB.$$

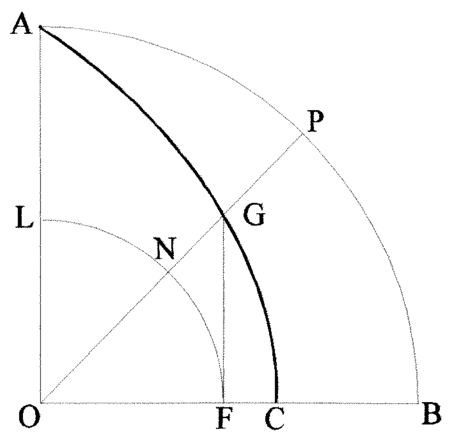
Par conséquent: $\dfrac{OB}{GG'} = \dfrac{OA}{GG'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{PB}} = \dfrac{\overset{\frown}{LF}}{\overset{\frown}{GF}} = \dfrac{OB}{\overset{\frown}{GF}}$ et $\overset{\frown}{GF} = GG'$

Cette dernière égalité est évidemment absurde.

EXERCICE 8

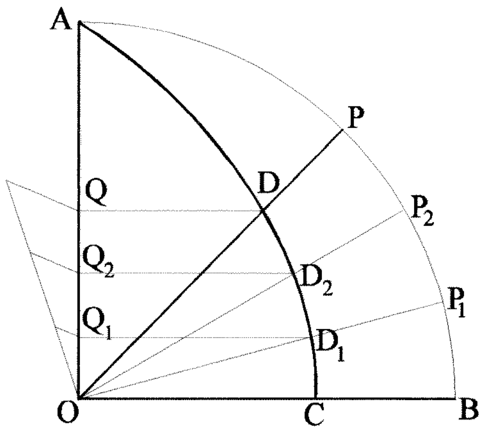
Montrer que l'hypothèse $\frac{OB}{OF} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$ avec OF < OC mène à la contradiction $GF = \overset{\frown}{NF}$ (utiliser la figure 12) et en déduire que $\frac{OB}{OC} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{OB}$.

figure 12



La trisection d'un angle.

figure 13



Nous avons vu que la quadratrice d'Hippias permettait de rectifier donc de quarrer le cercle (sans résoudre le problème de la quadrature du cercle) D'où son nom.

En fait Hippias d'Elis pensa à cette courbe pour résoudre le problème de la trisection d'un angle. Rappelons que ce problème consiste à partager, à la règle et au compas évidemment, un angle donné en trois angles égaux.

En effet, pour réaliser la trisection de l'angle $\widehat{BOP}$, on prend le point d'intersection D de la quadratrice avec [OP] et le point Q correspondant sur [OA] (cf. figure 13). Puis on partage le segment [OQ] en trois segments de même longueur: $OQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q$. Les parallèles à (OB) menées par Q_1 et Q_2 coupent la quadratrice en D_1 et D_2.

EXERCICE 9

1. Montrer que les trois angles $\widehat{BOD_1}$, $\widehat{D_1OD_2}$, $\widehat{D_2OD}$ sont égaux.

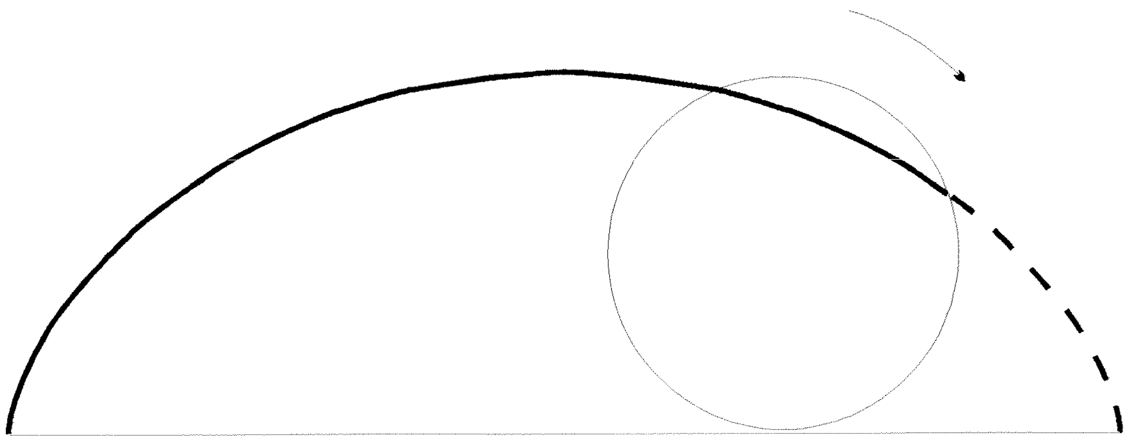
   En déduire que: $\widehat{BOP_1} = \widehat{P_1OP_2} = \widehat{P_2OP}$.
2. Montrer que la quadratrice permet, en fait, de partager un angle en "n" angles égaux où n est un entier naturel quelconque.

Conclusion

Pour partager un angle en trois, HIPPIAS fait appel au mouvement: la quadratrice d'Hippias sera appelée *courbe mécanique*.

L'excellence de la géométrie prônée par PLATON interdisait l'utilisation des courbes mécaniques parce que le matériel ne peut être un moyen d'accéder aux lois des mathématiques. A la fin du premier siècle de notre ère, PLUTARQUE écrit: "PLATON s'indigne et leur reprocha (aux mathématiciens qui les utilisèrent) énergiquement de perdre et de ruiner l'excellence de la géométrie, qui désertait avec eux les notions abstraites et intelligibles pour passer aux objets sensibles [...]. C'est ainsi que la mécanique déchue fut séparée de la géométrie; et, longtemps méprisée par la philosophie, elle devint un des arts militaires."

La cycloïde



Dans l'*Histoire de la Roulette* datée du 10 octobre 1658, Blaise Pascal écrit:

La roulette (aussi appelée trochoïde ou cycloïde) *est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; [...] ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire [...] supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*

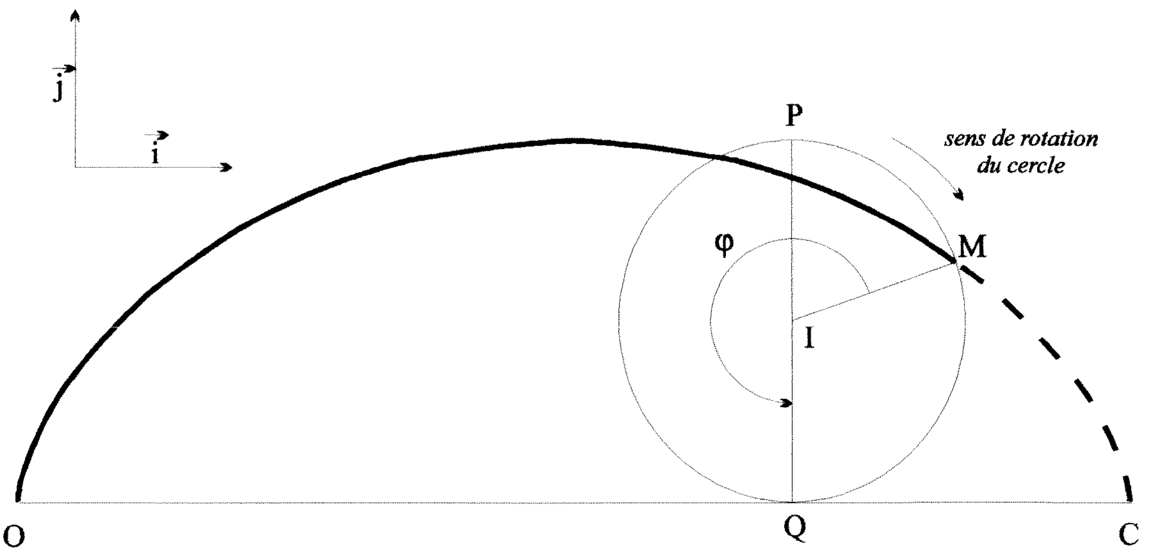
Dans ce même texte, Blaise Pascal nous apprend que les plus grands mathématiciens de l'époque ont cherché à "*connaître la nature et les propriétés* " de cette courbe. On y trouve entre autres les noms de Roberval, de Fermat, de Descartes, de Wren, de Huyghens...Chacun trouvant une propriété de la cycloïde ou une autre démonstration d'une propriété déjà connue.

Le problème ci-dessous propose de trouver et de démontrer quelques propriétés de la cycloïde, souvent par des méthodes "modernes" parfois par des méthodes (apparemment) plus anciennes.

Définition de la cycloïde.

Soit (C) un cercle de centre I et de rayon r;. La cycloïde est la trajectoire d'un point M du cercle (C) lorsque celui-ci roule sans glisser sur une droite. Cette droite est appelée la base de la cycloïde (cf. figure 1).

figure 1



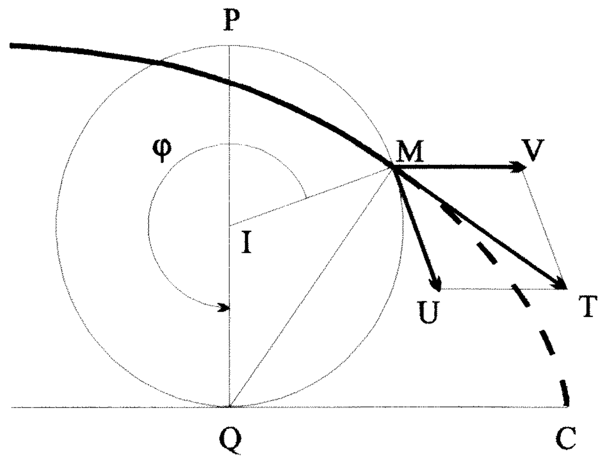
Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité: $OQ = \overset{\frown}{QPM}$

Tangente et normale à la cycloïde à un instant t quelconque.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, nous appliquerons le principe énoncé par Gilles Personne de Roberval. (voir le & "tangente à une courbe")

Le mouvement du point M, le point générique de la cycloïde, peut être décomposé en deux mouvements: un mouvement de translation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MV}$ et un mouvement de rotation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MU}$. (cf. figure 2)

figure 2



1. Préciser la direction et le sens de ces deux vecteurs et montrer que "le roulement sans glissement" se traduit par l'égalité MU=MV.

2. En déduire un vecteur directeur $\overrightarrow{MT}$ de la tangente à la cycloïde lorsque le point M n'est pas en C.
3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{MT}$ lorsque le point M est en C ?
4. Montrez que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QP}\right)$ est la moitié de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IP}\right)$.

   Déduisez-en que les droites (MQ) et (MT) sont orthogonales et que:

la normale à la cycloïde en M est la droite (MQ).

On suppose dans cette question et la suivante, que la vitesse angulaire ω du cercle (C) (en d'autres termes $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) est constante. Exprimez la norme du vecteur $\overrightarrow{MT}$ et la vitesse du point M en fonction de la variable t.

5. **Application: <u>longueur d'un arc de cycloïde.</u>**

   Soit la fonction $S: t \longrightarrow S(t) = \overset{\frown}{OM}$; En remarquant que $\dot{S}(t) = v(t)$ (la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t c'est à dire le temps), montrez que:

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = 4r\left(1-\cos\frac{\omega t}{2}\right) = 4r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)^2}$$

Et en particulier :

$$\boxed{\overset{\frown}{OC} = 8r}$$

Equations paramétriques de la cycloïde.

1. Montrez qu'avec les notations de la figure 1, une représentation paramétrique de la cycloïde dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est:

$$\boxed{\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1-\cos\varphi) \end{cases}}$$

2. Calculez les dérivées de x et de y par rapport à la variable φ et déduisez-en que:

$$\boxed{\overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 2r\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}}$$

3. Donnez un vecteur unitaire de la tangente et un vecteur unitaire de la normale en M à la cycloïde.

   Déduisez-en la tangente à la cycloïde en O et en C.

4. On appelle u l'angle orienté $u = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{IP}\right)$; montrez que le rapport $\dfrac{\sin^2 u}{y}$ est constant.

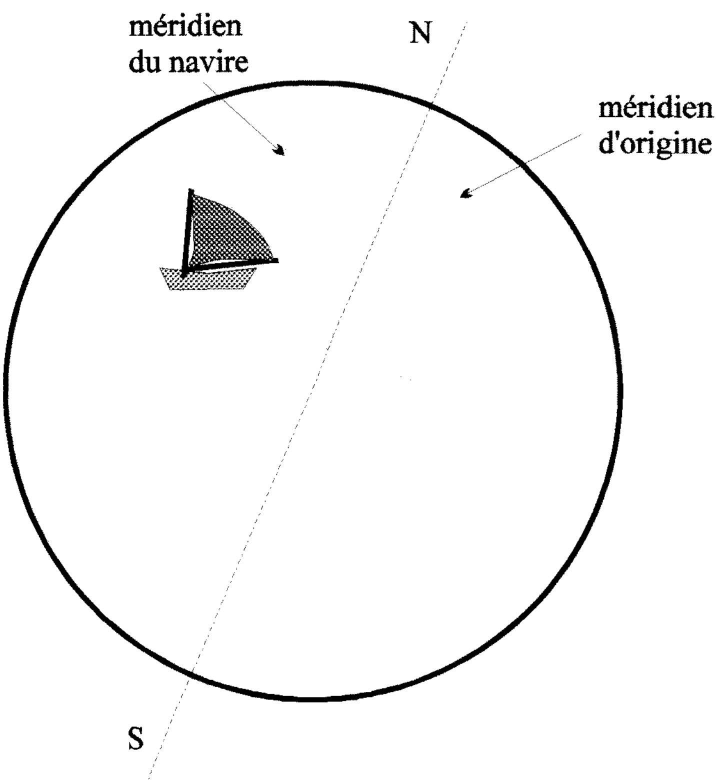
Le pendule cycloïdal de Chrisrian Huygens

La découverte des Amériques et l'expansion du commerce maritime obligent les marins à changer leurs habitudes. Contrairement à leurs prédecesseurs, les navigateurs du XVII ième siècle s'éloignent des côtes et s'aventurent en haute mer. Aussi, leur faut-il apprendre à se repérer convenablement c'est à dire à trouver la latitude et la longitude du bateau. Si la latitude du navire s'obtient assez facilement en mesurant la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, il n'en est pas de même de la longitude: il n'existe aucun moyen simple de l'évaluer ! De nombreuses cargaisons sont perdues et des fortunes gaspillées.

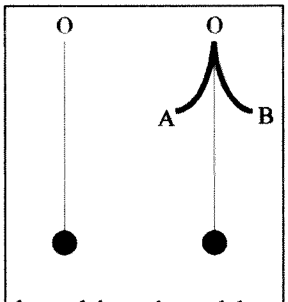
Les pouvoirs prennent rapidement conscience de ce problème et promettent de fortes récompenses à celui qui résoudra le secret des longitudes: le Stathouder de Hollande promet 25000 florins, Charles II d'Angleterre un traitement de 100 livres l'an et le Cardinal de Richelieu une pension de 2000 francs...Toutes ces récompenses incitent les savants à se mettre au travail.

Un des principes pour trouver la longitude est de comparer l'heure locale, celle du bateau, à l'heure du port d'attache ou du méridien d'origine. (Cf. encadré ci contre). Mais pour cela, il faut transporter l'heure du méridien d'origine sur le navire.

Le pendule de Galilée ou pendule simple permet de régulariser assez correctement les horloges terrestres dont le support est immobile. Malheureusement, l'isochronisme de ce pendule n'est qu'approximatif car la période des oscillations dépend de l'amplitude de ces oscillations. Une horloge de ce type se dérègle trop rapidement sur un navire.



Supposons par exemple que le soleil soit au zénith du bateau et qu'on sache qu'au même instant, il est 15 heures sur le méridien d'origine. Dans ce cas, le navire est à 3 heures à l'ouest c'est à dire à 45 degrés à l'ouest du méridien d'origine.



le pendule simple — le pendule de Huygens

Pour corriger le défaut du pendule simple, Christian Huygens a l'idée de munir le pendule de deux arcs courbes entre lesquels ont lieu les oscillations. Mais, quelle forme faut-il donner à ces arcs ? Dans ses premières tentatives, Huygens procède par tâtonnements.

En 1659, il démontre deux propriétés de la cycloïde qui lui permettront de construire un pendule dont les oscillations sont parfaitement isochrones c'est à dire indépendantes de l'amplitude des oscillations. Une horloge munit d'un tel pendule garde l'heure du méridien d'origine quel que soit les mouvements du navire et, par suite, permet de déterminer la longitude du navire.

Le but du problème ci-dessous est de présenter les deux propriétés découvertes par Christian Huygens qui sont le fondement du pendule cycloïdal.

<u>Première propriété</u>: la cycloïde est une courbe isochrone.

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement dans un plan vertical sur la cycloïde Γ engendrée par un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses (cf. figure 3)

Il s'agit de montrer que le temps mis par le point matériel M pour revenir à sa position initiale est indépendante de la position M_0 d'où on lâche le point matériel avec une vitesse nulle.

Notations: soit f une fonction de la variable t (c'est à dire le temps), on note, suivant la coutume, $\dot{f}$ sa dérivée.

1. Montrez qu'une représentation paramétrique de la cycloïde Γ est: $\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = 0 \\ z = r(1-\cos\varphi) \end{cases}$

   Remarque: dans cette représentation paramétrique, <u>φ est en fait une fonction inconnue</u> de la variable t. La connaissance de cette fonction φ nous donne la solution du problème.

2. Quelle relation peut-on écrire entre l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ et la vitesse v(t) du point M à l'instant t ?

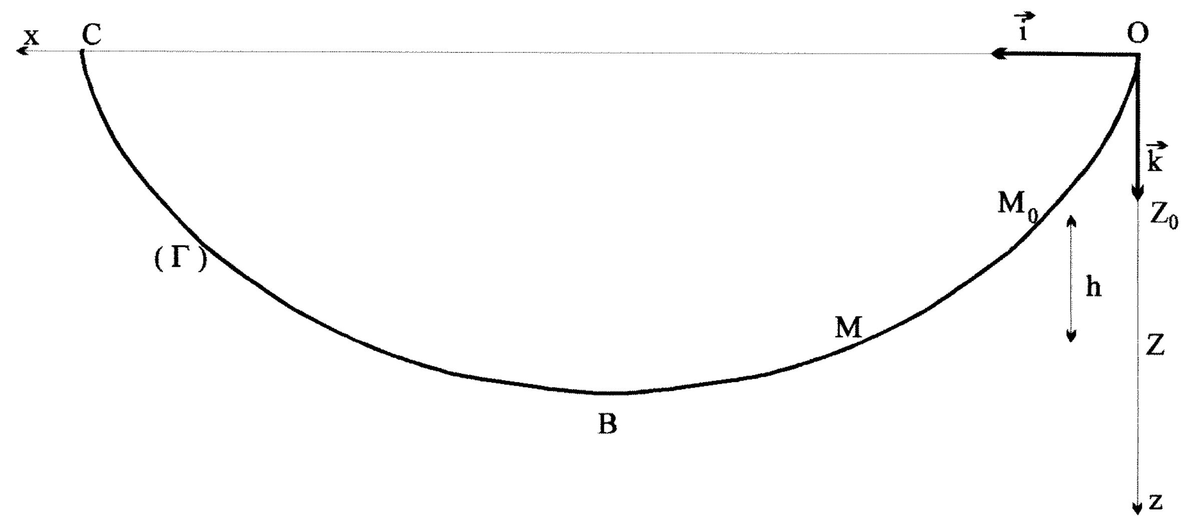
   Exprimez v(t) et s(t) en fonction de $\varphi(t)$ et de $\dot{\varphi}(t)$.

   (Rappel: l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ n'est rien d'autre que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BM}$ affectée du signe - lorsque M est entre O et B, et du signe + lorsque M est entre B et C)
3. Montrez en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que: $v(t)^2 = 2g(z - z_0)$ (*).
4. Calculez $\dot{z}$ et montrez que que $\dot{v} = g\cos\dfrac{\varphi(t)}{2}$ (indication: dérivez la relation (*))
5. Déduisez de ce qui précède que la fonction s est solution de l'équation différentielle $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ où $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{4r}}$ avec les conditions initiales $\begin{cases} s(0) = \overset{\frown}{BM_0} \\ v(0) = 0 \end{cases}$
6. Résolvez cette équation différentielle.
7. Quelle est la période des oscillations ?

Conclusion 1:

La période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations

figure 3

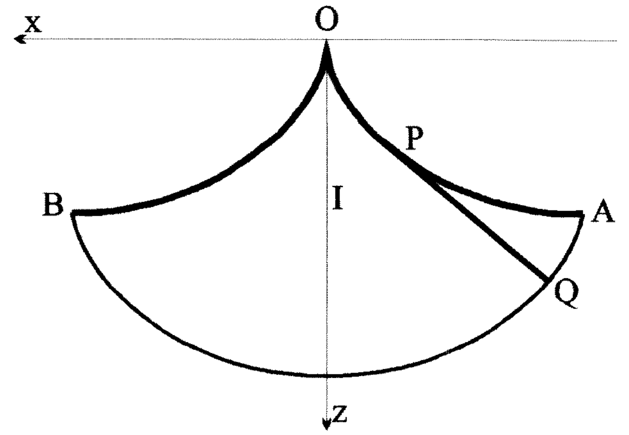


Deuxième propriété:

Soit $\overset{\frown}{OB}$ et $\overset{\frown}{OA}$ deux demi-cycloïdes identiques; Un fil dont une extrémité est fixée en O s'enroule sur cette courbe. La partie libre [PQ] du fil reste toujours tendue. Il s'agit de montrer que **lorsque la longueur du fil est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OB}$ alors l'extrémité libre du fil décrit une cycloïde dont la base est la droite (AB)** (cf. figure 4).

8. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $\overset{\frown}{OB} = 4r$.
Déduisez-en la longueur PQ.
Quelle est la direction de la droite (PQ)?
Calculez en fonction de φ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ puis du vecteur $\overrightarrow{AQ}$.
Déduisez-en que la trajectoire du point Q est une cycloïde.

figure 4

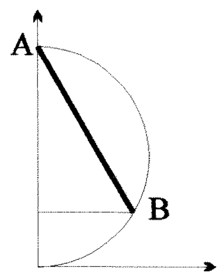


En 1663, pour vérifier l'exactitude des horloges conçues par Huygens, le Capitaine Holmes s'embarque avec deux horloges munies de pendules cycloïdaux. Huygens sait que, même sur la terre ferme, ces horloges ne sont pas parfaitement isochrones car il a négligé la résistance de l'air et les imperfections du fil. Il pense que ces défauts ne sont pas rédhibitoires en ce qui concerne la détermination de la longitude. Sans attendre le retour du navire, Huygens essaie de tirer le maximum de profit de son invention et réclame ses récompenses. Celles-ci lui seront d'ailleurs accordées. En 1666, Huygens sera invité par Colbert à faire partie de l'Académie Royale des Sciences.

La cycloïde est "la courbe de plus rapide descente"

1. Avec les notations du § précédent, quel temps faut-il au point matériel M pour aller de O à B le long de la cycloïde (le point matériel étant laché en O sans vitesse initiale)?
2. Quel temps faudrait-il au point M pour aller de O à B le long de la droite (OB) ?
3. (Cf. figure 5) Montrer que le temps mis par un point matériel pour aller de A vers B le long du segment [AB] est indépendant du point B pris sur le demi-cercle.

figure 5



Conclusion:

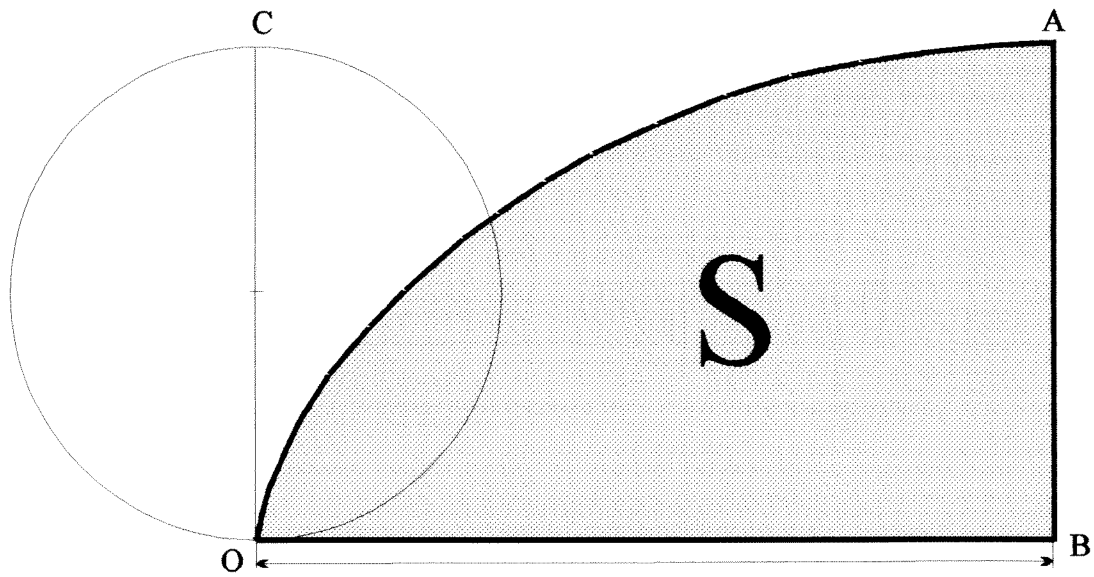
Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus rapide !

<u>Commentaire</u>: on peut d'ailleurs démontrer que la cycloïde est la "courbe de plus rapide descente" (aussi appelée la brachistochrone pour la pesanteur) c'est à dire le chemin le plus rapide de O vers B pour un point matériel pesant, abandonné sans vitesse initiale en O et glissant sans frottement le long de cette courbe.

Quadrature de la cycloïde.

But de cette partie: trouver l'aire $\mathcal{A}$ de la surface (S)=(OAB) où l'arc $\overset{\frown}{OA}$ est l'arc de cycloïde de base [OB] engendré par le cercle de diamètre [OC] (cf. figure 6).

figure 6



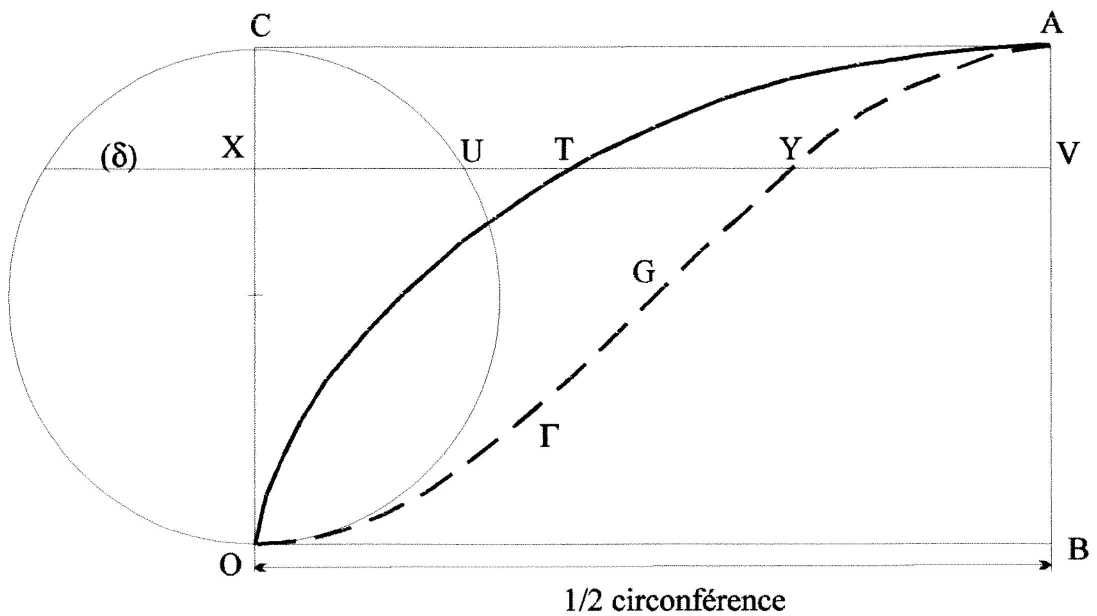
Première méthode: celle-ci est inspirée de <u>la méthode de Roberval</u>

Soit (δ) une droite parallèle à la base de la cycloïde. Cette droite (δ) coupe [OC] en X, le cercle en U et la cycloïde en T (cf. figure 7) . Sur (δ), on prend le point Y tel que $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{TY}$.

1. Donnez une représentation paramétrique de l'arc de cycloïde $\overset{\frown}{OA}$ et de la courbe Γ décrite par le point Y lorsque X décrit [OC]
2. Déduisez-en qu'une équation de Γ est: $y = r\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right)$ avec $0 \le x \le \pi r$ et que le point G de la courbe Γ d'abscisse $\pi r/2$ est centre de symétrie de Γ.
3. Montrez que l'aire de la surface délimitée par Γ, [BA] et [OB] est la moitié de l'aire du rectangle (OCAB). Calculez cette aire.
4. Calculez l'aire de la surface délimitée par Γ et l'arc de cycloïde.
5. Conclusion:

l'aire $\mathcal{A}$ est égale à trois fois l'aire du demi-cercle générateur de la cycloïde.

figure 7



Deuxième méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Blaise Pascal.

On découpe la surface (S) en "n tranches horizontales" de même épaisseur Δy. En notant $f(y_k)$ la longueur moyenne de la k-ième tranche alors une approximation de l'aire A est $\sum_{k=1}^{k=n} f(y_k)\Delta y$. En faisant tendre n vers l'infini, on a: $\mathcal{A} = \int_0^{2r} f(y)dy$ où f(y)=TV (cf. figure 8)

1. On pose g(y)=TW et h(y)=WV.

   Montrez que: $\mathcal{A} = \int_0^{2r} g(y)dy + \int_0^{2r} h(y)dy$.

2. Que représente $\int_0^{2r} h(y)dy$?

   Déduisez-en, sans calcul, que $\int_0^{2r} h(y)dy = \frac{\pi r^2}{2}$

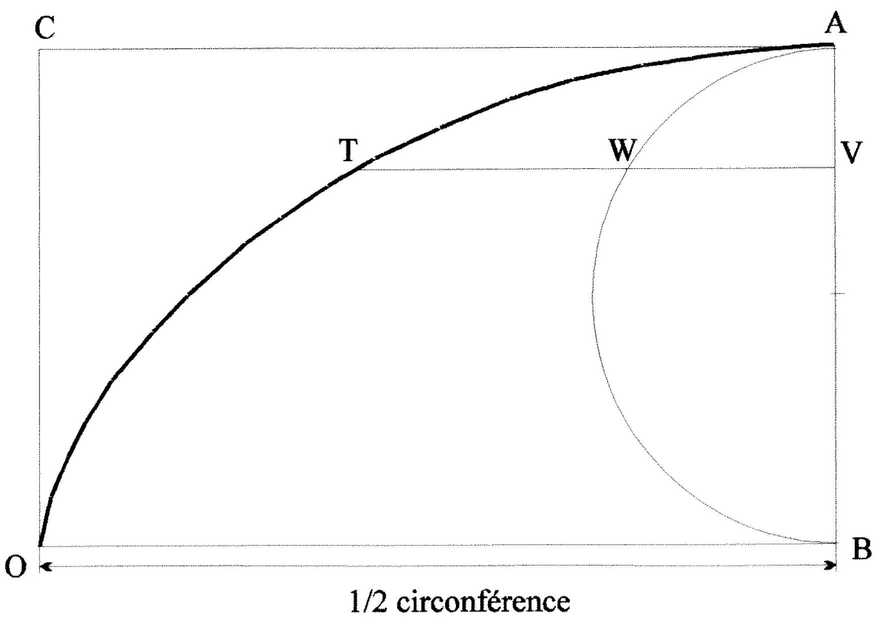
3. Montrez que le roulement sans glissement du cercle (C) se traduit par l'égalité: $TW = \overset{\frown}{AW}$.

   On pose i(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AW}$ et j(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BW}$. Démontrez les égalités suivantes: $\int_0^{2r} g(y)dy = \int_0^{2r} i(y)dy = \int_0^{2r} j(y)dy$.

   Calculez $\int_0^{2r} i(y)dy + \int_0^{2r} j(y)dy$ (remarquez que $i(y)+j(y)= \overset{\frown}{AB}$) et déduisez-en que $\int_0^{2r} g(y)dy = \pi r^2$.

4. Conclusion.

figure 8



Corrigé (partiel) des exercices

Tangente et normale à la cycloïde à un instant t quelconque.

1. C'est la définition de la cycloïde.
2. (MT) est la diagonale du losange construit sur le triangle MUV.
3. Lorsque M est en C, $\overrightarrow{MT} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{MU} = -\overrightarrow{MV}$.

   Remarque: la tangente à la cycloïde est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}\right)$. En particulier, lorsque M est en C, la tangente est perpendiculaire à (OC)
4. $\left(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IP}\right)$ car le triangle QIM est isocèle et la somme des angles dans un triangle est π.
5.
$$\left(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IP}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IQ}\right) + \left(\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP}\right)\right) = \frac{1}{2}(\varphi - \pi) \qquad (\text{mod } \pi)$$

   D'où:
$$v(t) = \left\|\overrightarrow{MT}\right\| = MT = 2.MV.\cos\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) = 2.MV.\sin\frac{\varphi}{2} = 2.r.\omega.\sin\frac{\omega t}{2}$$

S(t) est la primitive de v(t) qui s'annule pour $t = 0$.

Le point C correspond à $\varphi = 2\pi$ et par conséquent $\overset{\frown}{OC} = 8r$.

Equations paramétriques de la cycloïde.

1. Il suffit d'écrire: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QI} + \overrightarrow{IM}$ et de calculer les coordonnées de chacun des vecteurs.
2. Pas de difficulté particulière.
3. Pas de difficulté particulière.
4. $u = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{MV}\right) + \left(\overrightarrow{MV}, \overrightarrow{IP}\right) = \frac{\varphi}{2}$

   $y = r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin^2 \varphi$

   Par conséquent: $\frac{\sin^2 u}{y} = \frac{1}{2r}$

Le pendule cycloïdal de Christian Huygens

1. Cf. ci-dessus.
2. $\boxed{\dot{s}(t) = v(t)}$

$$\dot{x}(t) = 2r\sin^2\frac{\varphi(t)}{2}\dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{z}(t) = 2r\sin\frac{\varphi(t)}{2}\cos\frac{\varphi(t)}{2}\dot{\varphi}(t)$$

On en déduit:

$$v(t)^2 = \left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{z}(t)\right)^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi(t)}{2}\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2$$

Vu l'orientation choisie:

$$\boxed{v(t) = 2r\sin\frac{\varphi(t)}{2}\dot{\varphi}(t)}$$

Comme s(t) est une primitive de v(t), on a:

$$s(t) = -4r\cos\frac{\varphi(t)}{2} + k$$

Lorsque le point matériel est en B, $\varphi = \pi$ et $s = 0$, donc $k = 0$.

$$\boxed{s(t) = -4r\cos\frac{\varphi(t)}{2}}$$

3. Le théorème de l'énergie cinétique se traduit ici par l'égalité:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

D'où:

$$\boxed{v^2 = 2gh = 2g(z - z_0)}$$

4. En dérivant cette égalité, on trouve:

$$v\dot{v} = g\dot{z}$$

Or:

$$v(t) = 2r\sin\frac{\varphi(t)}{2}\dot{\varphi}(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = 2r\sin\frac{\varphi(t)}{2}\cos\frac{\varphi(t)}{2}\dot{\varphi}(t)$$

Après simplification, on obtient l'égalité demandée:

$$\boxed{\dot{v}(t) = g\cos\frac{\varphi(t)}{2}}$$

5. $\ddot{s} = \dot{v} = g\cos\frac{\varphi(t)}{2} = g\left(-\frac{s}{4r}\right) = -\omega^2 s$

6. La solution générale est:

$$s(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

En faisant intervenir les deux conditions initiales; on a:

$$\boxed{s(t) = \overset{\frown}{BM_0}\cos\omega t}$$

7. Et la période des oscillations est:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}}$$

Conclusion:

$$\boxed{\text{T ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.}}$$

8. $PQ = \overset{\frown}{PA} = 4r\cos\frac{\varphi}{2}$

Les coordonnées de P sont: $P\begin{pmatrix} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ z = r(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est tangent à la cycloïde. Or un vecteur unitaire de la tangente est: $\vec{u}\begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$.

On en déduit: $\overrightarrow{PQ} = PQ.\vec{u} = 4r\cos\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$

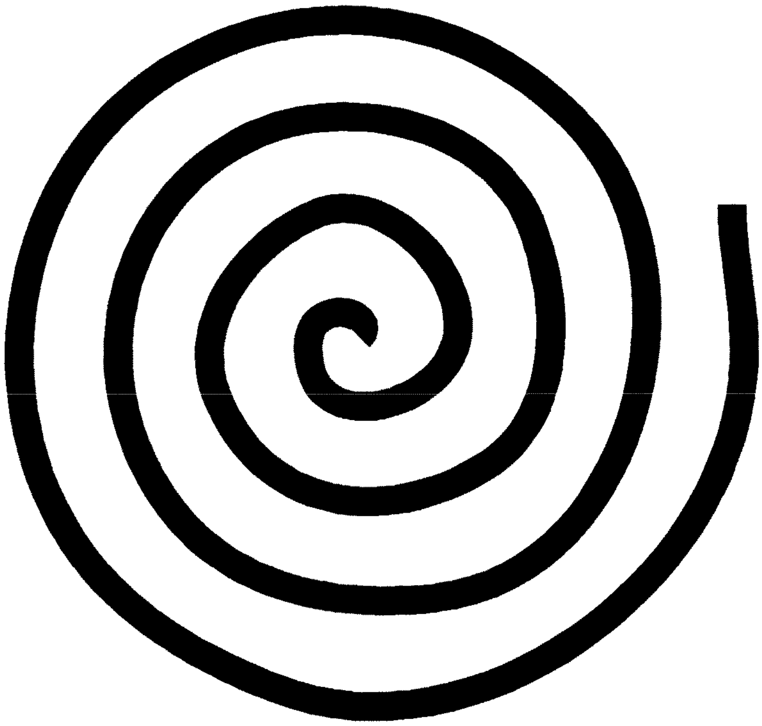
Les coordonnées de A sont: $A\begin{pmatrix} -r\pi \\ 2r \end{pmatrix}$

En écrivant que: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}$, on trouve les coordonnées de $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} r\pi + r\varphi + r\sin\varphi \\ r + r\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Enfin, en posant $\psi = \varphi + \pi$, on montre que le point Q décrit la cycloïde d'équation:

$$\begin{cases} x = r(\psi - \sin\psi) \\ z = r(1-\cos\psi) \end{cases}$$

La spirale d'archimède



Le problème de la quadrature du cercle (c'est à dire la construction à l'aide de la règle et du compas d'un carré ayant même aire qu'un cercle donné) nous semble futile à l'heure actuelle. Pourtant la recherche de la solution de ce problème - recherche qui s'est étalée sur plus de deux millénaires - s'est révélée d'une grande importance dans le développement des mathématiques. C'est ainsi que des mathématiciens comme Nicomède ou Hippias ou encore Archimède ont introduit des courbes (la conchoïde de Nicomède, la quadratrice d'Hippias et la spirale d'Archimède) qui permettraient de résoudre le problème si nous savions les construire à la règle et au compas.

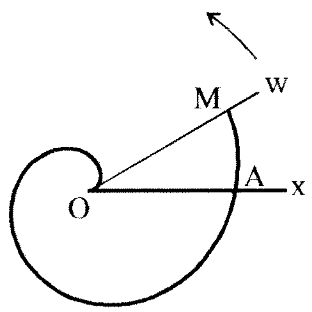
L'étude de ces courbes (forme, tangentes, aires limitées par ces courbes...) s'est montrée elle-même très fructueuse et est à la base de l'invention de nouvelles méthodes comme le calcul différentiel ou le calcul intégral.

Le problème qui suit propose l'étude d'une de ces courbes, appelée la spirale d'Archimède, du nom de celui qui le premier l'imagina et l'étudia.

Définition de la spirale.

Dans le « *Traité des spirales* », Archimède définit la spirale de la manière suivante: « *Lorsque une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira une spirale.* »

figure 1



Soit O un point fixe du plan et [Ow une demi-droite qui pivote autour de O à la vitesse angulaire constante de un tour par seconde; Sur cette demi-droite, un point M se déplace à la vitesse de 2 cm par seconde. A l'instant t=0, [Ow est confondue avec [Ox et le point M est en O (cf. figure 1).

1. Exprimer la distance OM et l'angle orienté $\theta = ([Ox,[Ow)$ en fonction de la variable t, puis OM en fonction de θ.

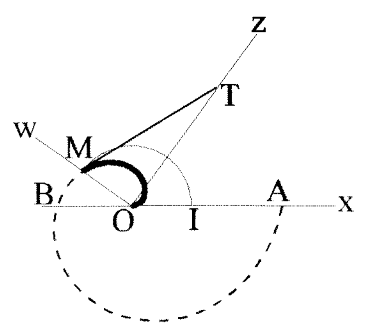
2. Sur la figure 1, on a représenté la trajectoire de M lorsque t varie de 0 à $^{13}/_{12}$ seconde. Vérifier l'exactitude de cette figure pour les valeurs suivantes de t (en seconde): t=1/6, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 7/4.
   Connaissant la position de M à un instant quelconque t, où se trouvera M aux instants t+1? t+2? t+3?...
   Construire la spirale d'Archimède lorsque t varie de 0 à 3,5 secondes.
3. Est-il possible de trouver un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et une fonction f de telle sorte qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soit sur la spirale si et seulement si $y = f(x)$?

<u>Notation:</u> Dans la suite, les points A et B désignent les points de la spirale qui correspondent à $\theta = 2\pi$ et à $\theta = \pi$.

Tangente à la spirale et application.

1. Construire en un point quelconque de la spirale les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ représentant respectivement le déplacement de M sur la demi-droite [Ow et le mouvement de rotation de la demi-droite.
   En déduire le vecteur vitesse $\vec{S}$ de M et la tangente à la spirale en M.
2. Soit le cercle de centre O de rayon OM et T l'intersection de la tangente à la spirale en M avec la demi-droite [Oz qui est orthogonale à [Ow en O ; montrer que la longueur OT est égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ (Cf. figure 2).

figure 2



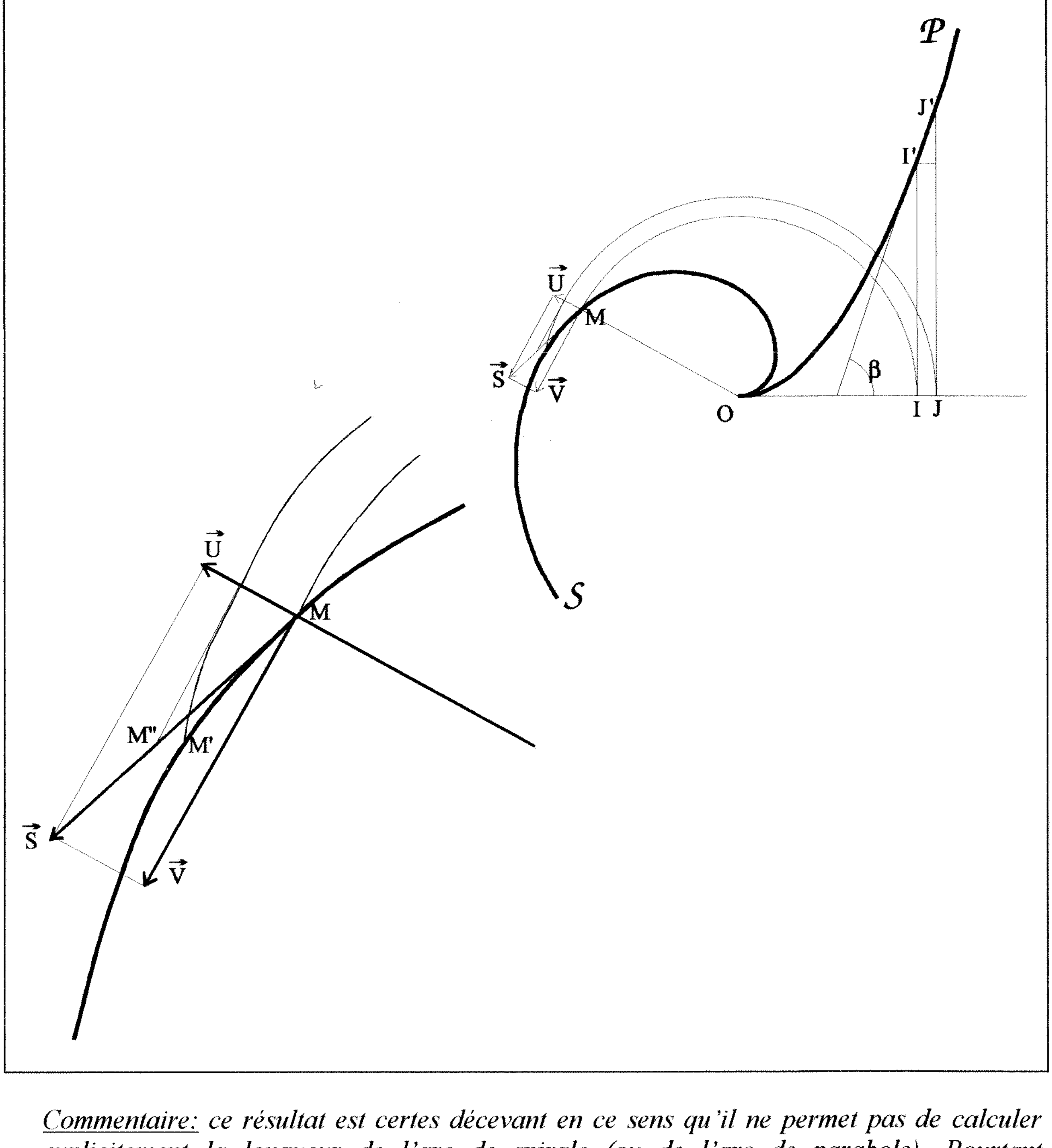
<u>Commentaire</u>: en particulier lorsque M est en B c'est à dire lorsque [Ow a effectué un demi-tour, la distance OT est égale à la circonférence d'un cercle de rayon 1. Le problème de la rectification du cercle se ramène par conséquent à la construction (à la règle et au compas évidemment) de la tangente à la spirale en B. Mais pour construire cette tangente il nous faut...la distance OT !!!

3. On appelle (P) la parabole d'équation $y = \frac{\pi}{2}x^2$ $(0 \le x \le 2)$ et on note I' et A' les points de (P) qui ont respectivement même abscisse que I et A (le point A' n'a pas été représenté sur la figure 3).
   Le but de cette question est de montrer que l'arc de spirale $\overset{\frown}{OMA}$ a la même longueur que l'arc de parabole $\overset{\frown}{OI'A'}$.

- Exprimer en fonction de x, l'abscisse de I, les tangentes des angles $\alpha = \left(\vec{U}, \vec{S}\right)$ et $\beta = \left(\vec{i}, \vec{S'}\right)$ où $\vec{S'}$ désigne un vecteur de la tange nte à la parabole en I'.

- En déduire que les deux angles α et β sont égaux..
- Soit à présent J un autre point du segment [OA] de telle sorte que la longueur IJ soit « petite », M' et J' les points correspondants de la spirale et de la parabole; Est-il légitime de confondre le segment de spirale [MM'] avec le segment de la tangente [MM ''] ? De même est-il légitime de confondre le segment de parabole [I'J'] avec le segment de la tangente [I 'J''] ? Pourquoi peut-on écrire MM'=I'J' ? Conclusion?

figure 3



<u>Commentaire:</u> ce résultat est certes décevant en ce sens qu'il ne permet pas de calculer explicitement la longueur de l'arc de spirale (ou de l'arc de parabole). Pourtant l'application de cette méthode à d'autres courbes permettra aux mathématiques de faire de nouveaux progrès. ([1])

([1]) Pour le calcul d'une valeur approchée de la longueur d'un arc de spirale, on peut, par exemple, se reporter au & "tangente à une courbe".

Aire d'un segment de spirale

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant énoncé par Archimède dans le *Traité de la spirale*:

« *Je* [Archimède] *dis[...] que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite.* »

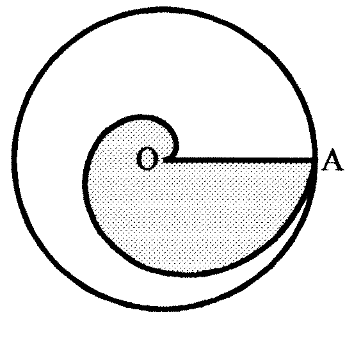


figure 4

Il s'agit donc de démontrer que l'aire hachurée sur la figure 4 est égale au tiers de l'aire du cercle de centre O et de rayon OA..

Méthode 1

Pour démontrer ce théorème, Archimède partage le cercle en un certain nombre de secteurs angulaires. Il encadre alors l'aire $\mathcal{A}$ à calculer par deux aires Σ_1 et Σ_2 dont la différence est aussi petite que l'on voudra. Puis par un double raisonnement par l'absurde, il en déduit le résultat.

Les questions ci-dessous traduisent la méthode d'Archimède en utilisant les notations contemporaines et la notion de limite.

Soit p un nombre entier quelconque, on partage le plan en p secteurs angulaires: w_0Ow_1, w_1Ow_2,..., $w_{p-2}Ow_{p-1}$, $w_{p-1}Ow_p$ (sur la figure 6, on a pris p=9).

Si $0 \leq n \leq p$ la demi-droite $[Ow_n$,, coupe la spirale en M_n. (pour les notations, cf. figure 6)

L'aire $\mathcal{A}$ à calculer est alors égale à la somme des aires des segments de spirale $(OM_nM_{n+1})=\mathcal{A}_n$:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{n=p-1} \mathcal{A}_n \ .$$

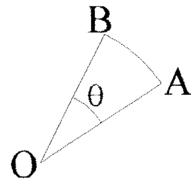


figure 5

1. (cf. figure 5) Exprimer en fonction de l'angle θ et du rayon r= OA=OB l'aire du secteur angulaire (OAB)
2. Exprimer en fonction de p et de n les angles orientés $\left([Ow_n,[Ow_{n+1}\right)$ et $\left([Ox,[Ow_n\right)$.

   En déduire la longueur OM_n et l'aire des secteurs $\left(OM_nR_{n+1}\right)$ et $\left(OP_nM_{n+1}\right)$.
3. Trouver un encadrement de $\mathcal{A}_n$ et en déduire:

$$C\sum_{n=0}^{n=p-1}\frac{n^2}{p^3} \leq \mathcal{A} \leq C\sum_{n=0}^{n=p-1}\frac{(n+1)^2}{p^3}$$

où C désigne l'aire du cercle de cente O et de rayon OA.

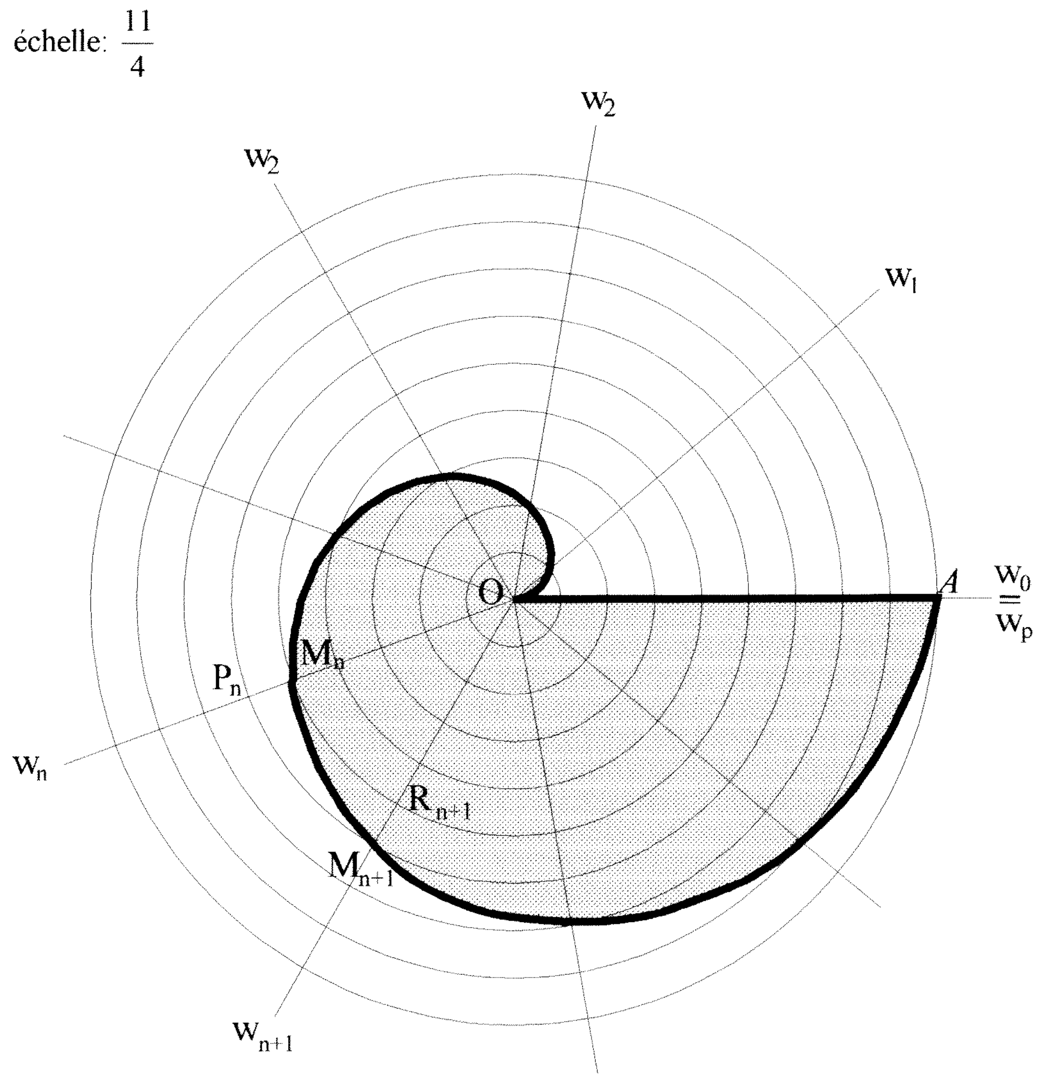
4. Démontrer que $\sum_{n=0}^{n=p-1} n^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$.

   En déduire l'encadrement suivant de $\mathcal{A}$:

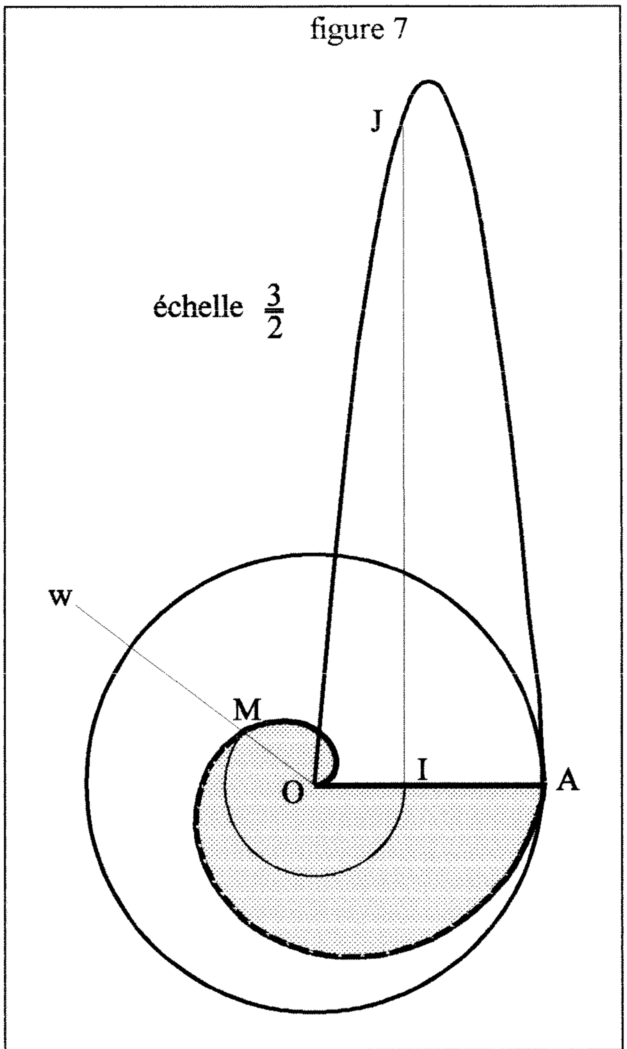
$$C\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p^2}\right) \leq \mathcal{A} \leq C\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p^2}\right).$$

5. Que se passe-t-il lorsque p tend vers « plus l'infini » ?
6. En déduire le résultat annoncé par Archimède.

figure 6



Méthode 2



Cette méthode s'inspire de «la méthode des indivisibles » élaborée au XVII ième siècle par les mathématiciens italiens Cavalieri et Torricelli.

Soit I un point du segment [OA]; on trace l'arc de cercle de centre O et de rayon OI qui rencontre la spirale en M. On pose x l'abscisse de I (cf.figure 7).

1. Exprimer x en fonction de t.
2. Calculer en fonction de t puis de x la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$.
3. Soit à présent J tel que la droite (IJ) soit perpendiculaire à la droite (OA) et $IJ=\overset{\frown}{IM}$; Montrer que le point J décrit un segment de parabole dont on donnera une équation.
4. Pourquoi l'aire du segment de spirale hachuré sur la figure 7 est-elle égale à l'aire du segment de parabole (OJAO)?
5. Calculer l'aire du segment de parabole (OJAO) et en déduire le résultat énoncé par Archimède.

Et si on utilisait les nombres complexes?

1. Quelle est, en fonction de t, l'affixe z(t) de M dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de [Ox ?
2. Calculer z'(t) et montrer que $z'(t)=\dfrac{dz}{dt}=2e^{i2\pi t}+i4\pi te^{i2\pi t}$.

   Construire les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{S}$ d'affixe respectivement $2e^{i2\pi t}$, $i4\pi te^{i2\pi t}=4\pi te^{i(2\pi t+\pi/2)}$ et $z'(t)=\dfrac{dz}{dt}=2e^{i2\pi t}+i4\pi te^{i2\pi t}$ en un point quelconque de la courbe. (Rappel: quel que soit le nombre α, on a: $\left|\rho e^{i\alpha}\right|=\rho$).

   Calculer le module de z'(t).
3. Que représente chacun de ces trois vecteurs et $|z'(t)|$?

Bibliographie

1. Blaise PASCAL: oeuvres complètes.

2. Evelyne BARBIN: Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens dans les " Actes du colloque Inter–IREM Strasbourg 22/23 mai 1987 "

3. ROBERVAL: Traité des indivisibles –1693–

4. Histoires de problèmes – Histoires des Mathématiques – IREM – Edition Ellipses 1993.

5. Fragments d'Histoire des Mathématiques Brochure A.P.M.E.P. N°65.

6. Supplément au PETIT ARCHIMEDE N°64–65 – Numéro spécial p – mai 1980

7. ARCHIMEDE: Des spirales (Texte traduit par Charles MUGLER, édition: "Les Belles Lettres" – tome II –)

8. Th. CLAUSEN: Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist (Journal de Crelle – tome XXI pages 375–376)

TITRE :	ACTIVITES GEOMETRIQUES POUR LE COLLEGE ET LE LYCEE, PRESENTEES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE. Volume II
AUTEURS :	Groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Strasbourg : Michel CINUS - Paul-Henri CLAVIER - Agnès CUZIN - Jean-Pierre FRIEDELMEYER - Marcel KRIER - Michel SARROUY - André STOLL - Klaus VOLKERT
DATE :	Mars 1996
EDITEUR :	IREM de Strasbourg (S. 166)
MOTS-CLES :	Lunule - quadrature - rectification - Pi - indivisible - tangente - quadratrice - spirale - cycloïde - conique - Hippocrate de Chio - Archimède - Torricelli - Roberval - Pascal - Hippias - Huygens
RESUME :	Quarrer des lunules, étudier la cycloïde et la spirale, trouver la tangente à une courbe grâce aux mouvements sont quelques-uns des thèmes abordés dans ce volume II, qui s'adresse essentiellement aux professeurs de lycée et à leurs élèves.
NOMBRE DE PAGES :	63
ISBN :	2-911446-02-X