I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88 41 64 40
Fax : 88 41 64 49

ACTIVITES GEOMETRIQUES

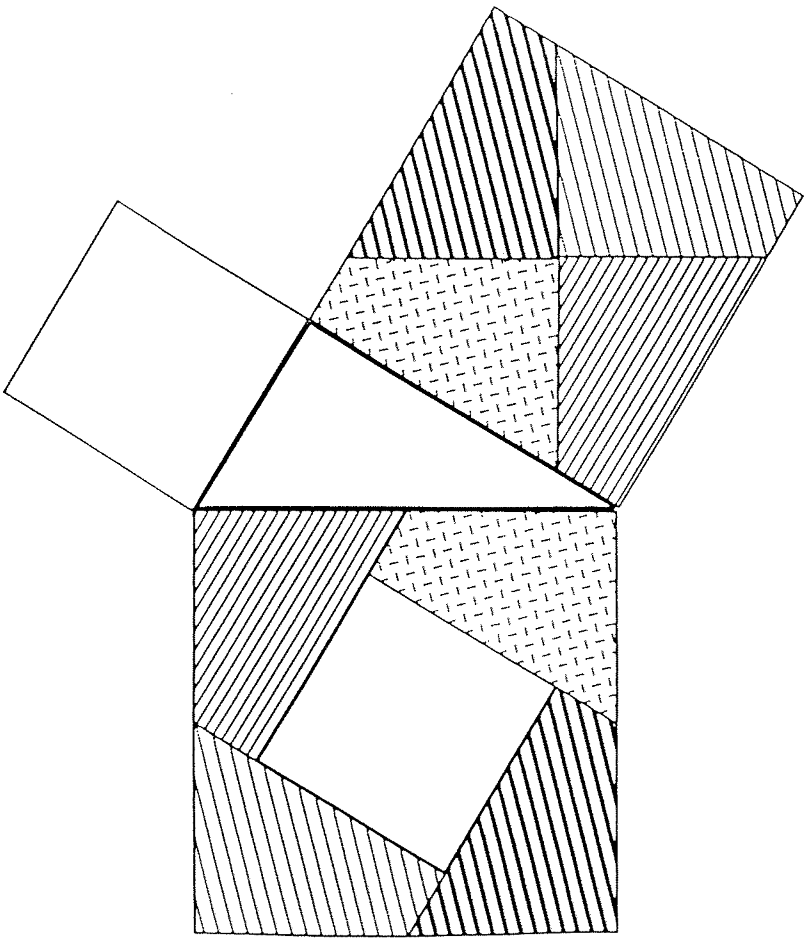
POUR LE COLLEGE ET LE LYCEE

PRESENTEES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

(Volume I)

PAR LE GROUPE D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES
DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG :

M. CINUS - P.H. CLAVIER - A. CUZIN - J.P. FRIEDELMEYER
M. KRIER - M. SARROUY - A. STOLL - K. VOLKERT



1996

Table des Matières
(Volume I)

Table des Matières
(Volume II)

AVERTISSEMENT

Le titre de cette brochure "Activités géométriques" mérite quelques explications sur l'utilisation du mot **géométrique**. Car, si elle contient certes de nombreuses activités géométriques, elle renvoie aussi a diverses questions classées aujourd'hui plutôt dans la rubrique "Analyse" par la référence à la notion d'irrationalité, d'indivisible, de tangente, d'étude de courbes, de calcul d'aires et de volumes. De fait, le dénominateur commun de tous les articles rassemblés ici est le problème de la mesure des grandeurs. Le terme **géométrie** est donc à entendre dans son sens historique originel, tel qu'il est expliqué par exemple dans la grande Encyclopédie de Diderot :

*"**La Géométrie** est la science des propriétés de l'étendue, en tant qu'on la considère comme simplement étendue et figurée. Ce mot est formé de deux mots grecs, γε ou γαια, terre, et μετρια, mesure ; et cette étymologie semble nous indiquer ce qui a donné naissance à la géométrie : imparfaite et obscure dans son origine comme toutes les autres sciences, elle a commencé par une espèce de tâtonnement, par des mesures et des opérations grossières, et s'est élevée peu à peu, à ce degré d'exactitude et de sublimité où nous la voyons."*

*"**Objet de la géométrie :** Nous commençons par considérer les corps avec toutes leurs propriétés sensibles ; nous faisons ensuite peu à peu et par l'esprit, la séparation, l'abstraction de ces différentes propriétés ; et nous en venons à considérer les corps comme des portions d'étendues pénétrables, divisibles et figurées. Ainsi, le corps géométrique n'est proprement qu'une portion d'étendue terminée en tous sens. Nous considérons d'abord et comme d'une vue générale, cette portion d'étendue quant à ses trois dimensions ; mais ensuite, pour en déterminer plus facilement les propriétés, nous y considérons d'abord une seule dimension, c'est à dire, la longueur, puis deux dimensions, c'est à dire la surface , enfin les trois dimensions ensemble, c'est à dire la solidité ; Ainsi, les propriétés des lignes, celles des surfaces et celles des solides, font l'objet et la division naturelle de la **géométrie**."*

*" **Division de la géométrie** : on peut diviser la géométrie de différentes manières.*

*En élémentaire et en transcendante. La **géométrie** élémentaire ne considère que les proporiétés des lignes droites, des lignes circulaires, des figures et des solides les plus simples, c'est à dire, des figures rectilignes et circulaires, et des solides terminés par ces figures (...)*

*La **géométrie** transcendante est proprement celle qui a pour objet toutes les courbes différentes du cercle, comme les sections coniques et les courbes d'un genre plus élevé."*

Ces activités seront réparties en deux volumes :

Le premier, centré sur la notion de mesure, développe le thème des grandeurs incommensurables pour donner un sens à la notion de nombre irrationnel. Il montre aussi comment démontrer en géométrie, autrement qu'en faisant des calculs.

Le second aborde les questions de tangente, de calculs d'aires et volumes sans recours au calcul infinitésimal, mais pour dégager les véritables problématiques originelles, préparer les élèves aux mécanismes du calcul différentiel et intégral et éviter que celui-ci ne se limite à un simple outil formel sans lien avec la réalité.

Ces deux volumes sont destinés au professeur de mathématiques et nous souhaitons qu'il y trouve à la fois une réflexion sur les fondements de son enseignement et des idées d'activités nouvelles. Ils peuvent aussi servir de support à un travail interdisciplinaire par exemple avec le professeur de philosophie sur des questions épistémologiques comme la mesure, la notion d'unité, ou "les chiffres et les lettres" qui font l'objet de courts articles.

Pour le Groupe d'Histoire des Mathématiques

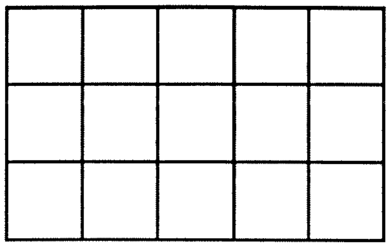
Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Introduction

A partir de quand un élève fait-il et a-t-il conscience de faire des Mathématiques ? Où se situe la frontière entre, d'une part l'observation et le fait constaté et d'autre part le raisonnement et le fait démontré ? Beaucoup de nos jeunes élèves ont des difficultés à comprendre la nécessité de démontrer des propriétés qui leur paraissent évidentes, et à franchir le pas décisif entre l'observation et la démonstration. En géométrie ils sont soulagés lorsqu'ils disposent des outils analytiques qui leur permettent de remplacer le raisonnement géométrique par un calcul. Le caractère automatique et précis du calcul les sécurise, là où le raisonnement de géométrie pure les oblige à une initiative et à une recherche dont ils se sentent la plupart du temps incapables. L'apprentissage de la rigueur pourrait se faire en analyse, mais le caractère abstrait et formel des définitions qui l'accompagne nécessairement, a conduit à renoncer à cet apprentissage au lycée. L'enseignement de l'analyse y dépasse rarement le stade d'un bon usage de l'outil informatique. Comme le remarque G. Kuntz, :*"il suffit d'observer une classe de terminale technologique pour se persuader que le travail sur machine a remplacé en grande partie le raisonnement mathématique. Ces élèves accordent à l'outil informatique une confiance totale confortée par l'expérience : la calculatrice utilisée habilement leur permet de résoudre au moins 80% d'un problème d'analyse proposé au baccalauréat"(* Repères I.R.E.M. n° 11, avril 1993). Faut-il s'étonner alors de ce que beaucoup d'élèves quittent le lycée avec un baccalauréat scientifique en poche, sans pourtant savoir organiser et rédiger un raisonnement correct , particulièrement en analyse, au grand désespoir des professeurs d'université ou de classe préparatoire ?

Historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la mesure des grandeurs. La notion d'irrationnalité, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesures de longueurs, d'aires, de volumes. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent très largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le fait constaté et le fait démontré : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de la situation et à résoudre le problème, l'oblige à dépasser le stade empirique pour accéder au stade théorique de la démonstration mathématique.

Prenons l'exemple de l'aire du rectangle. Tout élève sortant de l'école primaire connaît la formule : longueur x largeur pour nommer une telle aire. Et peut-être saura-t-il aussi la justifier par un exemple. Si la longueur mesure 5 cm et la largeur 3 cm, le rectangle est constitué de 5 x 3 carrés unités de côté un cm. Et donc le rectangle mesure 15 cm^2.



La justification est déjà moins immédiate lorsque les dimensions du rectangle ABCD s'expriment par des fractions de l'unité de longueur , par exemple $L = \frac{1}{3}$ et $l = \frac{1}{5}$.

Dans ce cas, on décomposera le carré unité **U** selon la figure 2 en mettant en évidence que le rectangle ABCD mesure $\frac{1}{15}$ de l'aire du carré unité.

De même, lorsque plus généralement $L = \frac{m}{n}$ et $l = \frac{r}{s}$, m, n, r, s, entiers strictement positifs quelconques, le rectangle ABCD (figure 3) mesure m x r parties du carré unité **U**, chaque partie valant un (n x s)-ième de ce carré unité (figure 3 avec L = 8/5 et l = 4/3)

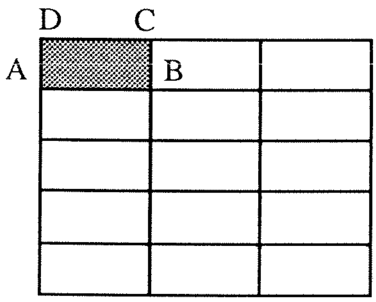


figure 2

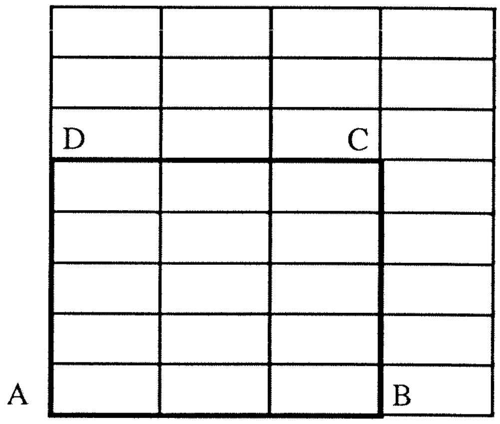
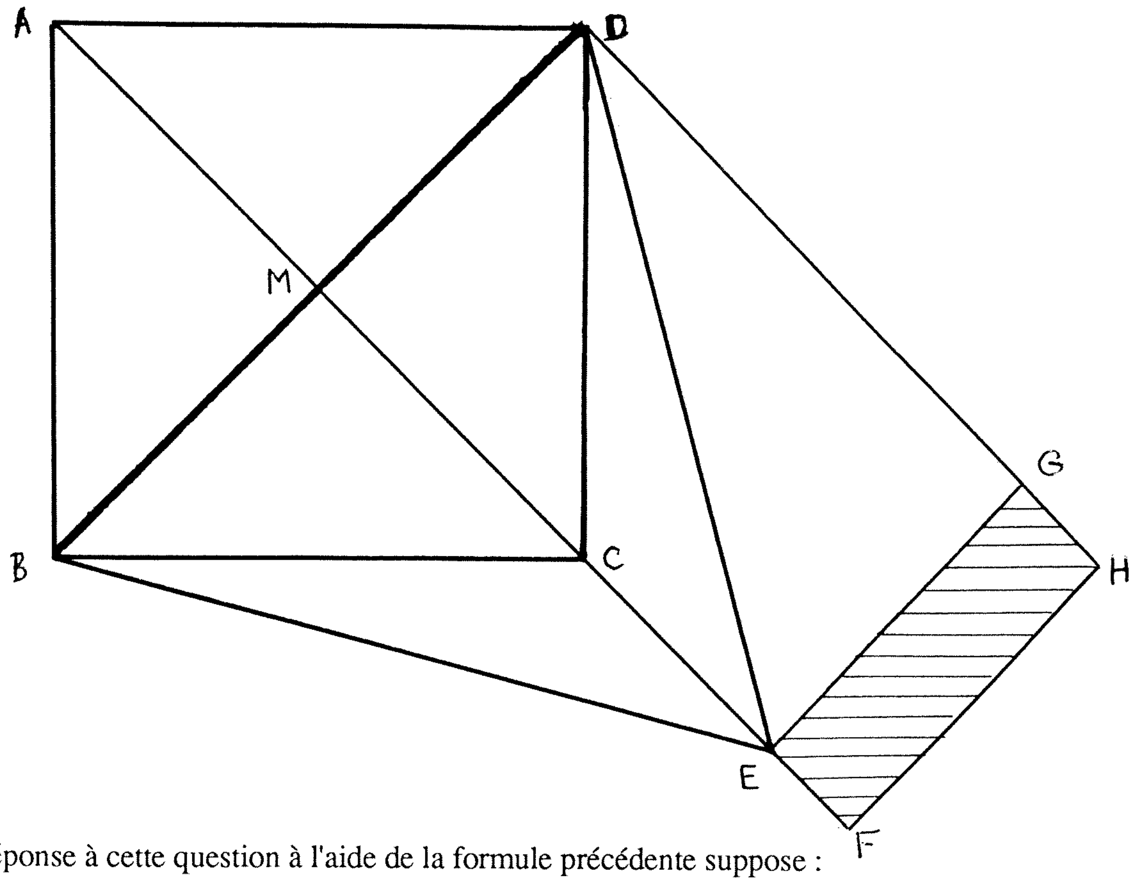


figure 3

Mais, que devient cette formule lorsque les côtés sont irrationnels ? Considérons le problème suivant. Soit ABCD un carré et BDE le triangle équilatéral construit sur la diagonale BD, lequel des deux a la plus grande aire ?



Une réponse à cette question à l'aide de la formule précédente suppose :

1) de savoir exprimer par des symboles algébriques comme $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, les longueurs de certains côtés ;

2) que l'on a démontré que la formule reste valable, même s'il n'est plus possible d'expliciter les fractions du carré unité justifiant la formule dans le cas rationnel. Ce qui est totalement inaccessible à un élève de collège.

Est-ce à dire qu'il faudra renoncer, à ce niveau là, à aborder ce type de question pourtant très élémentaire ? Il suffit en effet de remarquer que l'aire du carré ABCD est égale à l'aire du rectangle MFHD obtenu en construisant sur la demi-diagonale MD le rectangle de longueur MF = 2 MD, et que l'aire du triangle BDE est égale à celle du rectangle MEGD. Or, DE = MF plus grand que ME, et donc, l'aire du carré est supérieure à celle du triangle, et l'élève peut même avoir une estimation de la différence à partir de l'aire du rectangle EFHG. C'est élémentaire mais cela suppose une réflexion et un raisonnement , contrairement à ce qui est engagé par la simple application d'une formule. Mais, n'est-ce pas cela que nous souhaitons enseigner à nos élèves ?

Le groupe d'histoire des mathématiques vous propose dans cette brochure diverses activités susceptibles de préparer à un tel enseignement, en revenant aux sources même de l'histoire de la géométrie.

Une première partie traite des grandeurs incommensurables pour donner une compréhension plus en profondeur de ce qu'est un nombre irrationnel. Une seconde partie présentera un ensemble d'activités autour du thème : les aires, outil heuristique, outil démonstratif. Enfin, divers exemples historiques permettront de donner du sens aux méthodes du calcul différentiel et intégral qui ne soient pas là aussi, une simple application de formules dont on ignore et l'origine et la raison d'être.

PREMIERE PARTIE : COMPARER - MESURER

Par Agnès CUZIN

COMPARAISON N'EST PAS RAISON

Le bon sens veut que l'on peut toujours mesurer un segment. Ainsi, un vieux cours d'arithmétique(1) écrit : *"Deux segments de droite exactement superposables sont égaux. Ils ont même longueur. On peut* **mesurer** *cette longueur".* Mais que signifie **mesurer** ? D'après le dictionnaire de Stella Baruk (2), mesurer c'est *"évaluer une grandeur par comparaison avec une unité"* (Sur la notion d'unité, voir article de M. Çinus). Le problème de la mesure des grandeurs se ramène donc à un problème de comparaison. Étant donné un segment *[AB]* et un segment *[OI]* pris comme unité, on comptera "combien de fois" on peut reporter le segment *[OI]* sur le segment *[AB]*, à partir de l'une de ses extrémités, par exemple *A*. Dans la pratique, avec une règle, on est dispensé de compter, car le segment *[OI]* est répété une fois pour toutes un certain nombre de fois, et il suffit de lire le nombre qui mesure le segment *[AB]* en face du point *B* (fig. 1).

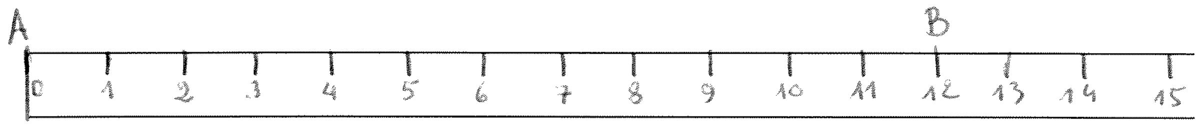


Figure 1

"Si l'on a de la chance", on trouvera un nombre juste en face de *B*, par exemple 12. On dira que *[AB]* est égal à douze fois *[OI]* ou que *[AB]* mesure 12 cm si l'unité *[OI]* mesure 1 cm. Mais en général, "on n'a pas de chance", le point *B* ne coïncide exactement avec aucune des graduations de la règle. Une solution consiste alors à subdiviser l'unité *[OI]* selon une sous-unité, le millimètre, le micron, etc... jusqu'à ce qu'enfin, le point *B* coïncide avec une de ces nouvelles graduations, ce qui ne peut manquer d'arriver tôt ou tard, compte tenu des limites de nos instruments de mesure, aussi perfectionnés soient-ils. Les Grecs eux, avaient imaginé une autre solution, qui permet de comparer deux segments, indépendamment d'une unité choisie **a priori** : ils l'appelaient anthyphaïrèse, que l'on peut traduire par soustraction réciproque. Cette soustraction réciproque qui n'est en fait rien d'autre que l'algorithme d'Euclide appliqué à des segments enclanche un processus qui dépasse d'emblée la simple observation pour mettre en route une opération mentale. Donc nous quittons le domaine de l'observation et du phénomène pour réaliser deux choses qui sont de l'ordre de la pensée : un calcul, indiqué par le mot soustraction et une itération qui est déjà raisonnement (si ... alors, ... donc ; mais alors ...).
Et nous voici au début des mathématiques.

(1) Cours d'arithmétique de Ch. Pugibet : Cours moyen 1ère et 2ème année, 1953, Armand Colin.
(2) Stella Baruk : Dictionnaire de mathématiques élémentaires, éd.du Seuil, 1992.

COMPARER - MESURER

1) Exemple

2) Algorithme de la soustraction réciproque

3) Comparaison de la diagonale du carré à son côté

4) L'algorithme d'Euclide : Axiomatique

5) Application : Démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté

6) Le rapport de la diagonale au côté peut être approché par des rapports d'entiers

7) Exercices : application de l'axiomatique d'Euclide à quelques exemples

Exercice 1 : Comment approcher le rapport de grands nombres par le rapport de nombres plus petits.

Exercice 2 : Le nombre d'or.

Exercice 3 : Le pentagone régulier.

Exercice 4 : Le côté d'un triangle équilatéral et le rayon du cercle circonscrit sont incommensurables.

Exercice 5 : le problème du calendrier.

Annexes

- Livre X des éléments :
  . définition 1 à 11
  . propositions 1 à 3
- Note 1 : "Tout est Nombre"
- Note 2 : "La crise des irrationnels"

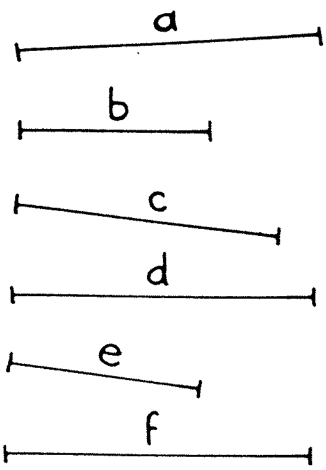
Références Bibliographiques

1) EXEMPLE

Voici un extrait d'un manuel destiné aux élèves du cours moyen 1ère année *

15. Mesure des longueurs (1)

LEÇON • LEÇON • LEÇON • LEÇON • LEÇON • LEÇON



1. Classement de segments d'après leur longueur.

Segments aussi longs que a	a, d, f
Segments aussi longs que b	b, e
Segments aussi longs que c	c

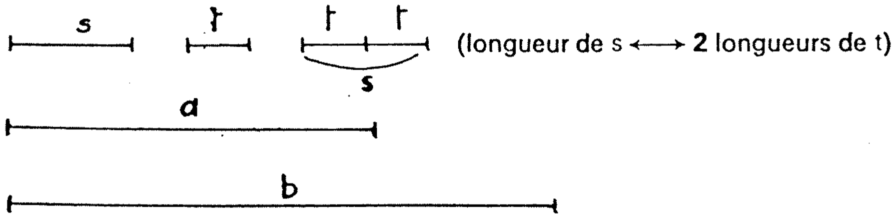
2. Rangement

b est plus petit que c
c est plus petit que a

On peut ranger les trois segments dans l'ordre de grandeur croissante.

b, c, a

EXERCICES • EXERCICES • EXERCICES • EXERCICES

1 

Le segment s étant choisi comme unité, complète :

Longueur de a = •

• < longueur de b < •

Le segment t étant maintenant choisi comme unité, complète :

Longueur de a = •

Longueur de b = •

L'élève doit comparer les longueurs de deux segments. Dans les exercices, il affinera la comparaison en utilisant une unité (mot imprimé dans une couleur différente).

A l'instar de l'élève et tout aussi intuitivement que lui, comparons les segments [AB] et [CD].

[AB] est plus long que [CD] .

Il est ensuite nécessaire d'affiner ce résultat .
Un peu plus long ? Beaucoup plus long ? "Combien" plus long ?

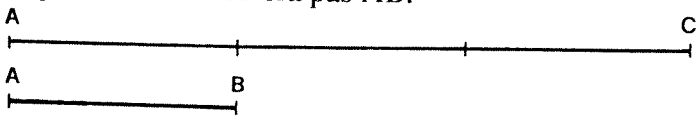
* "activités mathématiques au cours moyen 1ère année" par P. Heffe, R. Lédé, B. Constans publié chez Nathan en 1977

2) L'ALGORITHME DE LA SOUSTRACTION RECIPROQUE

Rappel du problème : Etant donnés deux segments, [AB] et [AC], trouver leur plus grande commune mesure.

Supposons que [AB] soit le plus petit des deux segments.
(Par la suite, AB et AC désignerons les longueurs respectives des segments [AB] et [AC].)

• **Si AB mesure AC**, c'est-à-dire si AB est contenu un nombre entier de fois dans AC, comme AB se mesure lui-même, AB est une mesure commune à AB et AC.
AB est d'ailleurs la plus grande commune mesure à AB et AC car une mesure plus grande que AB ne mesurera pas AB.



• **Si AB ne mesure pas AC**, c'est-à-dire si AB n'est pas contenu un nombre entier de fois dans AC, reproduisons autant de fois qu'il le faudra l'algorithme suivant :

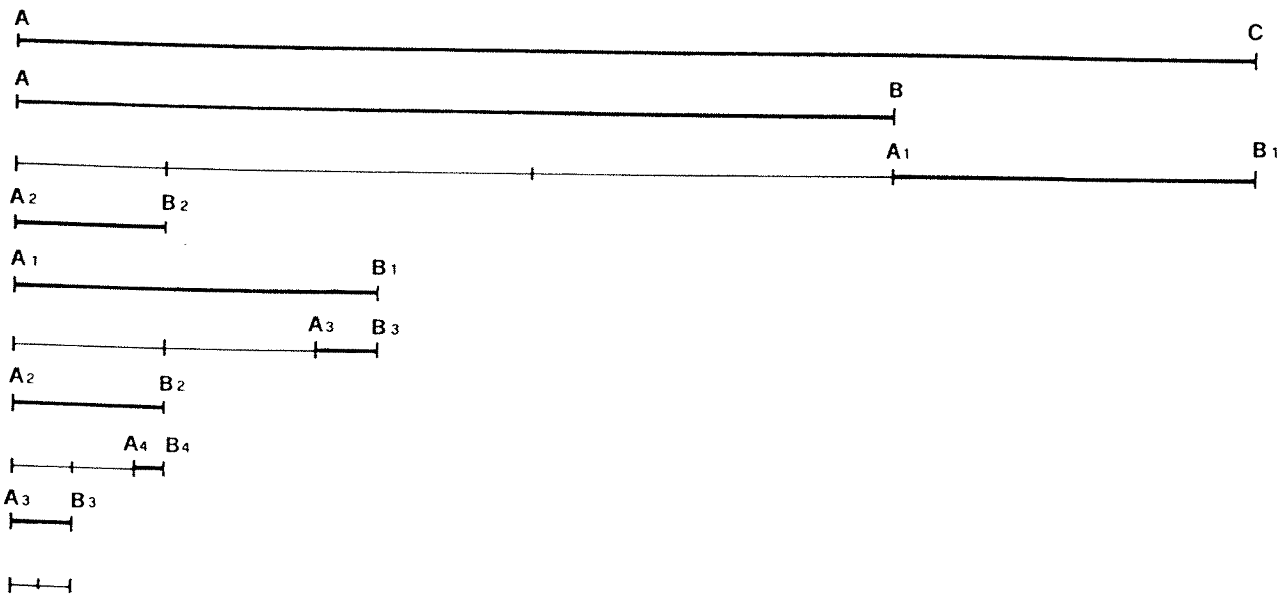
Etape 1: . En appelant ,"l " la plus petite des deux grandeurs,
"L" la plus grande,
. Retranchons la plus petite, l, de la plus grande, L,
. Considérons alors les grandeurs L-l et l.

Etape i : . En appelant ,"l_i " la plus petite des deux grandeurs,
"L_i" la plus grande,
. Retranchons la plus petite, l_i, de la plus grande, L_i ,
. Considérons alors les grandeurs L_i-l_i et l_i

Et ainsi de suite.

L'algorithme décrit ci-dessus est l'algorithme de soustraction réciproque, encore appelé antipharèse (ou antiphaïrèse, ou antiphérèse).

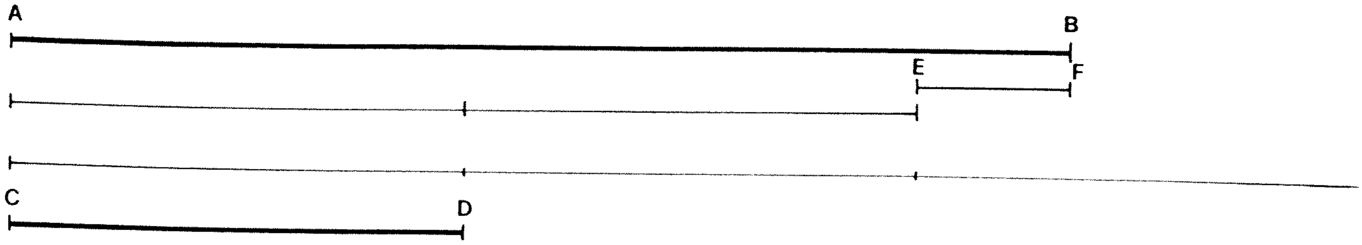
Appliquons le à AB et AC.



Choisissant le plus petit des deux segments comme référence, nous dirons :

$$2CD < AB < 3CD\ ,$$

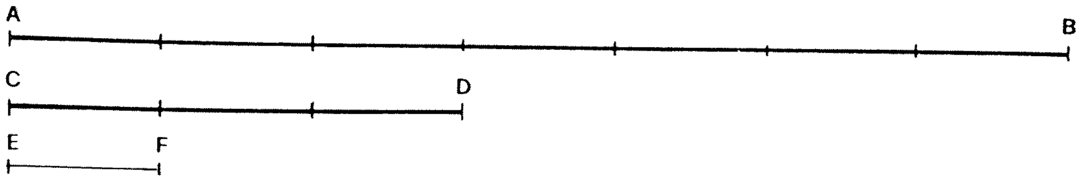
parce que nous savons reconnaître un segment de même longueur que [CD], par exemple en les superposant, ainsi que des segments de longueur 2CD ou 3CD.



Ainsi AB est égal à 2CD plus un reste, noté EF :

$$AB = 2CD + EF \quad \text{et} \quad EF < CD.$$

Comparons ce reste, EF, à CD. On constate que EF est contenu trois fois dans CD.

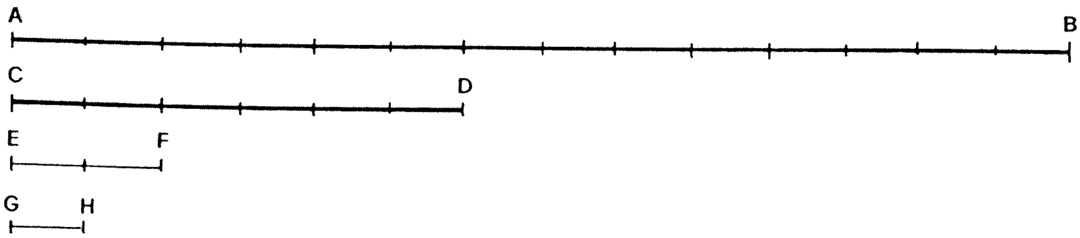


Au lieu de comparer directement AB à CD, nous pouvons passer par un intermédiaire, EF :

$$AB = 7\ EF \quad \text{et} \quad CD = 3\ EF$$

Nous avons trouvé une mesure, EF, commune à AB et CD, qui permet la comparaison précise de AB et CD.

Remarque : GH, la moitié de EF est aussi une mesure commune à AB et CD, car, $AB = 14\ GH$
$CD = 6\ GH$



Mais nous préfèrerons la mesure EF à la mesure GH.

De la même façon qu'un commerçant préfèrera recevoir, pour la vente d'un article à 48,25 F,

2 billets de 20 F
1 pièce de 5 F
1 pièce de 2 F
1 pièce de 1 F
1 pièce de 20 centimes
1 pièce de 5 centimes

plutôt que 965 pièces de 5 centimes

Quelle(s) méthode(s) mettre en oeuvre pour trouver une mesure commune à deux segments quelconques, et si possible pour trouver la plus grande commune mesure?

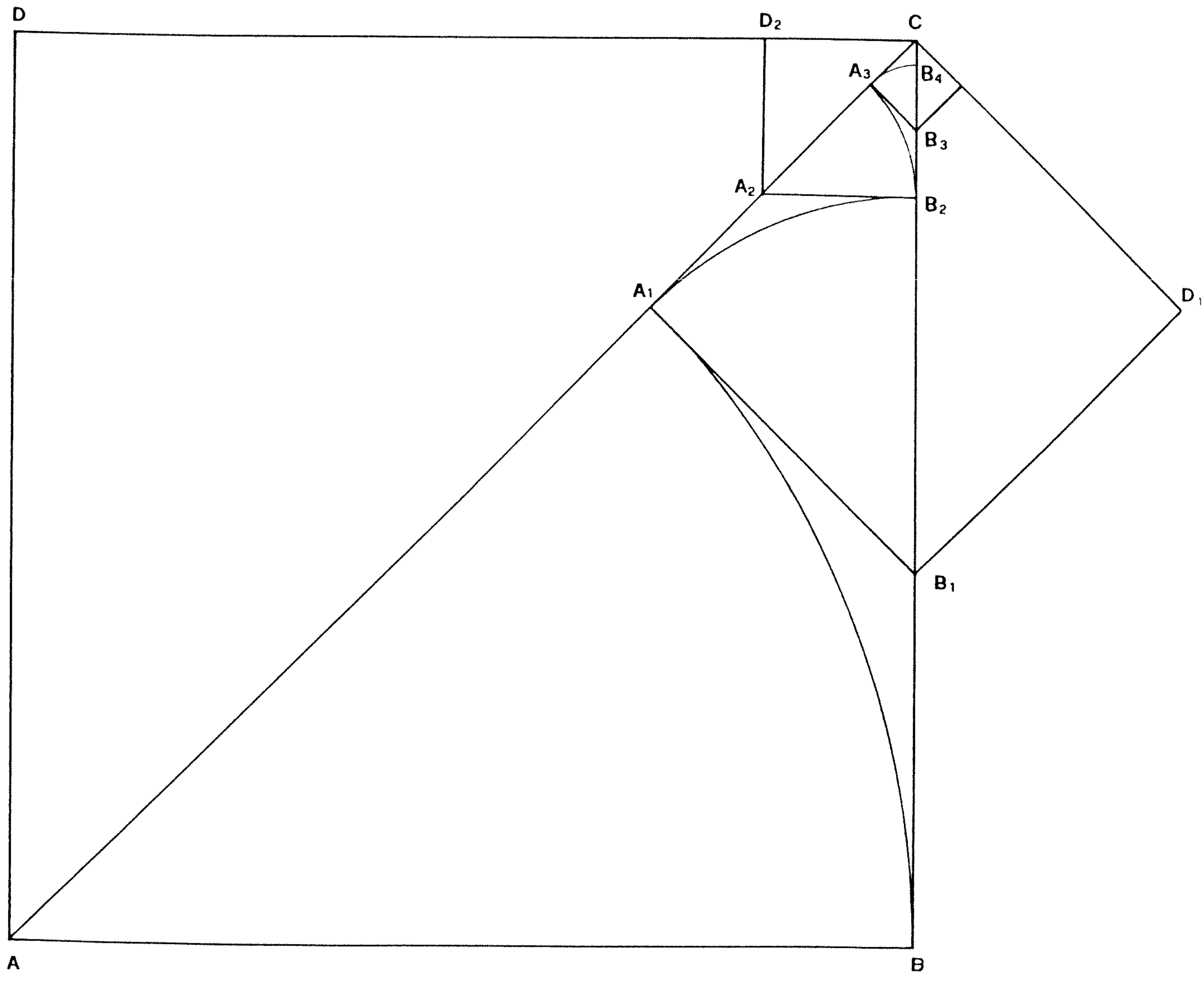
3) COMPARAISON DE LA DIAGONALE DU CARRE A SON COTE

Dans le carré ABCD, comparons la diagonale AC au côté AB.
Pour cela, procédons par soustraction réciproque.

• **Faisons apparaître ce qui reste de la diagonale AC lorsqu'on lui "soustrait" le côté AB**

soit : $d = AC$, $a = AB$

Fig 1



Sur la diagonale [AC], plaçons le point A_1, tel que, $AA_1 = AB$

(1) $AC = AA_1 + A_1C$

De AC on peut donc soustraire AB et il reste A_1C.

$$
\begin{array}{llll}
AC & = AB + A_1B_1 & \text{et} & A_1B_1 < AB \\
AB & = 2A_1B_1 + A_2B_2 & \text{et} & A_2B_2 < A_1B_1 \\
A_1B_1 & = 2A_2B_2 + A_3B_3 & \text{et} & A_3B_3 < A_2B_2 \\
A_2B_2 & = 2A_3B_3 + A_4B_4 & \text{et} & A_4B_4 < A_3B_3 \\
A_3B_3 & = 2A_4B_4 & &
\end{array}
$$

Dans cet exemple, l'algorithme prend fin à cette étape, car A_4B_4 mesure A_3B_3.

A_4B_4 mesure donc chacune des grandeurs AB et AC.

En effet :

$$
\begin{array}{llll}
A_2B_2 & = 2(\ 2A_4B_4) + & A_4B_4 & = 5\,A_4B_4 \\
A_1B_1 & = 2(\ 5A_4B_4) + & 2\,A_4B_4 & = 12\,A_4B_4 \\
AB & = 2\,(12A_4B_4) + & 5\,A_4B_4 & = 29\,A_4B_4 \\
AC & = \ \ 29\,A_4B_4 + & 12\,A_4B_4 & = 41\,A_4B_4
\end{array}
$$

AB et AC ont une mesure commune : $A_4\,B_4$.

Nous dirons, comme les grecs, que **AB et AC sont commensurables.**

Ce que nous notons de nos jours, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{29}{41}$, les grecs le traduisaient par:

"AB est à AC comme 29 est à 41".

On passe d'une situation empirique de comparaison de grandeurs, à une situation plus théorique de comparaison de rapports.
Ainsi, dans le cas de grandeurs commensurables, les grandeurs peuvent "s'effacer" devant les nombres et justifier ainsi la devise des pythagoriciens : **" Tout est nombre".** *

---

* voir en annexe , la note : "Tout est nombre"

• Il nous faut désormais comparer AB et A_1C, c'est-à-dire BC et A_1C.

La perpendiculaire à [AC] en A_1 coupe [BC] en B_1.

. (B_1A_1) et (B_1B) sont donc tangentes respectivement en A_1 et B, au cercle de centre A et de rayon $AB = a$ et $B_1A_1 = B_1B$.

. Le triangle A_1B_1C est rectangle isocèle en A_1 car l'angle B_1A_1C est droit et l'angle A_1CB mesure 45°; donc $B_1A_1 = CA_1$

Considérons le carré $A_1B_1D_1C$, notons a_1 son côté, B_1C est sa diagonale.

$$\mathbf{a_1 = B_1B = B_1A_1 = A_1C \quad \text{et} \quad a_1 < a}$$

• Faisons apparaître ce qui reste de BC lorsqu'on lui "soustrait" a_1, c'est-à-dire A_1B_1

Pour cela, réitérons la construction précédente dans le carré $A_1B_1D_1C$

. $B_1A_1 = B_1B_2$, et l'angle $A_2B_2B_1$ est droit,

. A_2B_2C est droit, le triangle A_2B_2C est rectangle isocèle et $A_2B_2CD_2$ est un carré, de côté $a_2 = A_2B_2$ et de diagonale A_2C.

$$\mathbf{a_2 = A_2A_1 = A_2B_2 = B_2C \quad \text{et} \quad a_2 < a_1}$$

(2) $\mathbf{BC = 2BB_1 + B_2C}$.

De BC on peut donc soustraire deux fois A_1B_1 et il reste B_2C.

• Il nous faut maintenant comparer B_2C et A_1C

Pour cela, réitérons la construction dans le carré $A_2B_2CD_2$, etc ...

Résumé

Soient : $a_0 = a$; $a_1 = BB_1 = A_1B_1 = A_1C$ et pour $n \geq 2$ $a_n = A_nA_{n-1} = A_nB_n$

(1)	$AC = AA_1 + A_1C$	soit	$\mathbf{d = a_0 + a_1}$	et	$\mathbf{a_1 < a_0}$
(2)	$BC = 2\,BB_1 + B_2C$	soit	$\mathbf{a_0 = 2a_1 + a_2}$	et	$\mathbf{a_2 < a_1}$
(3)	$A_1C = 2A_1A_2 + A_3C$	soit	$\mathbf{a_1 = 2a_2 + a_3}$	et	$\mathbf{a_3 < a_2}$
(4)	$B_2C = 2B_2B_3 + B_4C$	soit	$\mathbf{a_2 = 2a_3 + a_4}$	et	$\mathbf{a_4 < a_3}$
......					
(n+2)		soit	$\mathbf{a_n = 2a_{n+1} + a_{n+2}}$	et	$\mathbf{a_{n+2} < a_{n+1}}$

Nous avons appliqué n+2 fois l'algorithme de soustraction réciproque.
Quand s'arrête-t-il ?

Il semble bien que dans cet exemple, l'algorithme ne s'arrête pas .

En effet,
- Comparer la diagonale [AC] au côté [AB] dans le carré ABCD, nous amène à
- Comparer la diagonale [A_2C] au côté [A_2B_2] dans le nouveau carré $A_2B_2CD_2$.
- Etc...

La réponse ne cesse de nous échapper, reculant, du carré initial, à des carrés de plus en plus petits *

Il nous faut donc reprendre la question déjà posée :

Quelle(s) méthode(s) mettre en oeuvre pour trouver une mesure commune à deux segments quelconques ?

Et la compléter par cette nouvelle question :

Le problème a-t-il toujours une solution ?

Pour y répondre de façon satisfaisante, il est nécessaire de mettre au point une <u>axiomatique</u> qui permette :

- d'aboutir, lorsque le problème a une solution,

- de démontrer l'impossibilité d'une solution, dans le cas contraire.

* voir en annexe la note : "La crise des irrationnels"

4) L'ALGORITHME D'EUCLIDE : AXIOMATIQUE

Refèrerons-nous au livre X des Eléments d'Euclide * dont nous retiendrons :

a) Les deux premières définitions:

- **grandeurs commensurables : qui sont mesurées par la même mesure - (D1)**
- **grandeurs incommensurables: celles qui n'en ont aucune - (D2)**

b) Les trois premières propositions du livre X;

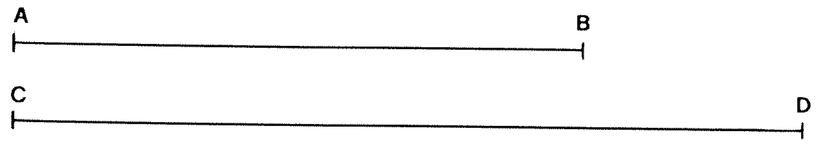
- **C'est la proposition 3 du livre X qui permet, lorsque le problème a une solution de trouver la plus grande mesure commune à deux grandeurs données.**

C'est cette proposition que nous avons utilisée sans le dire : elle décrit l'algorithme de soustraction réciproque, encore appelé "**algorithme d'Euclide**".

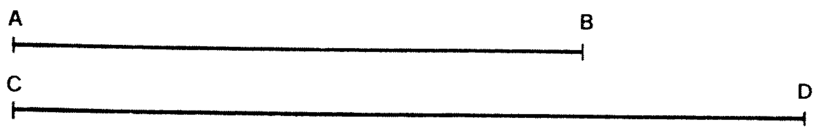
Procédant de façon analytique, nous avons été amenés à intervertir l'ordre d'Euclide qui, lui, procède de façon synthétique.

Proposition 3

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.
Soient AB, CD les deux grandeurs commensurables données, soit AB la plus petite .
Il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, CD



Démonstration de la proposition 3:



AB mesure CD ou ne le mesure pas.

* Voir en annexe : les définitions, ainsi que les trois premières propositions et leurs démonstrations dans la traduction de Peyrard

Si AB mesure CD, puisqu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, CD, et "il est évident", dit Euclide, qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Si AB ne mesure pas CD, "retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent, parce que les grandeurs AB, CD ne sont pas incommensurables" .
Euclide se réfère à la proposition 2 qu'il vient de démontrer et que nous étudions dans les pages suivantes.

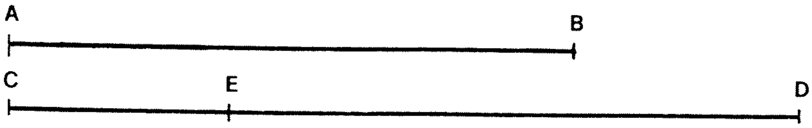


Fig 1

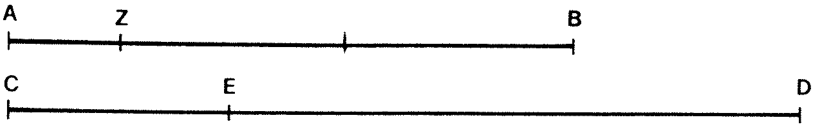


Fig 2

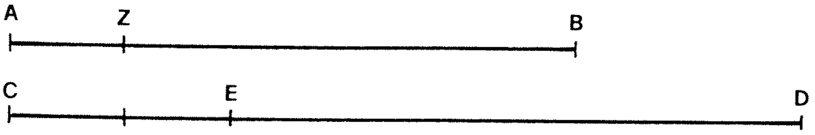


Fig 3

Euclide procède par soustraction et expose sa méthode sur un exemple .

- Il suppose, (fig 1), que de CD on retire une grandeur ED égale à AB et qu'il reste CE, CE plus petit que AB :
  $CD = CE + ED$
  $ED = 1\ AB$
  $CE < AB$

- Il suppose ensuite (fig 2),que de AB, on retire une grandeur ZB égale à 2 CE et qu'il reste AZ, AZ plus petit que CE :
  $ZB = 2\ CE$
  $AB = 2\ CE + AZ$
  $AZ < CE$

- Puisqu'il suppose que AB et CD sont commensurables, l'algorithme prend fin et Euclide suppose que AZ mesure CE: (fig 3)
  $CE = 2\ AZ.$

<u>En résumé:</u>

- "puisque AZ mesure CE et que CE mesure ZB, alors AZ mesurera ZB".
  $ZB = 2\ CE = 4\ AZ.$

- "mais AZ se mesure lui-même, AZ mesurera donc AB tout entier".
  $AB = AZ + ZB = AZ + 4\ AZ = 5\ AZ.$

- "mais AB mesure DE, donc AZ mesurera DE"
  $DE = AB = 5\ AZ.$

- "mais AZ mesure CE, il mesure donc CD tout entier".
  $CD = CE + DE = 2\ AZ + 5\ AZ = 7\ AZ.$

Ainsi, AZ mesure les grandeurs AB et CD.
AZ est donc une mesure commune à AB et à CD.

Pourquoi AZ est-elle la plus grande commune mesure à AB et CD ?

Supposons qu'il existe une mesure H, plus grande que AZ et qui mesure AB et CD.

. Puisque H mesure AB, et que AB mesure ED, H mesure ED.
. Mais H mesure CD tout entier, donc H mesure le reste CE.
. Mais CE mesure ZB, donc H mesure ZB.
. Et comme H mesure AB tout entier ; il mesure donc le reste AZ.

Conclusion : H mesure AZ et AZ est plus petit que H : c'est impossible!
Donc, une grandeur plus grande que AZ, quelle qu'elle soit, ne mesurera pas AB et CD.

AZ est donc la plus grande mesure commune aux grandeurs AB et CD.

- **C'est la proposition 2 du livre X, qui, à l'aide de la proposition 1, permet de démontrer que le problème posé, n'a pas de solution, c'est à dire :**
  . qu'il n'existe pas de mesure commune aux deux grandeurs données,
  . que ces grandeurs sont incommensurables.

Nous énoncerons dans cet ordre, les propositions 1 et 2, mais, toujours pour les raisons évoquées plus haut, et en étant fidèles à la démonstration d'Euclide, nous démontrerons la proposition 2 avant la proposition 1.

Proposition 1

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Proposition 2

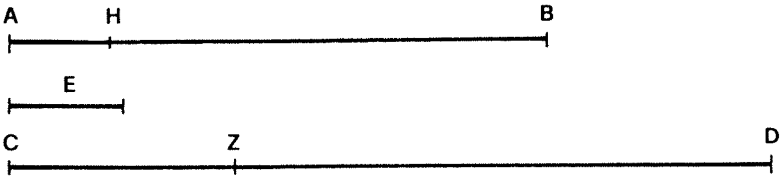
Deux grandeurs inégales étant proposées, et si, la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent , alors ces grandeurs seront incommensurables.

Démonstration de la proposition 2

Considérons les grandeurs AB et CD, AB étant la plus petite.
Supposons que, "la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent".

C'est-à-dire, supposons, comme dans le cas de la comparaison de la diagonale du carré à son côté, que l'on puisse appliquer sans interruption l'algorithme de la soustraction réciproque.

Démontrons qu'alors AB et CD sont incommensurables



Euclide suppose que AB et CD sont commensurables, c'est-à-dire qu'il existe une grandeur E qui mesure AB et CD et il démontre que l'on aboutit à une impossibilité.

Euclide procède par soustraction réciproque, il suppose que:

$$CD = CZ + ZD \quad \text{et} \quad ZD = AB$$
$$AB = AH + HB \quad \text{et} \quad HB = 2\,CZ \quad \text{etc...}$$

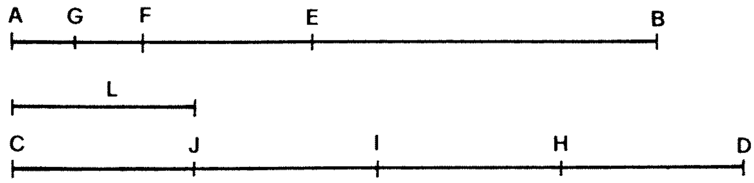
"que l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui soit plus petite que E ".Cette éventualité peut se produire, la proposition 1 l'atteste (voir ci dessous).

Euclide suppose que AH est plus petit que E.
. Puisque E mesure AB et que AB mesure ZD, E mesure ZD.
. Comme E mesure aussi CD, E mesure donc la différence CZ.
. Comme CZ mesure BH, E mesure donc BH.
. Comme E mesure BH et AB, E mesure donc la différence AH.
Rappelons que AH est plus petit que E .
E ne peut mesurer une grandeur plus petite que lui.

L'hypothèse "AB et CD sont commensurables" est donc à rejeter : il n'existe aucune grandeur mesurant les deux grandeurs initiales AB et CD.

Selon la définition (D_2) **AB et CD sont donc incommensurables.**

Démonstration de la proposition 1



Soient AB et L deux grandeurs inégales . AB est la plus grande.
Multiplions L par un nombre entier, n, assez grand pour que nL "dépasse" AB. Ceci est possible *
On obtient CD.
CD est constitué de n parties égales à L.

Retranchons de AB une partie BE plus grande que sa moitié : $BE > \frac{AB}{2}$.

* cf.Euclide V 5

De AE, le reste, retranchons une partie FE plus grande que sa moitié : $FE > \frac{AE}{2}$.

et "faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre de divisions de AB soit égal au nombre de divisions de CD" : $FG > \frac{AF}{2}$

AB et CD sont partagés en le même nombre de parties :

$$AB = BE+EF+FG+GA$$
$$CD = L+L+L+L$$

. CD > AB

. On retranche de CD une partie DH de mesure L :

.. ou bien $DH < \frac{CD}{2}$ (lorsque $n > 2$)

.. ou bien $DH = \frac{CD}{2}$ (lorsque $n = 2$)

$\boxed{\text{Si } n > 2}$

• **Sur [CD] :**

$DH < \frac{CD}{2}$ donc $CD - DH > CD - \frac{CD}{2}$

or $CD - DH = CH$ et $CD - \frac{CD}{2} = \frac{CD}{2}$

donc $\frac{CD}{2} < CH$

• **Sur [AB] :**

$BE > \frac{AB}{2}$ donc $AB - BE < AB - \frac{AB}{2}$

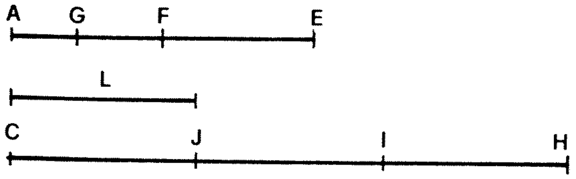
or $AB - BE = AE$ et $AB - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2}$

donc $AE < \frac{AB}{2}$

Et comme AB < CD, par transitivité

$AE < \frac{AB}{2} < \frac{CD}{2} < CH$, soit $\mathbf{AE < CH.}$

De la ligne AB, il ne reste plus que AE.
De la ligne CD, il ne reste plus que CH.
Et AE < CH
AE et CH sont, eux, partagés en n-1 parties.



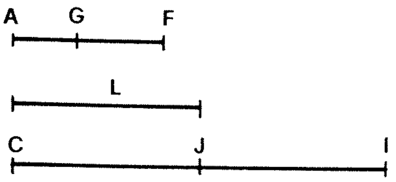
$$AE = EF + FG + GA$$
$$CH = L + L + L$$

$\boxed{\text{Si } n\text{-}1 > 2}$

Nous tiendrons un raisonnement analogue au précédent, et cela, tant qu'il restera, dans "le reste de AB" et "dans le reste de CD", un nombre p de segments, p supérieur à 2.

$\boxed{\text{Si } p = 2}$

De la ligne AB, il ne reste que AF
De la ligne CD, il ne reste que CI
Et AF < CI



• sur [AF] : $GF > \frac{AF}{2}$ donc $AF - GF < AF - \frac{AF}{2}$

or $AF - GF = AG$ et $AF - \frac{AF}{2} = \frac{AF}{2}$

donc $AG < \frac{AF}{2}$

• sur [CI] : $CI = 2L$ donc $AF < 2L$ et $\frac{AF}{2} < L$

et, par transitivité **$AG < L$**

<u>Conclusion</u> : **Deux grandeurs inégales AB et L "étaient proposées". De la plus grande AB, on a retranché une partie plus grande que sa moitié, du reste, on a retranché une partie plus grande que sa moitié, ainsi de suite. Il reste une grandeur AG, plus petite que L, la plus petite des grandeurs proposées.**

5) APPLICATION : DEMONSTRATION DE L'INCOMMENSURABILITE DE LA DIAGONALE DU CARRE ET DE SON COTE.

Appliquons le principe de la démonstration de la proposition 2 du livre X à la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté.
Les notations sont celles du paragraphe 3

Supposons qu'il existe une mesure u, commune au côté a et à la diagonale d.

Si u mesure a et d, il mesure donc leur différence d - a_o

$a_1 = d - a_o$
$a_2 = a_o - 2a_1$
$a_3 = a_1 - 2a_2$
.....
$a_{n+2} = a_n - 2a_{n+1}$

u mesure donc aussi a_1, a_2, a_3, , a_{n+2} .

$d - a_o = a_1$
De d, on enlève une quantité a_o plus grande que sa moitié, car, dans le triangle rectangle isocèle ABC, $d^2 = 2\,a_o^2$

donc $a_o < d < 2a_o$

et $\dfrac{d}{2} < a_o$

$(d-a_o) - 2a_2 = a_1 - 2a_2 = a_3$, où $d-a_0 = a_1$, $a_1 - 2a_2 = a_3$,
Du reste a_1, on enlève une quantité $2a_2$, plus grande que sa moitié car

$a_1 = 2a_2 + a_3 < 3a_2 < 4\,a_2$ car $a_3 < a_2$

donc, $\dfrac{a_1}{2} < 2a_2$

$(d-a_o-2a_2) - 2a_4 = a_3 - 2a_4 = a_5$ où $a_3 = d-a_0-2a_2$, $a_3 - 2\,a_4 = a_5$
Du reste a_3, on enlève une quantité $2a_4$ plus grande que sa moitié

$\dfrac{a_3}{2} < 2a_4$

Pour l'entier p nous écrirons de façon analogue : $d - a_o - 2a_2 - 2a_4 - \dots\dots\dots - 2a_{2p} = a_{2p+1}$

et $\dfrac{a_{2p+1}}{2} < 2a_{2p}$

(Du reste, on enlève encore une partie plus grande que sa moitié)

Appliquons la proposition 1 du livre X :

Deux grandeurs inégales, d et u, étant proposées, si l'on retranche de la plus grande, d, une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste, une partie plus grande que sa moitié, et si l'on refait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Nous finirons donc par obtenir un reste a_{2p+1} inférieur à la mesure u (u pouvant avoir été choisie très petite).

$$a_{2p+1} < u$$

<u>Ceci est impossible</u> puisque nous avons démontré précédemment, que u mesure a_n et donc a_{2p+1}.
u ne saurait mesurer une grandeur qui lui est inférieure. C'est l'argument qu'utilise Euclide dans la proposition 2, et qui lui est fourni par la proposition 1.

<u>Conclusion</u> :

L'hypothèse d'une mesure commune à, a et d, est donc fausse:
les propositions 1 et 2 du livre X des Eléments permettent de conclure à <u>l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté</u>.

Euclide et ses prédécesseurs se sont ainsi trouvés réduits au terrible constat suivant:
il n'existe pas de mesure commune au côté du carré et à sa diagonale.
On ne peut donc pas attribuer un nombre à chacune de ces grandeurs, et, pour parodier la devise des pythagoriciens : "tout n'est pas nombre", puisque le quotient d/a ne peut pas s'écrire sous la forme du quotient de deux nombres entiers.

Les circonstances historiques de ce constat sont mal connues.
"La découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté avait paru livrer accès à l'univers redoutable de la démesure, à un domaine irréductible aux normes habituelles du calcul et du discours bien règlé. Ce rapport sera déclaré inassignable, irrationnel, aux sens à la fois d'incalculable et d'impensable". (Mathématique au fil des âges).*

* voir en annexe , la note : La crise des irrationnels

6) LE RAPPORT DE LA DIAGONALE AU CÔTÉ PEUT ÊTRE APPROCHÉ PAR DES RAPPORTS D'ENTIERS.

Les relations du paragraphe 3 permettent d'écrire :

(1) $\Rightarrow \quad \dfrac{d}{a_0} = 1 + \dfrac{a_1}{a_0} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{a_0}{a_1}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{a_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{a_1}}$$

(2) $\Rightarrow \quad \dfrac{a_0}{a_1} = 2 + \dfrac{a_2}{a_1}$

Si on néglige a_2 devant a_1, on obtient une valeur approchée de $\dfrac{d}{a_0} \approx \mathbf{1 + \frac{1}{2}}$ **c'est à dire** $\mathbf{\frac{3}{2}}$

De façon analogue :

$$\frac{d}{a_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{a_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{a_3}{a_2}}}$$

(3) $\Rightarrow \quad \dfrac{a_1}{a_2} = 2 + \dfrac{a_3}{a_2}$

Si on néglige a_3 devant a_2, on obtient une valeur approchée de $\dfrac{d}{a_0} \approx \mathbf{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ **c'est à dire** $\mathbf{\frac{7}{5}}$

Et ainsi de suite : $\dfrac{d}{a_o} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{a_4}{a_3}}}}$

qui , en négligeant a_4 par rapport à a_3, devient :

$$\mathbf{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \quad \textbf{c'est à dire} \quad \mathbf{\frac{17}{12}}$$

et l'on obtient la fraction "continuée" :

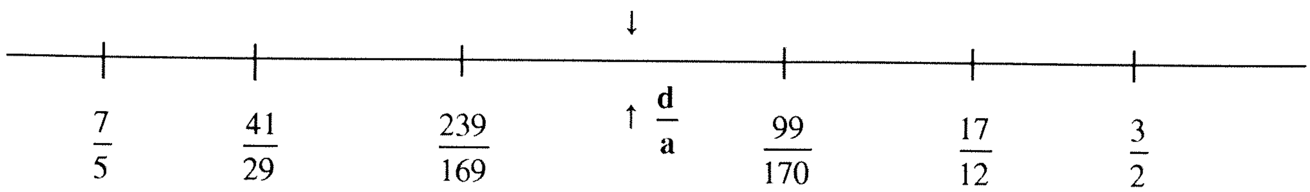
$$\frac{d}{a_o} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$

$\frac{d}{a_o}$ n'est pas un rationnel, mais il peut être approché, "de mieux en mieux", par les fractions :

$$\frac{3}{2} ; \frac{7}{5} ; \frac{17}{12} ; \frac{41}{29} ; \frac{99}{70} ; \frac{239}{169} ; \dots$$

$$\frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \dots < \frac{d}{a} < \dots < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

$\frac{d}{a}$ n'est pas un rationnel, bien qu'il vienne "s'inscrire entre" deux suites de rationnels, l'une croissante, l'autre décroissante ... et tellement proches l'une de l'autre !



$\frac{99}{70}$ et $\frac{239}{169}$ ne sont que les troisièmes termes de ces suites "sans fin" de rationnels

et $\quad \frac{99}{70} - \frac{239}{169} < 0{,}006$

7) EXERCICES : APPLICATION DE L'AXIOMATIQUE D'EUCLIDE A L'ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES

EXERCICE 1: COMMENT APPROCHER LE RAPPORT DE GRANDS NOMBRES PAR LE RAPPORT DE NOMBRES PLUS PETITS.

"Lorsqu'Aristarque de Samos, qui vivait vers 280 avant notre ère, a besoin, dans son ouvrage sur les dimensions et la distance du Soleil et de la Lune, d'utiliser le rapport de 71 755 875 à 61 735 500, il le remplace sans plus d'explications par celui de 43 à 37. De même il remplace le rapport de 7 921 à 4 050 par celui de 88 à 45.
Il sait d'ailleurs que les deux approximations sont par défaut.
Archimède,dans sa mesure de la circonférence, remplace le rapport de

$284\frac{1}{4}$ à $2017\frac{1}{4}$ par celui de 10 à 71" .*

Quel fut, du moins, peut-on le supposer, le raisonnement d'Aristarque de Samos et celui d'Archimède ?

• <u>1ère approximation :</u>

Soit $A = 71\,755\,875$ et $B = 61\,735\,500$

$A - B = C = 10\,020\,375$

$B - 6C = D = 1\,613\,250$

$C - 6D = 340\,875$

Soit ε ce reste :

$C = 6D + \varepsilon$

$B = 6C + D = 6(6D+\varepsilon) + D = 36D + 6\varepsilon + D$

• $\mathbf{B = 37D + 6\varepsilon}$

$A = B + C = 37D + 6\varepsilon + 6D + \varepsilon = 43D + 7\varepsilon$

• $\mathbf{A = 43D + 7\varepsilon}$

d'où $37A = 1591D + 259\varepsilon$

$43B = 1591D + 258\varepsilon$

et donc $43B < 37A$

En négligeant ε petit devant A et B, de l'ordre de 5 millièmes, on obtient :

$$\boxed{\frac{A}{B} \approx \frac{43}{37}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{43}{37} < \frac{A}{B}}$$

* Jean Itard. "Les livres arithmétiques d'Euclide", p. 26

• <u>2 ème approximation:</u>

Soit $A=7921$ et $B=4050$

$$\begin{aligned}
A - B &= C = 3871\\
B - C &= D = 179\\
C - 21\,D &= E = 112\\
D - E &= F = 67\\
E - F &= 45
\end{aligned}$$

Soit ε ce reste : $E = F + \varepsilon$

$$\begin{aligned}
D &= E + F = 2F + \varepsilon\\
C &= 21\,D + E = 21\,(2F+\varepsilon) + F+\varepsilon &&= 43\,F + 22\varepsilon\\
B &= C + D = 43\,F + 22\varepsilon + 2\,F+\varepsilon &&= 45\,F + 23\varepsilon\\
A &= B + C = 45\,F + 23\varepsilon + 43F + 22\varepsilon &&= 88\,F + 45\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A = 88F + 45\varepsilon \quad et \quad B = 45F + 23\,\varepsilon}$$

En négligeant ε , petit devant A et B, de l'ordre du centième : $\boxed{\dfrac{A}{B} \approx \dfrac{88}{45}}$

De plus,
$$45\,A = 3960\,F + 2025\varepsilon$$
$$88\,B = 3960\,F + 2024\varepsilon$$

donc $45\,A > 88B$ et $\dfrac{A}{B} > \dfrac{88}{45}$

• <u>3ème approximation</u>

Soit $A = 2017\,\dfrac{1}{4}$ et $B = 284\,\dfrac{1}{4}$

$$A - 7\,B = C = 27\,\frac{1}{2}$$

$$B - 10\,C = 9\,\frac{1}{4}$$

Soit ε ce reste : $B = 10\,C + \varepsilon$

$$A = 7\,B + C = 7\,(10\,C + \varepsilon) + C$$

$$\mathbf{A=71C+7\varepsilon \quad et \quad B=10C+\varepsilon}$$

En négligeant ε devant A et B, de l'ordre de 4 centièmes :

$$\boxed{\frac{A}{B} \approx \frac{71}{10}}$$

$10\,A = 710\,C + 70\varepsilon$

$71\,B = 710\,C + 71\,\varepsilon$ donc $10A < 71B$

et $\boxed{\dfrac{A}{B} < \dfrac{71}{10}}$

EXERCICE 2 LE NOMBRE D'OR

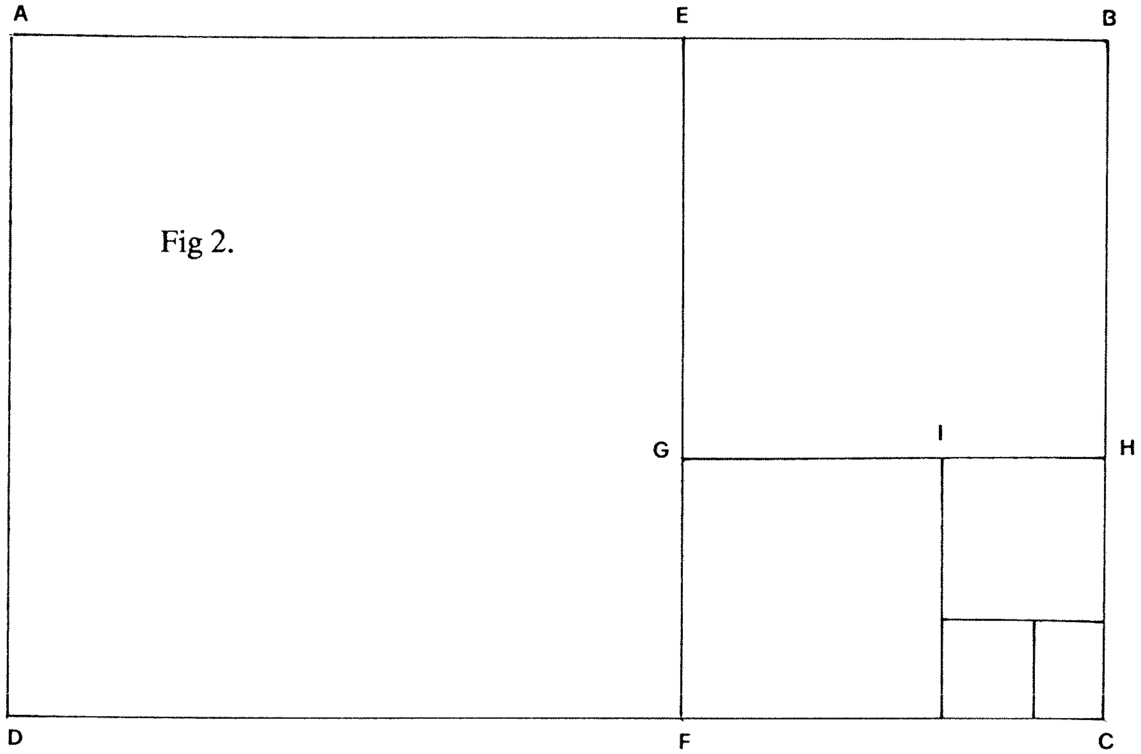


Fig 2.

Le rectangle ABCD est tel que le rectangle EBCF obtenu en lui "enlevant" le carré ADFE, a les mêmes proportions que le rectangle initial,

c'est-à-dire $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$

1°) Démontrer, à l'aide de l'axiomatique d'Euclide, que les côtés AB et AD sont incommensurables.

2°) Démontrer que le nombre $\frac{AB}{AD}$ **peut s'écrire sous la forme d'une fraction continuée simple.**

3°) Encadrer $\frac{AB}{AD}$ **par deux suites de fractions.**

Solution :

Soit $L = AB$ et $l = AD$

Remarquons que, $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$, permet d' écrire, en utilisant une propriété des rapports :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l} = \frac{L-l}{l-(L-l)}$$

c'est-à-dire, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{FC} = \dfrac{FC}{GF}$

Tous les rectangles obtenus par "soustraction" d'un carré construit sur la largeur du rectangle précédent, ont donc les mêmes proportions.

Ainsi:

$$AB = AE + EB = AD + EB$$
$$AD = EF = EG + GF = EB + GF$$
$$EB = GH = GI + IH = GF + IH$$

Notons L_i et l_i la longueur et la largeur du ième rectangle obtenu.

$$\begin{array}{ll} L_1 = L & l_1 = l \\ L_1 - l_1 = l_2 & L_2 = l_1 \\ L_2 - l_2 = l_3 & L_3 = l_2 \\ L_3 - l_3 = l_4 & L_4 = l_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Une mesure u, commune à L et l, c'est-à-dire à L_1 et l_1 mesure aussi leur différence l_2 et donc les différences l_3, l_4, ...l_p,...
Comme dans le cas du carré, deux grandeurs inégales sont données, L_i et l_i , longueur et largeur du -ième rectangle.

<u>De la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié</u>.

En effet :

$\dfrac{L_i}{l_i} > 1$ or, $\dfrac{L_i}{l_i} = \dfrac{l_i}{L_i - l_i}$ donc, $\dfrac{l_i}{L_i - l_i} > 1$ et $l_i > L_i - l_i$

c' est à dire , $2l_i > L_i$ soit $l_i > \dfrac{L_i}{2}$

Appliquons la proposition 1 du livre X : nous finirons par obtenir un reste l_p inférieur à la mesure u. Ce qui est impossible puisque u mesure l_p (et ne saurait mesurer une grandeur qui lui est inférieure).

<u>Il n'existe donc pas de mesure commune à la longueur et à la largeur de ce rectangle.</u>

(ou encore le nombre qui mesure $\dfrac{L}{l}$ n'est pas un rationnel).

Ce nombre, <u>souvent noté Φ, est appelé nombre d'or.</u>

Il peut s'écrire sous la forme d'une fraction continuée :

$L_1 = l_1 + l_2$; $\quad \phi = \frac{L}{l} = \frac{L_1}{l_1} = 1+\frac{l_2}{l_1} = 1+\frac{1}{\frac{l_1}{l_2}} = 1+\frac{1}{\frac{L_2}{l_1}}$

$L_2 = l_2 + l_3$; $\quad \phi = \frac{L}{l} = 1 + \frac{1}{1+\frac{l_3}{l_2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{l_2}{l_3}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{L_3}{l_3}}}$

$L_3 = l_3 + l_4$; $\quad \phi = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{l_4}{l_3}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{l_3}{l_4}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{L_4}{l_4}}}}$

....

donc $$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Le nombre d'or est donc approché par les fractions

$$2 ; \frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{8}{5};\frac{13}{8};\frac{21}{13};\frac{34}{21};\frac{55}{34};\frac{89}{55};\frac{144}{89};\dots$$

$$\frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \frac{55}{34} < \frac{144}{89} < \phi < \frac{89}{55} < \frac{34}{21} < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < 2$$

mais Φ n'est aucun de ces nombres

Remarque 1

Nous avons vu plus haut que le nombre d'or $\Phi = \frac{L}{l}$ vérifie :

$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ soit $\frac{L-l}{l} = \frac{l}{L}$ c' est à dire $\frac{L}{l} - 1 = \frac{1}{\frac{L}{l}}$

donc, $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ ou $\phi = 1+\frac{1}{\phi}$

Le nombre d'or est égal à la somme de 1 et de l'inverse du nombre d'or.
Le nombre d'or est égal à:"1 plus l'inverse de [1 plus l'inverse de (1 plus l'inverse de{ ...})] "...!

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Remarque 2

Quel est donc ce nombre Φ ? Quel nombre irrationnel est-il ?

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \text{ donc } \phi^2 - \phi - 1 = 0 \qquad (E)$$

ϕ est positif et il est solution de l'équation (E) donc $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Remarque 3

On dit que le point E partage le segment [AB] en moyenne et extrême raison car

$\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{EB}$ ([AB] est partagé en [AE] et [EB], [AE] occupe la position moyenne, [EB] occupe la position extrême).

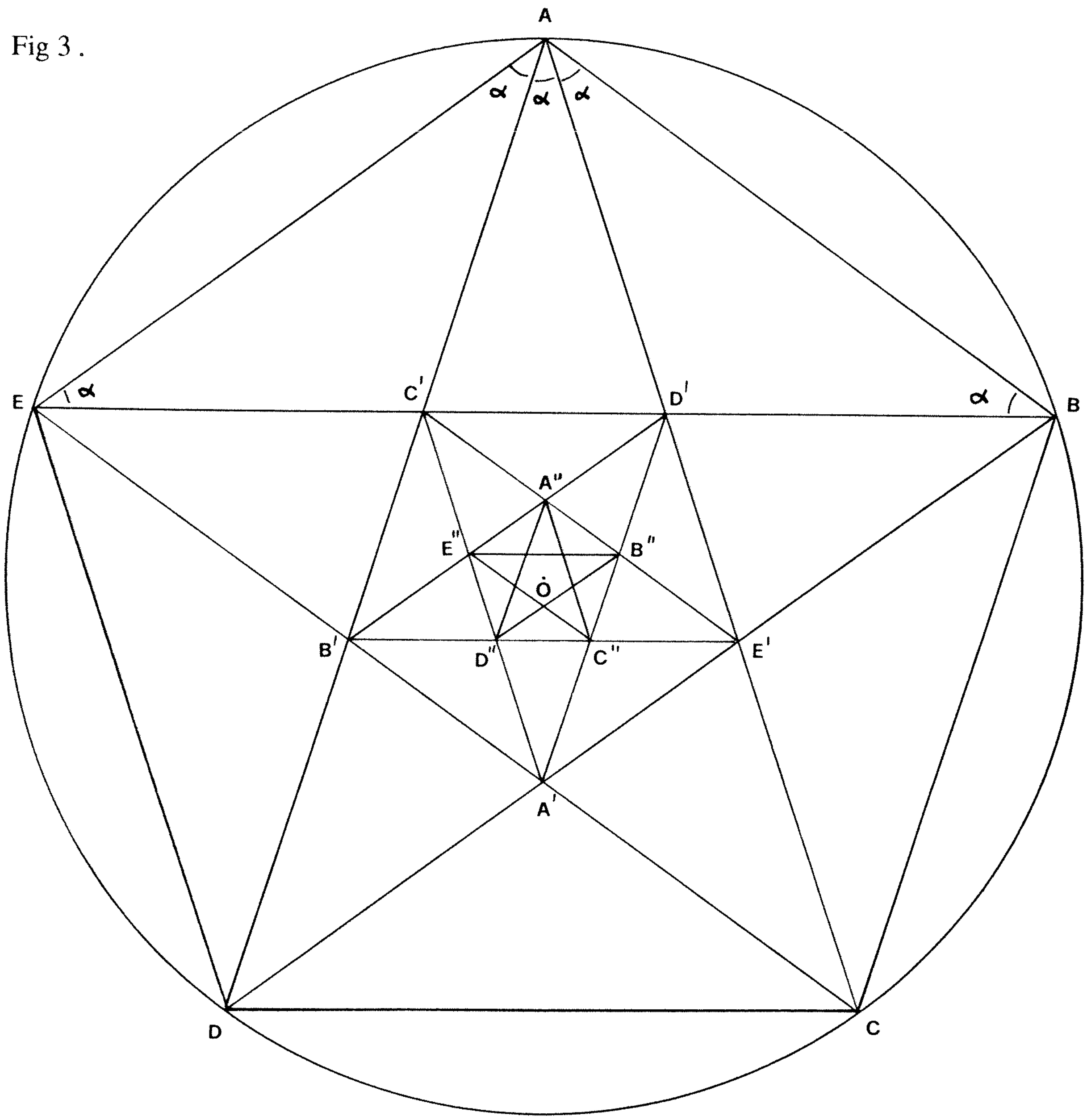
Nous allons retrouver ce partage et le nombre d'or dans l'exemple suivant.

EXERCICE 3 : LE PENTAGONE REGULIER

1°) Démontrer que les angles marqués α sur la figure ci dessous sont égaux, et donner leur mesure.
2°) Recenser les familles de triangles isocèles de mêmes proportions.
(Ceux dont l'angle au sommet mesure 3α, et ceux dont l'angle au sommet mesure α)
3°) A l'aide de l'axiomatique d'Euclide, démontrer qu'il n'existe pas de mesure commune à la diagonale d et au côté c du pentagone (dans le pentagone ABCDE, [AB] est un côté, [AC] est une diagonale).

Le Pentagone régulier est la figure privilégiée des Pythagoriciens, et sa contemplation les conduisit peut-être vers l'idée d'incommensurabilité.

Fig 3 .



Solution.

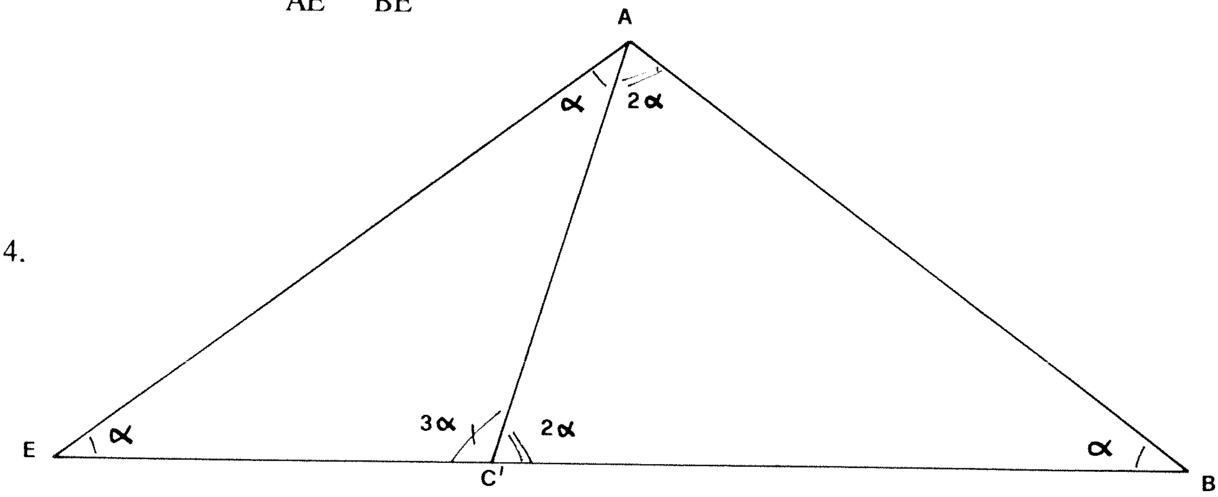
1°) Les angles marqués α sur la figure sont égaux car ils interceptent des arcs égaux. Les côtés ED, DC, CB sont égaux et les angles inscrits $\widehat{EAD}$, $\widehat{DAC}$, $\widehat{CAB}$ qui les interceptent sont égaux.

L'angle inscrit $\widehat{DOC}$ a une mesure double de celle de $\widehat{DAC}$: 2α

$$5 \times 2\alpha = 2\pi \quad \text{d'où,} \quad \alpha = \frac{\pi}{5}$$

2°) Les triangles isocèles d'angle à la base α et d'angle au sommet 3α ont les mêmes proportions, c'est-à-dire $\frac{AC'}{AE} = \frac{AE}{BE}$

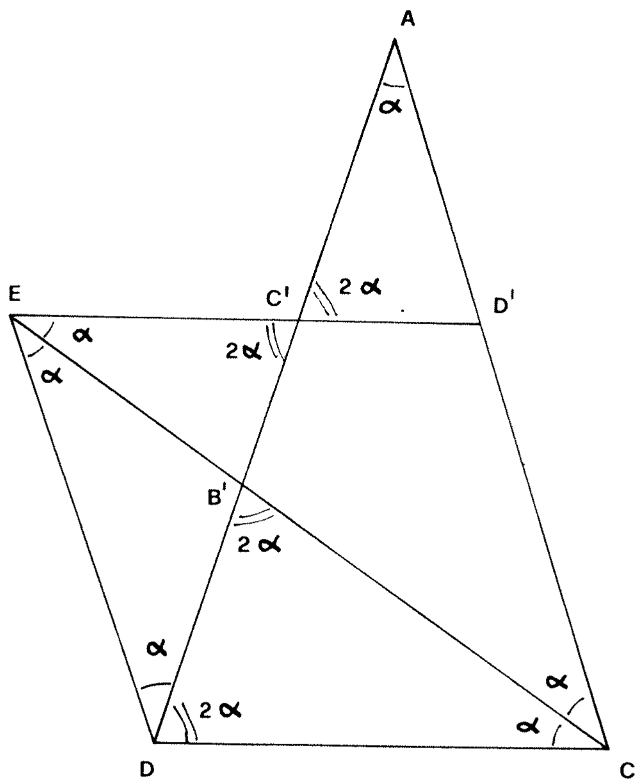
Fig 4.



ainsi que les triangles isocèles d'angle à la base 2α et d'angle au sommet α (fig 4 et 5)

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB'} = \frac{ED}{EC'} = \frac{AC'}{C'D'}$$

Fig 5 .



3°) Existe-t-il une mesure commune à la diagonale d et au côté du pentagone ?

Soit (c_i) la suite des côtés et (d_i) la suite des diagonales.

$d_1 = d$
$c_1 = c$

$d_2 = d_1 - c_1$ car $d_1 - c_1 = EB - EA = EB - ED' = D'B = D'A' = d_2$
d_2 est la diagonale du pentagone régulier A'B'C'D'E' de côté $A'E' = A'B'' = c_2$
$c_2 = c_1 - d_2$ car $c_1 - d_2 = BC - A'D' = A'B - D'B = A'B - E'B = A'E' = c_2$

$d_3 = d_2 - c_2$
$c_3 = c_2 - d_3$

....
$d_{i+1} = d_i - c_i$
$c_{i+1} = c_i - d_{i+1}$

Supposons qu'il existe une mesure u commune à d_1 et c_1
u mesure aussi : $d_2, c_2, d_3, c_3, \ldots d_i, c_i$

De plus, $ED' > \frac{EB}{2}$, c'est-à-dire, $c > \frac{d}{2}$, et de façon générale, $c_i > \frac{d_i}{2}$,
et $EC' > C'D'$ or $EC' = EB' = B'D' = d_2$

donc $d_2 > c_2$ et comme $c_1 = c_2 + d_2$, $c_1 < 2\,d_2$ et $\boxed{d_2 > \frac{1}{2}c_1}$

De c_1 on retranche une partie d_2, plus grande que sa moitié. De même :

$d_{i+1} = d_i - c_i$ et $c_i > \frac{d_i}{2}$

$c_{i+1} = c_i - d_{i+1}$ et $d_{i+1} > \frac{c_i}{2}$

Appliquons la proposition 1 du livre X , nous finirons par obtenir un reste d_i ou c_i, inférieur à la mesure u. Ce qui est impossible puisque u mesure d_i et c_i.

Il n'existe donc pas de mesure commune à la diagonale et au côté du pentagone.

Remarque :

Dans les triangles isocèles du 1er type (cf. fig 3),

$\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{BD'}$ or $EA = AB = ED'$ donc $\boxed{\frac{EB}{ED'} = \frac{ED'}{BD'}}$

D' partage donc [EB] en moyenne ([ED']) et extrême ([BD']) raison : $\frac{d}{c} = \frac{c}{d-c}$

Nous reconnaissons dans le rapport $\frac{d}{c}$ le nombre d'or Φ, étudié à l'exercice 2.

Ce nombre étant irrationnel, il est "normal" qu'il n'existe pas de mesure commune à la diagonale d et au côté du pentagone.

EXERCICE 4 : LE COTE D'UN TRIANGLE EQUILATERAL ET LE RAYON DU CERCLE CIRCONSCRIT SONT INCOMMENSURABLES .

Soit ABC un triangle équilatéral de côté d, et R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1°) Démontrer que le côté du triangle et le rayon du cercle circonscrit sont incommensurables.

2°) A quel nombre non rationnel est égal le rapport $\frac{d}{R}$?

Fig. 7.

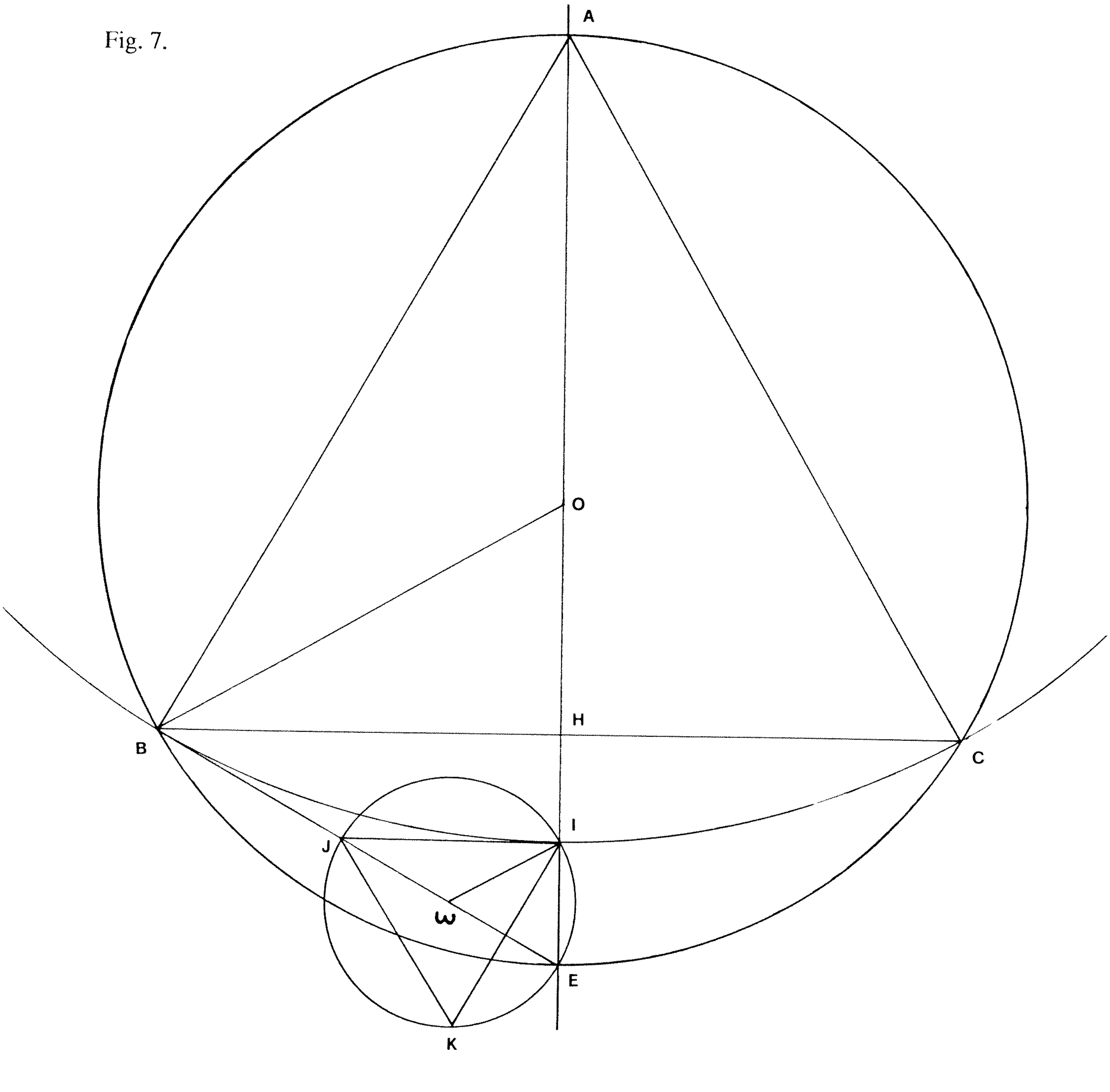
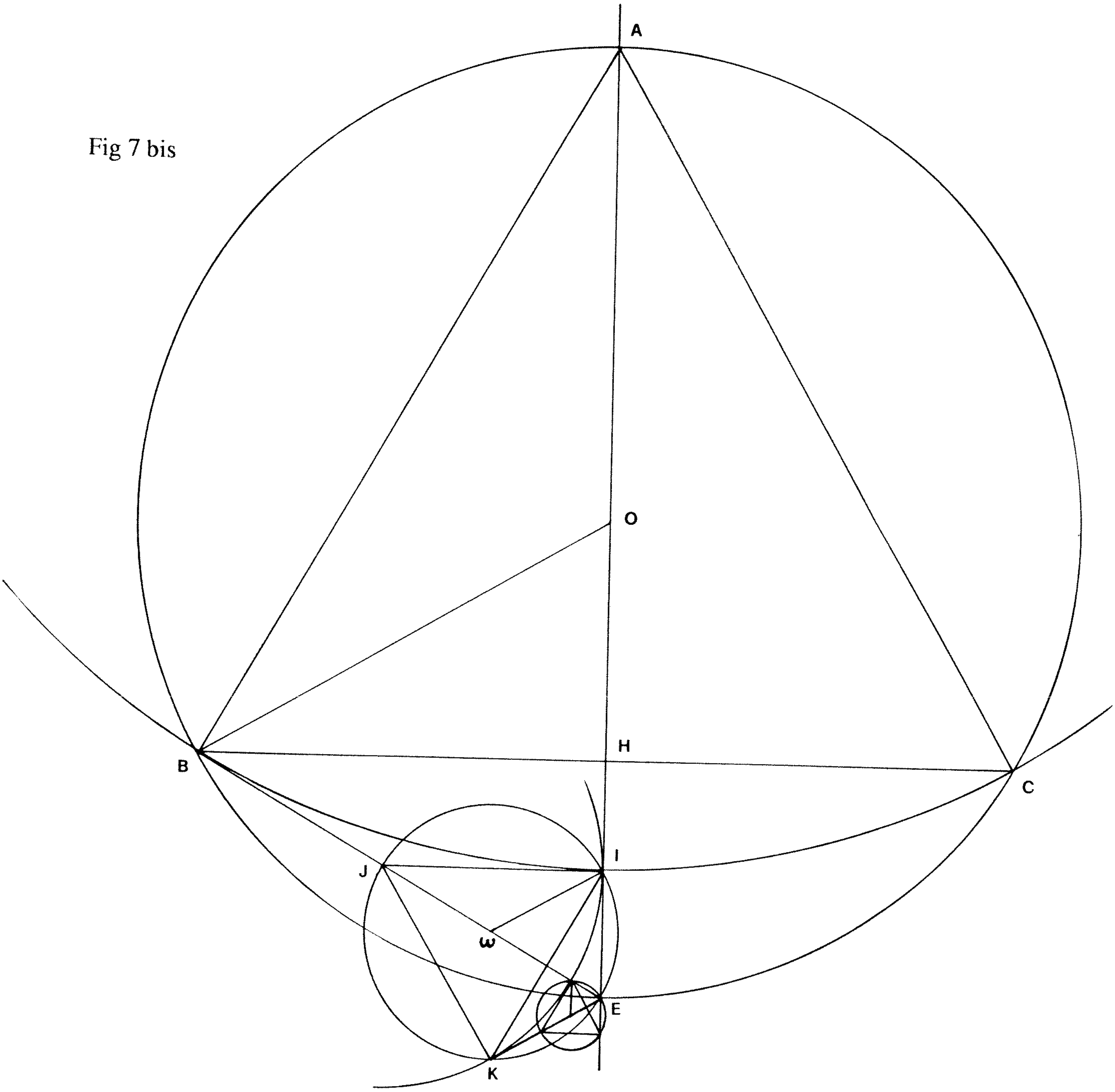


Fig 7 bis



1°) [AE] est un diamètre du cercle circonscrit : AE = 2R .

$E\hat{A}B = 30°$, $B\hat{E}A = 60°$, et $E\hat{B}A = 90°$

Le cercle de centre A et de rayon d coupe [AE] en I : AI = AB =d .

•Soit $d_0 = d$ et $R_o = R$

•Soit $R_1 = IE = AE - AI = 2R - d$

donc $\boxed{R_1 = 2R_o - d_o \quad \text{et } d_o > \frac{1}{2}(2R_o)}$ (car $d > R$)

La perpendiculaire à [AE] en I est parallèle à (BC) et coupe (BE) en J.

(JB) et (JI) sont tangentes au même cercle de centre A et de rayon d, donc JB = JI

$J\hat{E}I = B\hat{E}A = 60°$, donc $E\hat{J}I = 30°$.

Comme BHE, le triangle JIE est un "demi-triangle équilatéral" et,

$JE = 2\ EI = 2\ R_1 = 2\ E\omega$.

Soit IJK le triangle équilatéral de centre ω, et ωI le rayon du cercle qui lui est circonscrit.

•Soit $d_1 = IJ$, comme $IJ = BJ$, alors $d_1 = BJ = BE - JE$

$\boxed{d_1 = R_o - 2R_1 \quad \text{et} \quad 2R_1 > \frac{1}{2} R_o}$ car $R_o = BJ + JE > BJ + JI$

donc $R_o > 2\, d_1$ c'est-à-dire $R_o > 2\, R_o - 4\, R_1$

donc $4\, R_1 > R_o$ et $2\, R_1 > \frac{1}{2}\, R_o$

•Reprenons un raisonnement analogue dans le triangle équilatéral IJK de côté d_1 et son cercle circonscrit de rayon R_1 et définissons

$R_2 = 2\, R_1 - d_1$ et $d_1 > \frac{1}{2}\,(2\, R_1)$

$d_2 = R_1 - 2\, R_2$ et $2\, R_2 > \frac{1}{2}\, R_1$

....

$R_{i+1} = 2\, R_i + d_i$ et $d_i > \frac{1}{2}\,(2\, R_i)$

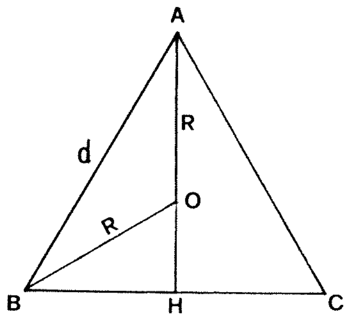
$d_{i+1} = R_i - 2\, R_{i+1}$ et $2\, R_{i+1} > \frac{1}{2}\, R_i$

<u>Supposons qu'il existe une mesure u commune à, d et R.</u>

u mesure donc $R_1, d_1, R_2, d_2, \ldots, R_i, d_i, \ldots$
Appliquons la proposition 1 : de la "plus grande des grandeurs" on retranche une partie plus grande que sa moitié, on finira donc par obtenir un reste, R_i ou d_i, inférieur à la mesure u, ce qui est impossible puisque u mesure R_i et d_i.

L'hypothèse d'une mesure commune à, d et R, est donc fausse.

2°) ABC est un triangle équilatéral de côté d.



O est le centre de gravité du triangle, il est donc situé aux deux tiers de AH :

$R = OA = \frac{2}{3}\, AH$ or, $AH = d\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc, $R = \frac{2}{3}\, d\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{\sqrt{3}}$

et $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{R}} = \sqrt{3}$

EXERCICE 5 : LE PROBLEME DU CALENDRIER

Lorsqu'on veut mesurer des longueurs, on est libre de choisir l'unité. Mais il n'en est pas ainsi pour la mesure de la durée car le jour et l'année nous sont imposés par la nature !

Chez les peuples nomades, les phases de la lune ont tout naturellement servi à diviser le temps. Mais lorsque ces populations se fixèrent au sol pour adopter la vie agricole, elles sentirent rapidement le besoin d'un calendrier réglé sur les saisons, c'est à dire sur la marche du soleil, tout en gardant d'ailleurs leur ancien calendrier lunaire.

Les premiers calendriers solaires étaient fondés sur une année de 365 jours. Ainsi, le calendrier égyptien comprenait 12 mois de 30 jours et 5 jours complémentaires ou épagomènes.

Malheureusement, une année tropique *(durée qui sépare deux équinoxes - de printemps - consécutifs)* n'est pas un nombre entier de jours mais est égale à 365 jours, 5 heures, 48minutes et 46 secondes ...

QUESTION 1

Montrer que l'approximation de l'année par 365 jours conduit à un renversement complet des saisons en 750 ans (c'est à dire si l'équinoxe de printemps a lieu le 21 Mars, dans 750 ans, elle aurait lieu 1/2 année plus tard ...

En l'an 46 avant J.C., Jules César entreprit de réformer le calendrier romain. Sosigène, un astronome d'Alexandrie, institua la règle simple : toute année dont le millésime est divisible par 4 comporte 366 jours *(les Romains avaient décidé de doubler le sixième jour précédant les calendes de Mars, qui correspondaient au Nouvel An. D'où le nom d'année bissextile pour désigner les années de 366 jours : bissextile vient du Latin* bis sextus *qui signifie "deux fois sixième").* Les autres années restent bien entendu fixées à 365 jours. Ce calendrier porte le nom de "Calendrier Julien".

QUESTION 2

Calculer la durée moyenne d'une année civile du Calendrier Julien.
Montrer que la différence avec l'année Tropique correspond à une erreur de 1 jour (environ) tous les 128 ans.

Le calendrier Julien a été adopté par l'Eglise Catholique en l'an 325, au Concile de Nicée. A cette époque, l'équinoxe de printemps tombait le 21 Mars et on avait fixé la célébration de la fête de Pâques à partir de cette date.

En 1582, l'erreur du calendrier Julien était d'environ une dizaine de jours, et effectivement, l'équinoxe de printemps tombait le 11 Mars. Le Pape Grégoire XIII décida que le 5 Octobre 1582 compterait pour le 15 Octobre 1582, et que dorénavant, pour que l'équinoxe de printemps tombe entre le 19 et le 21 Mars, toute année séculaire dont le millésime n'est pas divisible par 400 resterait l'année commune. (ainsi 1700, 1800 et 1900 n'ont pas été des années bissextiles. Par contre l'an 2000 est une année bissextile !). Ce calendrier porte le nom de calendrier Grégorien. A l'heure actuelle, il a été adopté par presque tous les pays.

QUESTION 3

Calculer la différence entre l'année civile ainsi définie par le calendrier Grégorien et l'année Tropique. Montrer que cette différence engendre une erreur qui est d'environ un jour pour 3500 ans.

Essayons à notre tour d'approcher le rapport "année tropique sur jour" par des rapports dont le numérateur et le dénominateur sont les plus petits possibles.

En prenant comme unité la seconde, une année tropique égale à 365 jours et 20926 secondes et un jour égal à 24 x 3600 = 86400 secondes.

Par conséquent :

$$\frac{A}{J} = 365 + \frac{20926}{86400}$$

Or,

$$\frac{20926}{86400} = \frac{1}{\frac{86400}{20926}} = \frac{1}{4 + \frac{2696}{20926}}$$

En négligeant le "reste" $\frac{2696}{20926}$, on a une première approximation du rapport $\frac{A}{J}$

$$\boxed{\frac{A}{J} \approx 365 + \frac{1}{4}}$$

En poussant les calculs, on a :

$$\frac{2696}{20926}=\frac{1}{\frac{20926}{2696}}=\frac{1}{7+\frac{2054}{2696}}$$

$$\frac{2054}{2696}=\frac{1}{\frac{2696}{2054}}=\frac{1}{1+\frac{642}{2054}}$$

$$\frac{A}{J}=365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{642}{2054}}}}$$

Soit les approximations successives de $\frac{A}{J}$:

$$\frac{A}{J}\approx 365+\frac{1}{4}$$

$$\frac{A}{J}\approx 365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}=365+\frac{7}{29}$$

$$\frac{A}{J}\approx 365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}}=365+\frac{8}{33}$$

Cette dernière approximation nous indique qu'il faudrait intercaler 8 jours tous les 33 ans, soit $\frac{8\times 400}{33}\approx 96{,}9$ jours tous les 400 ans.

Or, durant une telle période, le calendrier Julien en intercale 100 et le calendrier Grégorien en intercale 97 ...

QUESTION **4**

Proposez un calendrier où on rajoute huit jours tous les 33 ans

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appèlera rationnelle la droite proposée.

6. On appèlera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appèlera rationel le quarré de la proposée.

9. On appèlera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

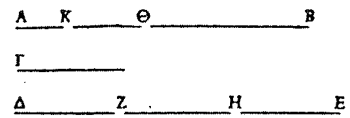
10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appèlera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales ΑΒ, Γ; que ΑΒ soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de ΑΒ une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.



Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que ΑΒ. Qu'il soit multiplié; que ΔΕ soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que ΑΒ. Partageons ΔΕ en parties ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ égales chacune à Γ; retranchons de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande que sa moitié, de ΑΘ une partie ΘΚ plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ soit égal au nombre des divisions de ΔΕ; que le nombre des divisions ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ soit donc égal au nombre des divisions ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Puisque ΔΕ est plus grand que ΑΒ, et qu'on a retranché de ΔΕ une partie ΕΗ plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande que sa moitié, le reste ΗΔ est plus grand que le reste ΘΑ. Et puisque ΗΔ est plus grand que ΘΑ, qu'on a retranché de ΗΔ sa moitié ΗΖ, et que de ΘΑ on a retranché ΘΚ plus grand que sa moitié, le reste ΔΖ sera plus grand que le reste ΑΚ. Mais ΔΖ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que ΑΚ; donc ΑΚ est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur ΑΒ une grandeur ΑΚ plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

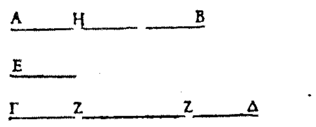
La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs inégales ΑΒ, ΓΔ; que ΑΒ soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E; que AB mesurant ΔZ



laisse ΓZ plus petit que lui; que ΓZ mesurant BH laisse AH plus petit que lui; que l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui soit plus petite que E. Que cela soit fait, et qu'il reste AH plus petit que E (1. 10). Puisque E mesure AB, et que AB mesure ΔZ, E mesurera ΔZ. Mais E mesure ΓΔ tout entier; donc E mesurera le reste ΓZ. Mais ΓZ mesure BH; donc E mesure BH. Mais E mesure AB tout entier; donc E mesurera le reste AH, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les grandeurs AB, ΓΔ; donc les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

PROPOSITION III.

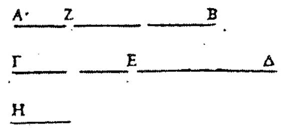
Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant EΔ laisse EΓ plus petit que lui; que EΓ mesurant ZB laisse AZ plus petit que lui, et enfin que AZ mesure ΓE.

Puisque AZ mesure ΓE, et que ΓE mesure ZB, AZ mesurera ZB. Mais AZ se mesure lui-même; donc AZ mesurera AB tout entier. Mais AB mesure ΔE; donc



AZ mesurera ΔE. Mais il mesure ΓE; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc AZ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc AZ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que AZ qui mesurera AB et ΓΔ. Qu'elle soit H. Puisque H mesure AB, et que AB mesure EΔ, H mesurera EΔ. Mais H mesure ΓΔ tout entier; donc H mesurera le reste ΓE. Mais ΓE mesure ZB; donc H mesurera ZB. Mais il mesure AB tout entier; il mesurera donc le reste AZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que AZ ne mesurera pas AB et ΓΔ; donc AZ est la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure AZ des deux grandeurs commensurables données AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

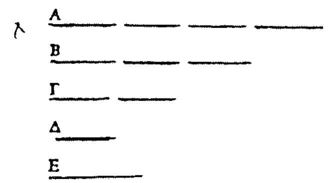
COROLLAIRE.

De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient A, B, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs A, B, Γ.



Prenons la plus grande commune mesure de A et de B (3. 10), et qu'elle soit Δ;

- NOTE 1 -

"TOUT EST NOMBRE"

Le pythagorisme primitif nous est connu grâce aux écrits des néopythagoriciens et à ceux des commentateurs, parfois même assez tardifs. Ce qui rend difficile, la connaissance que nous pouvons avoir de leurs idées, et oblige à beaucoup de prudence. Le personnage de Pythagore, lui-même, prend souvent figure de légende. Mais n'est-ce pas là le problème de toute origine

- Contrairement à leurs prédécesseurs, babyloniens et égyptiens, les pythagoriciens ont étudié les nombres pour eux-mêmes, indépendamment de toute application pratique.
Ils semblent avoir eu les premiers le souci de la démonstration et la recherche de la rigueur et de la rationalité. Mais cette rationalité naissante s'inscrit dans une mystique du nombre.

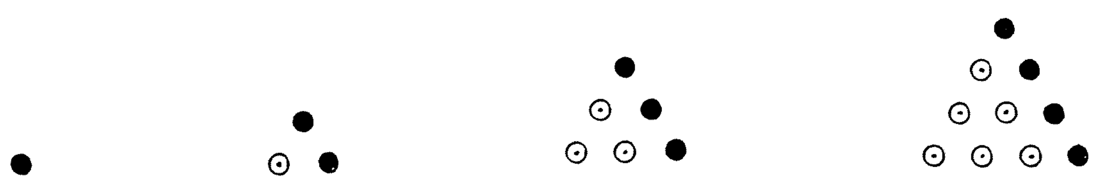
- Il est difficile d'appréhender le niveau d'existence du nombre : lorsqu'on parle de trois pommes, le niveau d'existence du nombre 3 n'est pas le même que celui des pommes. Les choses semblent obéir à certains rapports numériques ; d'où un niveau d'existence surnaturel supposé au nombre : il commande à la nature tout en étant en dehors d'elle.*
L'étude des nombres en eux-mêmes semble provenir de ce que les nombres et leurs propriétés ont été assimilés à une vérité, séparée de la nature, mais la régissant.

A l'époque de Pythagore, la numération n'est pas encore, en Grèce, une numération de position, et la difficulté des notations, a peut être favorisé la recherche d'un mode de figuration des nombres qui se prête à leur étude.
Pour les Pythagoriciens, les nombres sont, par nature, des quantités discrètes, des configurations ou structures de points géométriques.
"Un nombre est un assemblage composé d'unités". (Euclide Eléments, livre VII, définition 2.)

- L'unité ou monade n'est pas un nombre mais la matrice de tous les nombres et les nombres sont des nombres entiers (Cf. le texte de M. Cinus : *L'Idée d'unité chez Gottlob Frege.*)

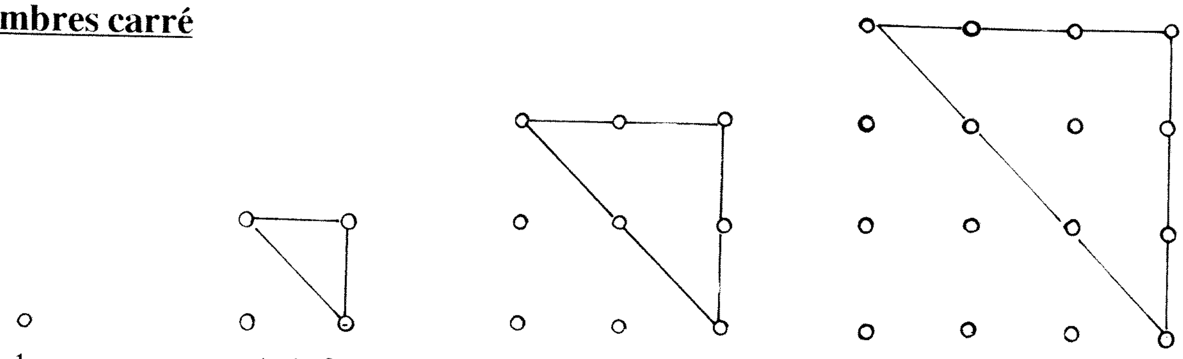
Ces nombres sont classés selon la forme des assemblages correspondants de points, en nombres plans (triangulaires, carrés, pentagonaux) ou en nombres solides (cubiques tétraédriques...)

Les Nombres Triangulaires



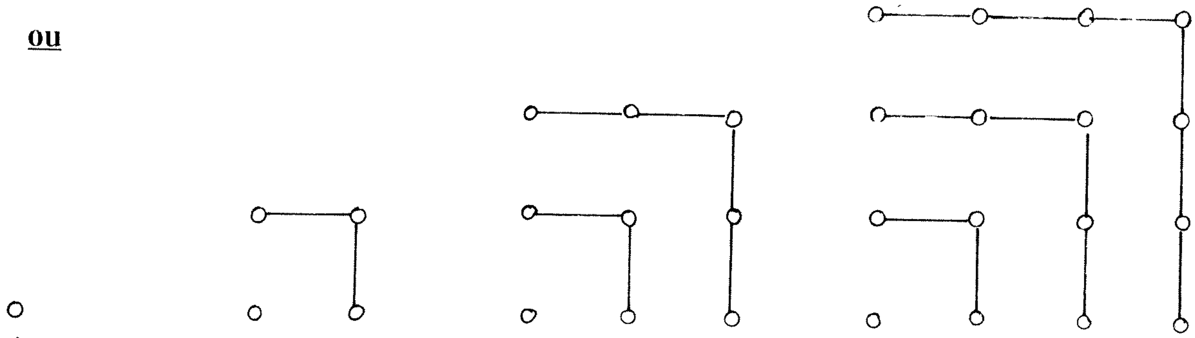
1 - 3=1+2 - 6=1+2+3 - 10=1+2+3+4

Nombres carré



1 4=1+3 9=3+6 16=6+10

ou



1 4=1+3 9=1+3+5 16=1+3+5+7

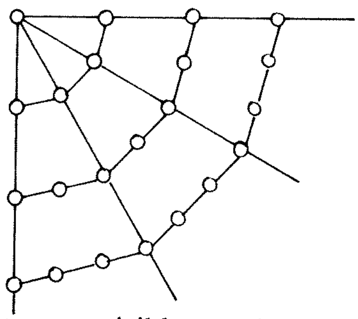
Nombres pentagonaux

1

5 = 1 + 4

12 = 5 + 7

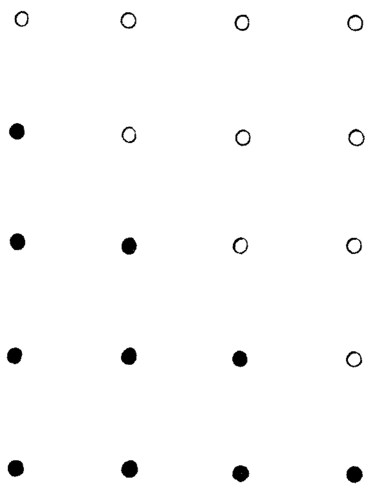
22 = 12 + 10



Les propriétés des nombres sont directement visibles sur les arrangements géométriques qui les figurent et une arithmétique géométrique, visuelle, se développe.
On "voit" par exemple que tout nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs. Et si on considère la deuxième représentation des nombres carrés, on peut écrire, avec nos notations actuelles : $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$

Ou voici une façon de trouver la somme des n premiers entiers naturels :

Le double de cette somme
est le nombre rectangle
de côtés n et n + 1



$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{2(n+1)}{2}$$

"Les nombres sont non seulement des réalités géométriques structurées, mais ils constituent l'être ou la structure de toute chose: conception ontologique du nombre, ou conception mathématique de l'univers [....] On peut aussi bien parler d'une conception mathématique de l'Etre, qui en fait une réalité discontinue, que d'une arithmétique géométrique du nombre qui lui donne une réalité ontologique. L'un n'est que l'envers de l'autre ; ou : tout nombre est un multiple de l'unité et toute grandeur continue, ligne, surface....peut être identifiée à un nombre". [J. GUICHARD]*

Il y a une correspondance de nature entre le nombre et la grandeur, la grandeur est par nature nombrée, structurée par les nombres.

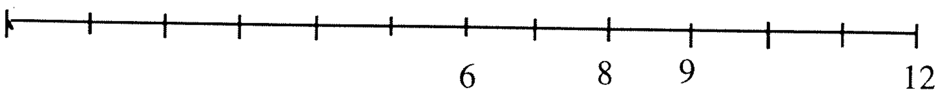
"Toute chose est nombre".
"Tout est nombre", aurait dit Pythagore. Les nombres, leurs rapports, structurent l'univers et en font une totalité harmonieuse.

Les pythagoriciens sont particulièrement connus pour leurs travaux sur les proportions : arithmétique, géométrique, harmonique.

Les deux premières étaient connues des babyloniens et des égyptiens. La troisième baptisée du nom d'harmonique par Hyppasos (VI av. J.C.) et Philolaos (V av. J.C.) est propre aux pythagoriciens à qui on attribue la découverte du fait qu'elle régit les intervalles musicaux.

Les historiens de l'Antiquité rapportent :

"Il tendit une corde sur une règle appelée canon, où il avait marqué 12 divisions.



Alors, il commença à pincer la corde entière et sa moitié comportant 6 unités, il trouva que le ton de la corde entière était symphone de celui de la moitié selon l'octave... Puis il pinça de nouveau la corde entière et en $\frac{2}{3}$ de celle-ci, et trouva que ces deux tons étaient symphones selon la quinte. Finalement il pinça la corde entière et aux trois quarts de celle-ci, et trouva cette fois-ci que les deux tons étaient symphones selon la quarte".
Les sons à l'octave ont des fréquences dans les rapports $\frac{12}{6}=2$,

* J. Guichard : L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques

Les sons à la quinte ont des fréquences dans les rapports $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$,

Les sons à la quarte ont des fréquences dans les rapports $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$,

Ces rapports s'obtiennent en combinant deux des nombres 1, 2, 3, 4, dont la somme produit la " tétraktys " (10) , qui fut un symbole ésotérique de la confrérie pythagoricienne.

$12 - 9 = 9 - 6$: 9 est moyenne arithmétique de 6 et de 12.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{2}{8}$: 8 est moyenne harmonique de 6 et de 12.

"La proximité de la musique et du divin, la découverte des rapports numériques soustendant les combinaisons des sons dans la musique, tout cela devait inévitablement conforter le rapprochement des nombres et du divin, conforter la mystique des nombres" (Pichot) * .

Aristote ** y voit une cause de renforcement de leur doctrine.

"...Comme ils voyaient en outre que des nombres exprimaient les propriétés et les proportions musicales, comme enfin, toutes les autre choses leur paraissaient, dans leur nature toute entière, être formées à la ressemblance des nombres, et que les nombres leur semblaient être les réalités primordiales de l'univers : dans ces conditions, ils considérèrent que les principes des nombres sont les éléments de tous les êtres et que le Ciel tout entier est harmonie et nombre. Et toutes les concordances qu'ils pouvaient relever, dans les nombres et la musique, avec les phénomènes du ciel et ses parties et avec l'ordre de l'univers, ils les réunissaient et ils les faisaient entrer dans leur système, et, si une lacune se révélait quelque part, ils procédaient en hâte aux additions nécessaires pour assurer la complète cohérence de leur théorie. Par exemple, la décade paraissant être un nombre parfait et embrasser toute la nature des nombres, ils disent que les corps célestes en mouvement sont au nombre de dix, mais comme les corps visibles ne sont que neuf, pour ce motif ils en supposent un dixième, l'Antiterre ."

Le nombre est donc une quantité discrète et toute grandeur continue (ligne, surface), peut être identifiable à un nombre, c'est-à-dire au nombre entier d'unités qui la mesure. Par conséquent, les grandeurs sont "par nature" commensurables entre elles, elles ont une unité de mesure commune, comme l'unité est la mesure commune aux nombres.

---

* Pichot : la naisance de la science Tome 2 grèce présocratique

** Aristote : Métaphysique livre A, 5. 985b30 - 986a10

- NOTE 2 -

LA CRISE DES IRRATIONNELS.

Les historiens des sciences situent la découverte des irrationnels au Vème siecle avant J. C. Un des scolies du livre du livre X des Eléments d'Euclide la présente comme un scandale pour la raison.

La légende rapporte qu'Hippasos de Métaponte périt dans un naufrage pour avoir révélé l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Un scoliaste anonyme a commenté ainsi l'histoire : "Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché, que si quelqu' âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entrainée dans la mer du devenir et noyée de l'incessant mouvement de ses courants". (Desanti).

Avec l'irruption des nombres irrationnels, que devient la conception du nombre comme collection d'unités ? Avec l'incommensurabilité liée à l'irrationalité que devient l'affirmation que les nombres et leurs rapports commandent aux choses, alors que ces nombres, entiers ou fractionnaires, ne peuvent même pas rendre compte du rapport existant entre la diagonale et le côté du carré.

Irrationnel est chargé de sens négatif, comme le grec αλογοσ (*alogos*), qu'il traduit formé du a privatif et de logos qui est à la fois la faculté de penser, la raison, le rapport.

Irrationnel est donc l'impensable, le non raisonnable, le non rapportable, ce dont on ne peut rendre compte, l'incalculable.

"Le rapport de la diagonale au côté du carré est un rapport *alogos*, c'est-à-dire si on s'en tient au sens de l'adjectif, impossible à faire, à penser ; en bref, une contradiction dans les termes! Rapport impensable donc, qui met en défaut le logos c'est-à-dire la rationalité, les normes du discours cohérent, qui est le seul discours véritable, et dont le discours mathématique apparait comme le modèle. *Alogos* est ce qui échappe à la raison, ce dont elle ne peut rendre raison ou compte, et qui, par conséquent, ne peut être intégré au discours rationnnel !
Ce qu'on ne peut et /ou, ne doit pas dire, sens dont la légende fait écho ." (J. Guichard)*

---

* J. Guichard L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARISTOTE : Métaphysique - trad. J. Tricot, 2 tomes Vrin 1970

E. BARBIN : Actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques La Rochelle 1988

A. DAHAN DALMEDICO et J. PEIFFER : une histoire des mathématiques Routes et Dédales Point Sciences 1986

J. T. DESANTI : Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels (dans Logique et connaissance scientifique,sous la direction de J. Piaget) Coll. Pleïade ; Paris 1973

J. DHOMBRES A. DAHAN DALMEDICO R. BKOUCHE C. HOUZEL M. GUILLEMOT : Mathématiques au fil des âges. Gauthier Villars 1987

EUCLIDE : Les oeuvres d'Euclide traduites littéralement par F.Peyrard A. Blanchard 1993

J. GUICHARD : l'Infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques 1993

J. ITARD : Les livres arithmétiques d'Euclide (Histoire de la pensée) Ecole pratique des Hautres Etudes Sorbonne

A. PICHOT : La naissance de la science Tome 2 Grèce présocratique Folio Essai 1991

DES CHIFFRES ET DES LETTRES

par Paul-Henri CLAVIER

Il existe entre mesurer, compter et penser un étroit rapport . Le nombre occupe dans notre univers mental une place privilégiée et chacun sait, par ses rêves, qu'il renvoie pour notre subjectivité, à bien plus de choses que la numération d'un concept. L'art nous montre par la perspective et l'harmonie qu'il organise notre perception esthétique, mais n'est-il pas susceptible de revêtir une réalité, d'être lui-même quelque-chose ?

Les quatre premiers nombres cardinaux se déclinent dans les plus anciennes langues indo-européennes. Peut-être désignaient-ils des réalités ou des ordres de réalités différents comme les noms de choses, des catégories de choses ou des genres. Mais rien ne certifie qu'il y ait toujours eu dans l'esprit de ceux qui nous précédèrent, un rapport quelconque, une mesure possible entre ces ordres de réalités que représentaient les nombres : entre l'ordre de réalité "2" et l'ordre de réalité "4" par exemple. On pourrait imaginer un monde mental où les nombres cardinaux seraient des noms propres, c'est à dire des êtres individués ; additionner deux à deux aurait alors aussi peu de sens que d'ajouter Paul à Paul. Mais pourquoi, à partir de cinq, les nombres perdaient-ils cette particularité d'être déclinables, les apparentant au nom de choses ? Au-delà de quatre, entrait-on dans un univers qualitativement différent, comme nos 36 chandelles qui ne sauraient sans altération radicale devenir 37 ? C'est dire qu'on ne pense pas de la même façon dans un monde mental où les nombres sont des réalités ou renvoient à des réalités , et dans un monde mental où ils renvoient à des opérations applicables à ces réalités. Or, un monde mental, c'est une culture, et penser c'est calculer.

La pensée et le langage sont structurés par le compte et la mesure. C'est un même mot qui en Latin exprime la pensée et le calcul, le verbe "reor".Le participe de "reor" nous donne "ratus", d'où provient le substantif "ratio-onis". "Ratio" signifie d'abord le compte, par suite, matière de comptes, affaire, puis faculté de calculer, jugement et raison, méthode de raisonnement. Le mot français raison a "ratio" comme éthymon (Cf. article de A. Cuzin). Du sens de calculer, nous avons gardé l'expression de nombre rationnel ou irrationnel, c'est à dire calculable ou incalculable, mais aussi pensable ou impensable, exprimable ou inexprimable. Le terme de Proportion, le maître mot de l'harmonie et de la perspective , provient du même éthymon : "ratio" par une suite de transformations depuis un supposé "+ propo-ratione" signifiant d'abord : suivant son compte.

En grec, c'est un même verbe qui signifie à la fois réunir, dire, compter, et raisonner, penser : le verbe "lego". Beaucoup de noms de sciences ont un suffixe -logie : la biologie, la psychologie ... la biologie désigne la science de la vie ou du vivant : bio- ; la psychologie, la science de l'esprit ou de l'âme : psycho-psyché. Le suffixe logie désigne donc la science en général. Il provient du même verbe "lego". La logique a la même origine. C'est au départ un adjectif rattaché aux mots signifiant connaissance ou raisonnement. Aristote l'emploie pour qualifier le syllogisme qui est une forme de raisonnement. Logique est alors synonyme de dialectique, mot qui lui encore se rattache au verbe "lego". La logique en est venue à représenter la science et la pensée rigoureuse, le terme s'est spécialisé et on l'emploie pour désigner toute forme de raisonnement concluant. L'emploi de l'adjectif dans l'expression : "c'est logique" ne signifie pas autre chose sinon que nous avons un jugement qui résulte de propositions antécédentes. Le mot <u>logique</u> a donc éclipsé celui de dialectique restreint au champ de la seule philosophie ; en effet, <u>logique</u>, avant de qualifier tout mode de raisonnement concluant, ne voulait dire qu'éloquent et ne se rapportait qu'à l'art du bien parler, la rhétorique. Voisinage dangereux car les rhéteurs antiques comme nos modernes politiciens, utilisaient des raisonnements qui n'étaient concluants qu'en apparence, donc très peu logiques au sens moderne du terme.

Le modèle de ce genre de raisonnement faussement concluant était et reste le raisonnement par amalgame, conclure du particulier au général comme : a) - certains étrangers sont malhonnêtes, b - certains Arabes sont des étrangers, c) - tous les Arabes sont malhonnêtes. La logique devient aussi la science de la pensée concluante par un véritable calcul sur des propositions. Les difficultés qu'elle rencontre proviennent de l'équivoque des mots qui empêche de manier ceux-ci comme des nombres supposés univoques, mais est-ce si sûr ? (Cf article de M. Cinus). Les logiciens depuis Boole, ont profondément modifié le calcul de propositions pour tenter d'en écarter les querelles de mots.

Ainsi, mesurer et calculer sont les premières manifestations de la pensée organisée. Aux confins de la pure affectivité, par la comparaison, la réunion de l'observation du divers se structure par la pensée comme calcul de la raison, indissociable de la parole.

Calculs, mots et lettres, entretiennent un rapport d'origine. Les premiers témoignages d'écriture à Suse, au pied du plateau Persique, à proximité de la Mésopotamie, sont des calculs, des comptes arithmétiques. Les archéologues ont en effet découvert à Suse des bulles décorées à l'aide de sceaux et contenant des calculis, c'est à dire de petites pièces d'argile bâtonnets, pastilles, billes, petits cônes et grands cônes percés. Ces bulles remontaient aux environs de 3300 ans avant Jésus Christ, elles constituaient des formes d'actes de vente.Les calculi représentaient des nombres figurant des quantités, le sceau sur la bulle était celui du marchand clairement identifié comme négociant en blé ou en telle autre marchandise. Les calculi indiquant une quantité, le sceau du marchand suffisait à identifier la nature de la marchandise sans que celle-ci soit elle-même représentée. Plus tard, les quantités ont été figurées par des traits et des ronds sur une tablette. Ce sont les premiers témoignages d'écriture que nous connaissions. Il semble donc que la première forme d'écriture ait été à Suse une représentation numérique et non pas un système de transcription d'une langue orale dans son ensemble. Dans l'histoire de Suse, ce n'est que plus tard que les commercants éprouvèrent le besoin d'inscrire derrière les signes de quantité, des signes représentant la nature des marchandises, les pictogrammes, dont l'évolution aboutira, en Mésopotamie, à l'écriture cunéiforme, et à Suse, à l'écriture protoélamite.

Compter, mesurer, penser, sont indissociables, l'histoire des langues indo-européennes et celle de l'écriture en témoignent. Ce sont, semble-t-il, les nécessités des échanges commerciaux qui font apparaître les premiers signes de transcriptions de nombres vers 3300 ans avant Jésus Christ. Les bulles décorées de Suse ne connaissent que deux formes de signes : la représentation d'une quantité numérique, la représentation d'une personne par son sceau. Le besoin de quantifier aurait alors précédé celui de qualifier, puisque l'apparition de pictogrammes représentant la nature des projets échangés après les signes numériques, est postérieure de plusieurs décennies aux premières bulles décorées.

L'IDÉE D'UNITÉ CHEZ GOTTLOB FREGE (1848-1925)

par Michel CINUS

La notion d'unité n'est pas évidente. En effet, que pense-t-on lorsque l'on dit "c'est une chose" ou "ceci fait trois mètres" ? Il est une expérience commune de faire du mot "**un**" un terme qui renvoie à une qualité donnée aux objets. Quand on dit "une chose" cela revient en effet à dire "cette chose est une", et le terme "un" représenterait l'attribution d'une qualité spéciale à la chose désignée. Mais, quelle est cette qualité ? A quel type de réalité correspond ou renvoie le terme "un" ? Peut-on avoir une idée claire de la notion de nombre si celle d'unité ne l'est pas ? Le texte suivant sur l'idée d'unité chez Gottlob Frege propose une réflexion sur ces questions.

I - Les *Fondements de l'aritméthique*[1], une préparation philisophique à une construction logique des mathématiques.

Dans les *Fondements* les problèmes philosophiques provoqués par la nature et l'existence des objets mathématiques sont discutés. L'objectif principal de cet ouvrage très critique et synthétique est de rendre possible la construction du nombre cardinal en le débarrassant de ses préjugés empiristes et psychologiques : les mathématiques ne contiennent pas d'éléments empiriques et la justification logique des mathématiques n'a pas besoin de données d'ordre psychologique. Ces objections visent essentiellement les idées de John Stuart Mill (1806-1873) et de Benno Erdmann (1851-1921).

G. Frege combat également l'intuitionnisme mathématique d'Emmanuel Kant (1724-1804) : la justification logique de la réalité mathématique n'a pas besoin d'une construction intuitive ou subjective des êtres mathématiques.

Dans une première partie de ses *Fondements* , G. Frege examine d'abord les définitions historiques reçues de l'idée de nombre ainsi que des opérations arithmétiques élémentaires. Les thèses d'auteurs importants comme Euclide, Kant, Hankel, Leibniz, Mill, Baumann, Lipschitz, Jevons, Cantor, Schröder, Locke, Berkeley, Köpp, Hume, Hesse, et d'autres sont alors exposées, discutées et réfutées comme thèses empiristes, psychologistes ou intuitionnistes.

Après cette enquête, G. Frege présente l'exposé sommaire, en langage courant, d'un programme de construction du nombre cardinal[2], en partant uniquement de notions et de principes purement logiques[3].

Les *Fondements* se présentent sous la forme d'un petit livre composé de cinq parties divisées en cent neuf sous-parties.

Les opinions sur l'unité et le un sont examinées dans la troisième partie de l'ouvrage. Mais dès l'introduction de l'ouvrage, le problème de l'unité est tout de suite placé sur un registre philosophique. Avant de faire de l'arithmétique, il convient de réfléchir sur le concept d'unité et de nombre.

Selon Gottlob Frege (1848-1925), l'idée du nombre est toujours présupposée comme allant de soi, mais jamais définie[4].

Dans les *Éléments* Euclide dit "*une unité est ce qui par la vertu de laquelle chaque chose existante est appelée une. Un nombre est une multitude composé d'unités*". Selon G. Frege, le terme "*unité*" (5) tel qu'il est défini par Euclide recouvre tantôt l'une tantôt l'autre de ces trois réalités :

- Un objet qui est compté,
- La propriété d'un objet qui est compté,
- Le nombre un.

Mais, comment se satisfaire d'un sens composé d'autant de significations ? Comment fonder une arithmétique sur une notion aussi ambiguë ?

La place nous manque ici pour rendre compte exhaustivement de toute la série d'opinions examinées par G. Frege. Afin d'illustrer le style des discussions que l'on peut trouver dans les *Fondements* à propos de l'idée d'unité, nous commenterons uniquement certaines des remarques faites à partir de la thèse d'Ernst Schröder.

Schröder affirme ceci : *"Chaque chose qui est numérotée est appelée unité"*

Schröder dit que les unités sont des choses. Mais pour G.Frege, en appelant les choses unités, implicitement, nous ajoutons un élément descriptif sur les choses. D'une certaine manière, nous faisons de l'ombre avec les mots sur les choses.

Frege dénonce cet emploi de la notion d'unité comme trop influencé par la grammaire. C'est-à-dire que le nombre un est employé comme un qualifiant, un attribut, une propriété grammaticale spéciale qui par sa juxtaposition aux choses donnerait une unicité réelle aux choses. Les choses seraient ainsi saisies dans leur devenir pour être fixées dans une sorte de permanence métaphysique. Le nombre un serait considéré par Schröder comme un signe pour décrire une propriété réelle de la chose. Ainsi, l'emploi du terme un dans l'expression une ville et dans l'expression un homme sage serait le même, car l'unité est conçu comme un objet universel surajouté à notre description des choses, et caractérisé par le qualificatif un.

Aux paragraphes 21 à 25 de ses *Fondements* G. Frege avait défendu la thèse que le nombre n'est pas une propriété réelle des choses, et G. Frege ne peut pas admettre l'opinion de Schröder qu'il juge emprunte d'ontologisme et embarrassée d'un contenu trop empirique.

Que recouvre alors le terme pour G. Frege ?

Avant de donner sa solution à ce problème (dans les sous-parties 45 à 54), l'auteur des *Fondements* résume d'abord l'ensemble des conclusions tirées de son enquête critique. Nous ne donnerons ici que quelques unes d'entre elles :

- Le nombre n'est pas une propriété des choses. Ce n'est pas une qualité. Ce n'est pas une chose réelle.

- Le nombre n'est pas une chose physique. Ce n'est pas non plus une idée au sens où l'entendent les idéalistes. Ce n'est pas une abstraction réelle qui existerait d'une manière autonome à la pensée.

- Les termes *pluralité, multitude, ensemble, collection* ne sont pas convenables, car trop intuitifs, pour définir la notion de nombre.

- si nous disons que les choses qui sont comptées sont des unités, alors l'assertion que les unités sont égales entre elles est fausse.

II - Avant la construction, la critique.

Le souci de revenir sur les idées qui forment le fondement originel même de l'arithmétique, contraint Frege à débuter l'examen des diverses opinions sur la nature de l'unité en commençant avec la définition donnée par Euclide au début du Livre VII de ses *Éléments* .

Dans les *Éléments* Euclide dit "*une unité est ce qui par la vertu de laquelle chaque chose existante est appelée une. Un nombre est une multitude composé d'unités*". Selon G. Frege, le terme unité[5], tel qu'il est défini par Euclide recouvre tantôt l'une, tantôt l'autre, de ces trois réalités :

- un objet qui est compté ;
- la propriété d'un objet qui est compté ;
- le nombre un.

Mais comment se satisfaire d'un sens composé d'autant de significations ? Comment fonder uen arithmétique sur une notion aussi ambigüe ?

La place nous manque ici pour rendre compte exhaustivement de toute la série d'opinions examinées par G. Frege. Afin d'illustrer le style des discussions que l'on peut trouver dans les Fondements à propos de l'idée d'unité, nous commenterons uniquement certaines des remarques faites à partir de la thèse d'Ernst Schröder.

Schröder affirme ceci : *"Chaque chose qui est numérotée est appelée unité"*

Schröder dit que les unités sont des choses. Mais pour G.Frege, en appelant les choses unités, implicitement, nous ajoutons un élément descriptif sur les choses. D'une certaine manière, nous faisons de l'ombre avec les mots sur les choses.

Frege dénonce cet emploi de la notion d'unité comme trop influencé par la grammaire. C'est-à-dire que le nombre *un* est employé comme un qualifiant, un attribut, une propriété grammaticale spéciale qui par sa juxtaposition aux choses donnerait une unicité réelle aux choses. Les choses seraient ainsi saisies dans leur devenir pour être fixées dans une sorte de permanence métaphysique. Le nombre *un* serait considéré par Schröder comme un signe pour décrire une propriété réelle de la chose. Ainsi, l'emploi du terme *un* dans l'expression *une* ville et dans l'expression *un* homme sage serait le même, car l'unité est conçue comme un objet universel surajouté à notre description des choses, et caractérisé par le qualificatif *un.*

Aux paragraphes 21 à 25 de ses *Fondements* G. Frege avait défendu la thèse que le nombre n'est pas une propriété réelle des choses, et G. Frege ne peut pas admettre l'opinion de Schröder qu'il juge emprunte d'ontologisme et embarrassée d'un contenu trop empirique.

Que recouvre alors le terme *un* pour G. Frege ?

Avant de donner sa solution à ce problème (dans les sous-parties 45 à 54), l'auteur des *Fondements* résume d'abord l'ensemble des conclusions tirées de son enquête critique. Nous ne donnerons ici que quelques unes d'entre elles :

- le nombre n'est pas une propriété des choses. Ce n'est pas une qualité. Ce n'est pas une chose réelle ;

- le nombre n'est pas une chose physique. Ce n'est pas non plus une idée au sens où l'entendent les idéalistes. Ce n'est pas une abstraction réelle qui existerait d'une manière autonome à la pensée ;

- les termes *pluralité, multitude, ensemble, collection* ne sont pas convenables, car trop intuitifs, pour définir la notion de nombre ;

- si nous disons que les choses qui sont comptées sont des unités, alors l'assertion que les unités sont égales entre elles est fausse.

III - La réponse de Frege. Quelques éléments de construction formelle[6]

1. Terminologie

Avant d'aborder la formalisation proprement dite, il convient d'introduire certaines notions logiques.

Parmi les idées les plus fondamentales et novatrices de G. Frege, on trouve la dsitinction entre symbole complet et symbole incomplet et la distinction entre sens et dénotation[7].

Un symbole complet est une expression par laquelle un objet déterminé est désigné. Les expressions *"la racine de deux,"* *"l'auteur du songe d'une nuit d'été"*, sont des symboles complets[8].
Un symbole incomplet est une expression qui contient une variable libre. Autrement dit, un symbole incomplet ne désigne pas un objet d'une manière déterminée. Les expressions *"La racine de x"*, *"le père N.N."*, sont des symboles incomplets.
La dénotation exprime l'objet désigné par un symbole complet ou par un symbole incompletdont on a attribué un objet comme valeur à la variable libre. Les expressions *"2+2"* et *"4"* sont deux symboles complets différents mais dont l'objet dénoté est le même[9].

Une distinction soigneuse doit cependant être faiteentre dénotation et sens, car deux symboles ayant une même dénotation ne sont pas toujours interchangeables. Par exemple, les deux expressions *"étoile du matin"* et *"étoile du soir"* recouvrent le même objet et ont donc une même dénotation.
Mais le sens assigné à ces deux symboles est différent [10 - 11].

Par sens, il faut entendre la manière dont l'objet désigné est donné. Soient par exemple les symboles complets "a" et "b". Admettons par exemple que le proposition "a =b " est vraie. Dans ce cas, la proposition "a = a", ne diffère pas de "a = b " et on peut dire que les symboles "a" et "b" dénotent la même chose. Ces symboles ne diffèrent que par leur forme et non par ce qu'ils désignent. Ils diffèrent l'un de l'autre en tant qu'objets et non en tant que signes[12]. La différence des signes correspond à une différence dans la manière dont l'objet désigné est donné. La manière dont l'objet est donné est appelé sens du signe par G. Frege[13].

Les symboles incomplets sont des signes qui désignent des représentations de fonctions. Ce sont des noms de fonctions. Les symboles incomplets sont des noms pour ce qui dénote par l'intermédiaire d'un objet substitué à une variable libre.

Soit un symbole P(x). P désigne un concept (par exemple le concept "est le père de Platon"). La variable x exprime une place pour un objet qui tombe sous le concept P. Si le symboleP(x) dénote le Vrai, alors la variable x prend la valeur p qui tombe sous le concept P ; c'est à dire que l'objet p substitué à x est un objet qui dénote effectivement le père de Platon[14 et 15].

2. Formalisation

Toute l'axiomatisation de G. Frege se fonde sur un principe très simple selon lequel observer le fait que deux classes d'objets contiennent le même nombre d'objets revient à dire que les concepts dont ces classes constituent la compréhension sont équinumériques. De là s'enchaînent les remarques et conclusions suivantes :

(A) L'expression "l'objet p tombe sous le concept P" peut être représentée par le symbole "P(p)".

Le symbole "R(p,q)" représente un concept déterminant une relation entre deux objets. On peut exprimer ce concept par l'expression :"l'objet p a la relation R à l'objet q".

L'expression "l'objet p est identique à l'objet q" peut se représenter par le symbole "p = q". Là, p et q sont deux symboles complets différents mais qui ont une même dénotation. Ce sont deux noms qui désignent le même objet. Notons que l'identité n'est qu'une relation particulière. Cette relation est représentée par le symbole "=" [16]

(B) La relation R établit une correspondance biunivoque entre les objets qui tombent sous le concept F et ceux qui tombent sous le contexte G[17].

(C) Si le concept F est équinumérique au concept G, alors il faut et il suffit qu'une relation R existe et qu'elle établisse une correspondance biunivoque entre des objets qui tombent sous le concept G. Si c'est le cas, le concept F et le concept G appartiennent à la même classe d'équivalence.

(D) Le nombre du concept F sera le concept "équinumérique à F" [18]

(E) Si n est un nombre, alors il faut et il suffit qu'existe un concept F tel que n soit le nombre du concept F.

(F) Si le concept F est égal au nombre du concept G, alors il faut et il suffit que le concept F soit équinumérique au concept G.

(G) Le symbole "O" représente le nombre du concept "non identique à soi". Cela désigne le concept sans objet puisqu'il n'y a aucun objet qui ne puisse être identique à soi. Par conséquent, aucun objet ne tombe sous ce concept[19].

(H) Si n est un nombre successeur de m , alors il faut et suffit qu'un concept F et un objet x existent et et que (1) x tombe sous le concept F, (2) n soit le nombre du concept F, (3) m soit le nombre du concept *"tombe sous F n'est pas identique à x"*.

(I) Le symbole "1" représente le nombre du concept "identique à soi"[20].

IV. Conclusion

Ces pages nous ont permis d'exposer comment G. Frege concevait l'idée d'unité.

Il ressort que l'idée d'unité est inséparable d'une conception générale de la pensée et du monde en général. La démarche de G. Frege n'est pas neutre et particippe à une certaine métaphysique. Nous pouvons dire que son oeuvre logique et mathématique est platonisante. Le symbole "1" représente l'unité intrinsèque des choses de notre monde. C'est l'être des choses que nous désignons lorsque nous disons d'elles qu'elles sont unes.

Finalement, peut-on envisager une utilisation autre que spéculative à la conception frégéenne de l'unité ? Peut-on compter ou mesurer avec le *"un"* de G. Frege ?

La question revient à se demander à quelle action de la pensée correspond le fait de mesurer. Mesurer, c'est chercher le nombre d'un concept dont l'objet assigné comme dénotation a été choisi comme base d'un acte de comparaison. Un acte de comparaison revient à chercher une classe d'équivalence entre deux types de réalité.

Quand nous choisissons une unité de mesure, nous désignons un certain objet (plus ou moins abstrait) comme dénotation d'un concept dont nous cherchons le nombre. Dire *"cela mesure trois mètres"* est le symbole que nous utilisons pour dire qu'une certaine réalité qui est devant nous est comme le concept *" est mètre"* avec un cardinal 3. C'est à dire que l'objet que nous prenons comme unité est un objet qui tombe sous le concept "être mètre et que 3 est le nombre du concept qui a l'objet choisi pour établir notre mesure comme dénotation. Le sens de la phrase *"cela mesure trois mètres"* est ce qui, dans notre pensée, s'identifie avec cette phrase.

Evidemment, G. Frege ne nous donne pas une méthode plus performante pour mieux mesurer. Cela, c'est à la théorie mathématique de la mesure de l'établir. G. Frege essaie seulement de comprendre à quoi et comment nous pensons, lorsque nous disons des phrases comme *"cela mesure trois mètres"*.

La construction axiomatique de G. Frege avait comme projet de donner un fondement logique rigoureux aux mathématiques. Même si G. Frege a réussi à construire l'ensemble des nombres naturels, son projet n'a globalement pas résisté aux graves problèmes posés par des contradictions internes découvertes au début du siècle dans la théorie générale de la logique[21].

Les travaux de G. Frege forment cependant une oeuvre historiquement fondamentale au développement de la logique du XXe siècle, et sont à l'origine d'un renouvellement profond de la problématique de la logique mathématique, de la philosophie du langage, de la linguistique et de la théorie générale de la sémantique. En Grande-Bretagne, par exemple, G. Frege est encore très étudié et des publications importantes récentes lui sont consacrées [22].

BIBLIOGRAPHIE et ouvrages cités :

- R. Blanché, *la Logique et son histoire, d'Aristote à RusselL*, A. Colin, 1970.
- Louis Couturat l'*Algèbre de la logique*, Ed. Albert Blanchard, Paris, 1980.
- S. B. Diagne, *Boole. L'oiseau de nuit en plein jour*, Belin, 1989.
- Michaël Dummet, *Frege's Philosophy of language*, London, 1973 et *Frege et other Philosophers*, London, 1991.
- G. Frege, *les fondements de l'arithmétique*, traduction et introduction de Claude Imbert, le Seuil, Paris, 1969.
- G. Frege, *Ecrits logiques et philosophiques*, traduction et introduction de Claude Imbert, le Seuil, Paris, 1971.
- G. Frege, *The Basic Laws of arithmetic. Exposition of the System*, Berkeley, 1964.
- G. Frege, *The Foundations of arithmetic*, traduction anglaise par J. L. Austin, Oxford, 1959.
- Guillaume d'Ockam, *Somme de Logique*, traduction de Joël Biard, TER, Mauvezin, 1988.
- Claude Imbert, *Phénoménologie et langues formulaires*, PUF, Paris, 1992.

1 G. Frege, *Les Fondements de l'arithmétique*, traduction et introduction de Claude Imbert, le Seuil, Paris, 1969.

2 Le programme esquissé dans les *Fondements* sera finalement matérialisé, après 15 années de tests et d'élaborations, par deux tomes des lois fondamentales de l'aritmétique, exposées et déduites dans le système de l'idéographie. L'écriture de ces deux tomes s'étendra de 1893 à 1903. la découverte par B. Russell du paradoxe de la dénotation, et la mort, empêcheront l'auteur de terminer le troisième et dernier tome.

3 La démarche de G. Frege est sensiblement différente de celle de G. Boole (1815-1864) de l'école de Cambridge et de celle de'Ernst Schröder (1841-1902) qui voulaient seulement formaliser la logique. Ces recherches logiques aboutiront, essentiellement grâce aux développements effectués par E. Schröder, à une grandiose "Algèbre de la Logique". Le lecteur pourra avoir un aperçu abrégé de cette Algèbre en consultant le livre de Louis Couturat, l'*Algèbre de la Logique*, Ed. Albert Blanchard, Paris, 1980.

4 "*N'est-ce pas cependant un scandale que notre science* (c'est à dire les Mathématiques)*soit si vague à propos du tout premier parmi ses objets, alors qu'il semble si simple ? Il y a peu d'espoir d'être capable de dire ce qu'est un nombre. Si un concept fondamental pose des difficultés à une grande science, alors il est certainement impératif d'enquêter soigneusement sur ce concept jusqu'à ce que ces difficultés soient levées ; particulièrement, nous réussirons difficilement dans l'éclaircissement définitif des nombres négatifs fractionnaires ou complexes, aussi longtemps que notre connaissance intime de la fondation de la structure complète de l'arithmétique restera défectueuse*", G. Frege, The foundations of arithmetic, traduction anglaise par J.L. Austin, Oxford, 1959, page II^{e}, second paragraphe. La traduction donnée ici est de nous.

5 Unité(Einheit dans l'allemand de Gottlob Frege) est la traduction du mot grec $\mu o \nu \alpha \zeta$.

6 Tout ce qui va être dit dans les pages suivantes est directement inspiré de *Lois fondamentales de l'arithmétique, exposées et déduites dans le système de l'idéographie.*

7 La distinction entre sens et dénotation aura une pérénnité qui ira bien au-delà de la logique appliquée aux Mathématiques. Cette découverte de G. Frege donnera un nouvel élan aux recherches sémantiques appliquées à la linguistique et à la philosophie du langage et des suppositions implicites du langage courant.

8 Le terme symbole est utilisé par G. Frege en un sens beaucoup plus large que le sens courant. Par symbole, il faut entendre toute expression qui désigne quelquechose. Le symbole est fondamentalement un nom.

9 Ceux-ci sont deux noms différents pour un même objet.

10 Cette distinction est peut-être encore plus claire avec les deux symboles suivants : "2+2" et "2x2". Pour avoir une approche plus exhaustive de l'importante mais délicate distinction entre sens et dénotation, le lecteur trouvera un article écrit en 1892 par G. Frege et traduit en Français par Claude Imbert, Edition du Seuil, 1971, pp 102-126.

11 La démarche analytique et grammaticale de l'auteur des *Fondements* n'est pas sans rappeler celle des médiévaux. Avec des accents propres aux logiciens médiévaux, G. Frege se demande si la pensée n'est pas un langage et il essaie de comprendre à quelle réalité renvoeint les termes que nous utilisons pour décrire ce à quoi nous pensons. Les logiciens nominalistes du XIVe siècle partaient du principe qu'il existe une grammaire mentale et que la pensée est un langage dont les termes écrits et parlés ne sont qu'une traduction arbitraire. A ce sujet on pourra lire les premiers chapitres de la Somme de Logique de Guillaume d'Ockham (**1285-1349**). Cet ouvrage a été traduit et commenté par Joël Biard en 1988 dans les éditions T.E.R. Le chapitre 39 de la première partie de la *Somme de logique* de Guillaume d'Ockham est consacré au terme "*un*". Nous remarquerons que la réflexion logique est étroitement liée à la sémantique et à la grammaire.

12 Les logiciens du XIIIe et XIVe siècle avaient déjà inventé toute une terminologie pour rendre compte des différentes manières dont les termes d'une proposition signifient. Par exemple, pour dire qu'un terme diffère d'un autre terme en tant qu'objet, les logiciens des Universités des XIIIe et XIVe siècle analysaient celà en supposition matérielle. La supposition matérielle est le fait de considérer un terme dans sa matière et non en fonction de sa portée référentielle. Par exemple, si on dit "Homme est un mot de cinq lettres", alors en supposition matérielle, cette proposition est vraie. Mais en supposition personnelle, elle est fausse, car la supposition personnelle est le

mode de désignation de l'individu réel (aucun homme individuel réel, par exemple Socrate, n'est un mot de cinq lettres !). La supposition personnelle représente un mode de désignation différent. Le contenu de ce que représente chaque mode de désignation est ce que G. Frege appelle sens du signe.

13 Dans son article sens et dénotation, pour illustrer celà , G. Frege donne un exemple géométrique. Nous reproduisons textuellement cet exemple : *"soient a,b,c, les droites joignant les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés. Le point d'intersection de a et de b est le même que le point d'intersection de b et de c. Nous avons diverses désignations pour le même point et ces noms ("point d'intersection de a et ", point d'intersection de b et c") indiquent en même temps la manière dont ce point est donné. Par la suite, la proposition contient une connaissance effective"*.(page 103 de la traduction de Claude Imbert).

14 Une remarque très importante doit être faite : la dénotation de la variable n'est pas du même ordre que la dénotation de la fonction. La variable dénote un objet (des choses concrètes, des noms, des nombres, d'autres fonctions ...), tandis que la fonction dénote une valeur de vérité (le Vrai ou le Faux). Autrement dit, les concepts sont des valeurs de vérité.

15 Les relations sont des fonctions de vérité de deux variables au moins. Elles sont représentées par des symboles à deux variables libres et plus. Le symbole P(x,y) est un nom pour une relation binaire, le symbole P(x,y,z) pour une relation terniaire ...

16 Le symbole "p = q" pourrait aussi se noter "=(p,q)".

17 Les objets p représentent les dénotations du concept F, et les objets q les dénotations du concept G.

18 Ce qui veut dire que le nombre d'un concept est un nom de nom.

19 Ce nombre désigne ce qu'il est convenu d'appeler maintenant "la classe vide". "Pégase" est par exemple un objet dénoté par la classe vide. Le redoutable problème de la nature et de l'existence d'une telle classe, a provoqué d'intenses débats dans le monde de la logique. L'enjeu de la signification à donner à la dénotation des êtres inexistants est fondamental. La description de la classe vide est un véritable test d'évaluation de la consistance et de la portée de la sémantique des systèmes formels. Exposons un tel problème. La présupposition d'existence peut logiquement être exprimée ainsi : une proposition A présuppose une proposition A' si la vérité de A' est une précondition de la vérité ou de la fausseté de A. Autrement dit, la vérité de la proposition "tous les A sont B" présuppose la vérité de la proposition "quelques A sont B". Par exemple, la proposition "Tous les enfants de Pierre sont endormis" présuppose que les enfants de Pierre existent. La présupposition d'existence est une inférence tenue classiquement pour valide par la tradition aristotélicienne. Ainsi, le carré logique d'Aristote rend compte du fait logique que la proposition affirmative est universelle (*"tout homme est mortel"*). Et la proposition négative particulière (*"quelqu'homme n'est pas mortel"*) est subalterne à la proposition négative universelle ("aucun homme n'est mortel"). Ces schémas d'inférence semblent décrire des raisonnements qui vont de soi. Pourtant, une autre interprétation de la proposition peut permettre aussi de montrer qu'il est impossible d'inférer une particulière à partir d'une universelle : lorsque nous admettons comme possible l'inférence d'une particulière à partir d'une universelle, nous supposons aussi que a classe vide n'existe pas. Mais, si la classe vide est supposée existante, alors la présupposition d'existence n'est plus une loi générale. Nous ferons également remarquer que les mathématiciens-philosophes de l'Ecole de Cambridge (Cf. note 2 au-dessus) ont fait une critique radicale du carré logique aristotélicien. Ils ont ainsi pu substituer une Nouvelle Analytique à l'ancienne (Cf. de Souleymane Bachir Diagne, Boole, L'oiseau de nuit en plein jour, Belin, 1989). Cette substitution a permis de grandes découvertes en logique. Elle aboutit notamment à une discussion sur les principes de la logique et des mathématiques qui donnera lieu à la fondation par le philosophe et mathématicien américain C.S. Peirce (1839-1914), puis par G. Frege, à une théorie satisfaisante de la quantification (introduction des symboles $\forall$ et $\exists$).
Enfin, on peut discuter pour savoir si le symbole 0 peut représenter ou non la contradiction logique.

20 Le signe "1" désigne ce qui tombe sous le concept d'une manière déterminée. "1" désigne l'être en propre de chaque individu compris sous le concept. Mais c'est encore plus que celà, car "1" désigne aussi l'individu hors contexte et indivis. Ce signe a une puissance logique fondamentale, puiqu'il désigne ainsi la séparation des objets qui tombent sous le concept. Si les objets qui tombent sous le concept n'avaient pas l'unité, les noms désigneraient les choses d'une manière confuse et indiscernable. L'unité permet d'isoler de l'extension du concept un objet d'une manière isolée et indivisible.

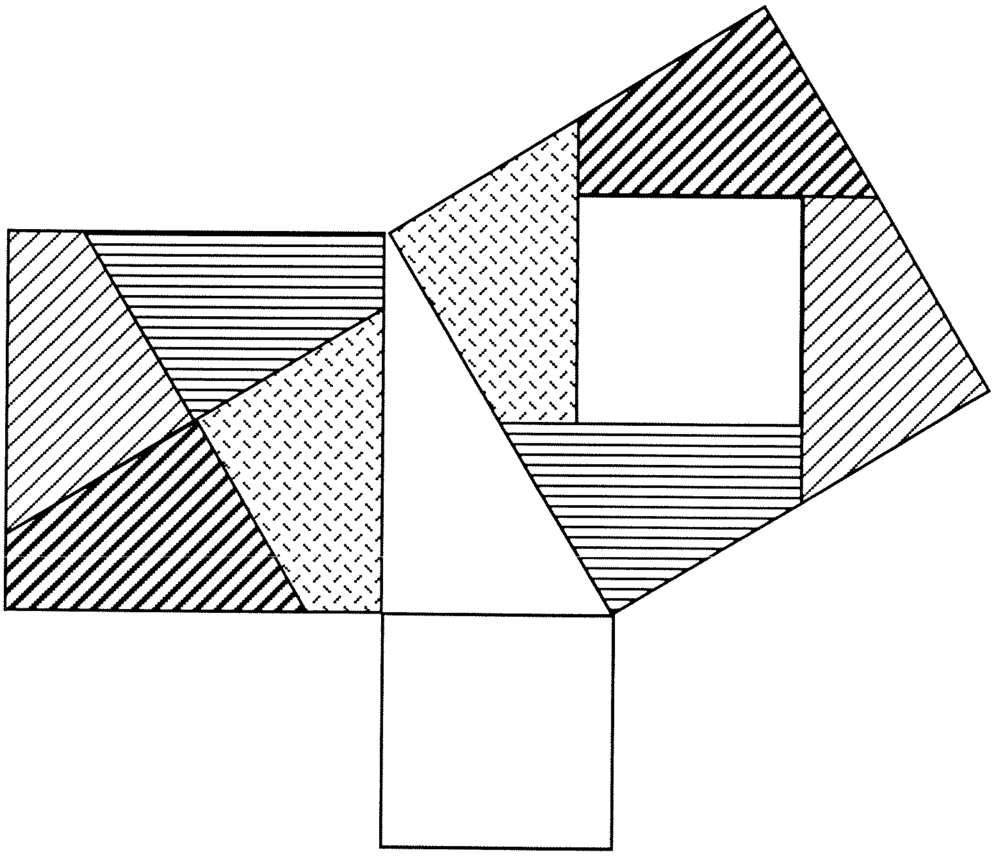
Mais ce *"un"* frégéen n'est pas sans neutralité métaphysique. Il suppose que dans le monde, des objets stables et immuables existent. Ces objets ont une identité, c'est à dire qu'ils ont un être propre et existent (le symbole "1" désigne l'être de la chose dénotée) sans être confondus les uns avec les autres. Les noms peuvent être utilisés de manière confuse, mais les objets en soi ne sont pas modifiés par les noms. Ainsi, selon G. Frege, quand je dis, *"c'est une armée"* ou *"ce sont trois régiments"*, ou bien encore *"ce sont dix mille hommes"*, je désigne bien la même réalité empirique. Mais cette réalité, je la délimite différemment. Bien entendu, le fait de désigner une réalité n'a aucun effet sur cette réalité? En délimitant une réalité, je ne la modifie en rien. Autrement dit, les nombres n'ont aucun effet sur les choses. Seule la terminologie change. Par cette modification de terminologie, j'indique seulement une substitution de concept. Pour le dire autrement, le contenu de l'affirmation d'un nombre est une assertion à propos d'un concept. Compter, c'est faire référence à des objets, indépendamment de notre façon de considérer ces objets, d'où peut-être le désagréable sentiment d'abstraction que ressent souvent le sens commun face aux nombres... faire une assertion à propos d'un concept, c'est déterminer son extension. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'asserter n'est pas un synonyme d'affirmer. En effet, affirmer s'oppose à nier, mais asserter s'oppose à considérer un contenu propositionnel (notons pour être précis, qu'une proposition désigne le contenu de signification d'une phrase) sans l'affirmer, ni le nier.
Le nombre n'est que l'extension d'un concept. le nombre du concept est le cardinal de l'extension du concept. Soit le concept *"Lune de Jupiter"*. IL y a quatre objets qui tombent sous ce concept : la Lune I, la Lune II, la Lune III et la Lune IV. Chacun de ces objets a en soi l'unité, et le cardinal du concept *"Lune de Jupiter"* est quatre.

21 A ce sujet, le lecteur peut consulter le livre de R. Blanché, *la logique et son histoire*, d'Aristote à Russell, A. Colin, 1970.

22 Michaël Dummet, *Frege's Philosophy of language*, London, 1973 et *Frege and other philosophers*, London, 1991.

LES AIRES
OUTIL HEURISTIQUE - OUTIL DÉMONSTRATIF

par Jean-Pierre FRIEDELMEYER



Dans un article récent intitulé *"Un apprentissage des aires en sixième."* M.A. Egret mettait en évidence le rôle heuristique des figures, expliquant que :

> *"L'ambiguïté du statut des figures pèse lourdement sur les premiers apprentissages de la géométrie. Elle enferme souvent l'enseignement dans un dilemme : ou l'on s'en tient à l'évidence visuelle (c'est souvent le cas en primaire) et on reste en-deça des traitements mathématiques, ou on se réfère en priorité aux traitements mathématiques (à partir du collège, bien souvent) et on perd l'apport intuitif et heuristique des figures."*

Nous voudrions dans les pages qui suivent prolonger et développer ce thème, au delà de la sixième, et montrer combien le thème des aires est un outil performant et irremplaçable tant dans l'apprentissage de la démonstration géométrique, que pour une compréhension claire de ce qui dans un problème relève du géométrique, et de ce qui relève du numérique. La tendance est aujourd'hui au *"tout calcul"* (qu'il soit numérique ou algébrique), au point de considérer qu'il n'y a pas de démonstration **rigoureuse** sans une traduction numérique et un recours au calcul du moins tant que les élèves ne disposent pas de l'outil des vecteurs et des transformations. D'où deux conséquences négatives importantes :

1) un éventail restreint de configurations géométriques pour les élèves, tant que le champ des nombres disponibles et l'outil algébrique ne sont pas suffisamment développés. C'est ainsi qu'on ne pourra guère parler du théorème de Pythagore avant l'introduction des radicaux, si l'on traite ce théorème sous sa forme numérique (relation entre les mesures des côtés).

2) un apprentissage retardé de l'étude des configurations, qui fait que beaucoup d'élèves perdent l'habitude acquise en primaire d'observer les figures géométriques, et sont incapables quelques années plus tard de faire une démonstration géométrique, ou de résoudre un problème de géométrie. Rappelons les résultats d'une enquête auprès d'élèves de collège, déjà évoquée par M.A. Egret et montrant *"une régression en géométrie, liée à une perte de spontanéité pour exploiter les possibilités offertes par une figure"*. Voici trois groupes d'activités qui peuvent introduire à des méthodes purement géométriques (il n'y a jamais de calcul, jamais de formules) et qui à notre avis, peuvent aider les élèves de collège à s'entraîner à la démonstration :

I. Les principes de la démonstration euclidienne.
II. La multicongruence des polygones.
III. La quadrature des polygones.

I Les principes de la démonstration euclidienne.

Problème Soit à démontrer l'égalité des aires de deux parallélogrammes ayant une base commune AB et les autres bases CD et EF sur une même parallèle à AB (Figure 1).

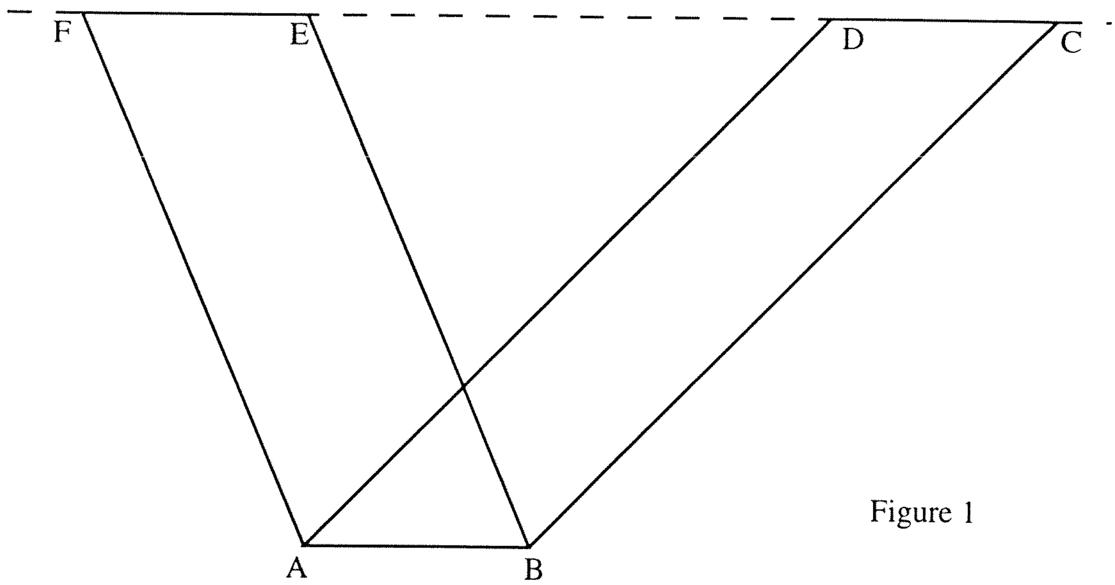


Figure 1

Facile, dira l'élève : les deux parallélogrammes ont même base et même hauteur. L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur. Donc ABCD et ABEF ont même aire. Mais d'où sait-il que l'aire du parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur? Au pire c'est une formule qu'il aura apprise par cœur. Au mieux un professeur la lui aura démontrée par la figure suivante ramenant le problème à celui de l'aire du rectangle DHKC : (Figure 2)

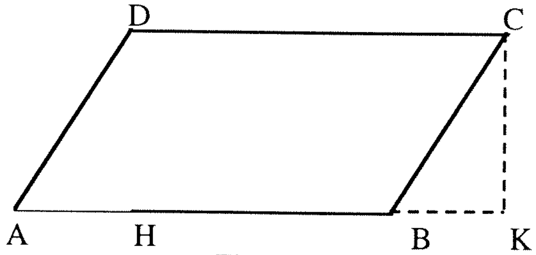


Figure 2

Sans insister sur le fait que la formule donnant l'aire d'un rectangle n'est pas du tout simple à démontrer (songez au cas où ses côtés sont incommensurables), comment démontrera-t-on la formule de l'aire d'un parallélogramme dans le cas où H ne tombe pas entre A et B? (Figure 3).

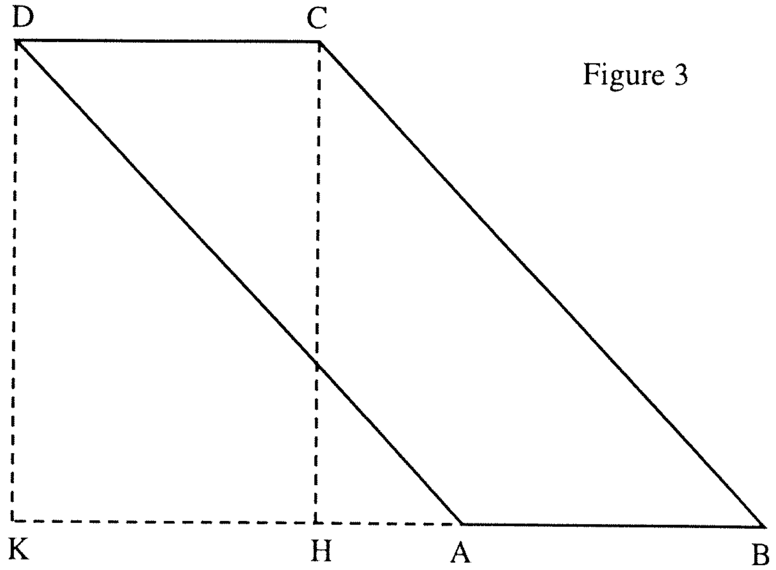


Figure 3

Voici une première démonstration de la propriété énoncée à l'occasion du Problème I. C'est celle d'Euclide qui développe tout au long du Livre I des *"Éléments"* des méthodes de démonstrations basées sur l'égalité d'aires, sans aucun recours au numérique. Une autre démonstration est basée sur la notion de **multicongruence** qui théorise le principe du découpage et de la superposition et que nous étudierons plus loin.

La démonstration d'Euclide.

Elle est basée sur ce que l'on appelait autrefois le *"Premier cas d'égalité des triangles"* :

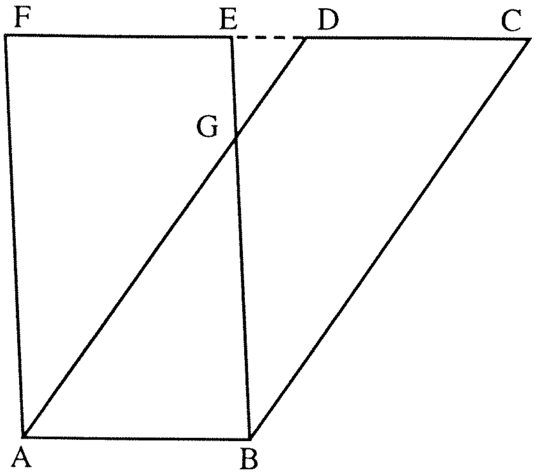
"Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux." (Proposition I_4 chez Euclide).

Cette proposition qu'Euclide déduit de l'axiome de superposition *"Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles"*, donne alors la clef de la démonstration. Soit G le point d'intersection de (BE) et (AD). Ce point G existe toujours, car sinon les parallélogrammes ABCD et ABEF seraient confondus. Mais il peut être entre A et D (Figure 4) ou à l'extérieur du segment [AD] (Figure 5).

Activité 1[1] :
Démontrer l'égalité[2] des parallélogrammes ABCD et ABEF dans chacun des cas de Figure 4 et 5.

[1] Il s'agit de la proposition I_{35} des *"Eléments"* d'Euclide, I signifiant Livre I, 35 désignant le numéro de la proposition. Nous adopterons ce système de référence dans la suite.
[2] égalité en aire.

Figure 4



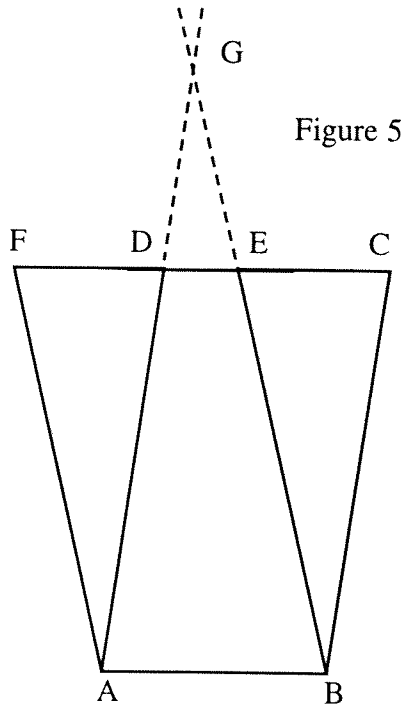


Figure 5

Plaçons nous d'abord dans le cas où G est entre A et D (Figure 4). Alors AF=BE ; AD=BC et $D\hat{A}F=C\hat{B}E$. Donc les triangles DAF et CBE sont égaux (proposition I_4). Ajoutons à chacun de ces triangles le triangle ABG et retranchons leur le triangle DGE. Nous en déduisons l'égalité des parallélogrammes ABCD et ABEF. Le lecteur adaptera facilement cette démonstration au cas de la figure 5.

On nous dira que ceci n'est pas une véritable démonstration rigoureuse, car elle repose sur un élément sensoriel, la figure, ce que le calcul permet d'éviter. Nous croyons qu'il y a là un malentendu sur les caractères d'une démonstration, et sur ce qu'il faut entendre par démonstration rigoureuse. Euclide a été pendant vingt siècles la référence absolue pour la rigueur en géométrie. Celle-ci réside dans l'articulation logique des affirmations successives la vérité de chacune s'appuyant de façon indubitable sur la vérité des précédentes, jusqu'aux axiomes, définitions et postulats. Les arguments visuels n'interviennent vraiment qu'au niveau des axiomes ou des postulats qui eux peuvent effectivement être contestés et remplacés par d'autres (c'est ce qui est fait dans les géométrie non euclidiennes). Voici sept axiomes pris parmi les 9 que contient le Livre I des *"Éléments"* énoncés par Euclide, et qui sous-tendent la démonstration précédente, ou les propositions qui suivent ultérieurement :

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

Donnons encore la proposition I_{34} :

"Les côtés et les angles opposés des aires[3] parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales."

Les propositions suivantes pourront alors se démontrer aisément à partir de ce qui précède. Nous vous les proposons sous forme d'activité.

Activité 2 : Démontrer chacune des propositions suivantes :

I_{36} : Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux (Figure 6).

indication : utiliser le parallélogramme intermédiaire ABGH.

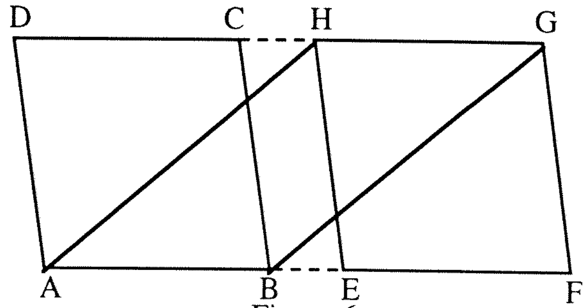


Figure 6

I_{37} Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux (Figure 7).

indication : prolonger CD de part et d'autre de C et D d'une même longueur égale à CD et considérer les parallélogrammes de base AB ainsi construits.

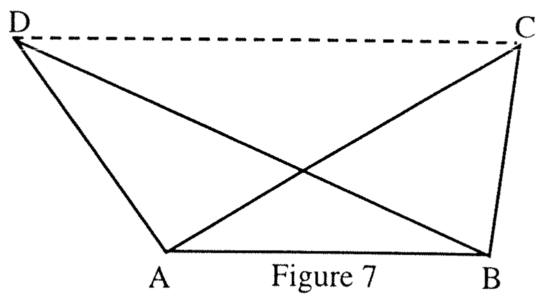


Figure 7

Remarque : Cette propriété a une traduction importante pour le produit vectoriel : Pour tout point D tel que (CD) soit parallèle à (AB) on a l'égalité $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

I_{38} Des triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

indication : utiliser une construction semblable à celle proposée pour I_{37}.

I_{39} Les triangles égaux construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles (Figure 7).

indication : faire un raisonnement par l'absurde.

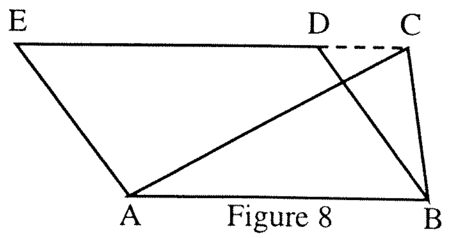


Figure 8

I_{40} Les triangles égaux construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

indication : faire un raisonnement par l'absurde.

---

[3] Le mot *"aire"* ne désigne pas ici une mesure mais l'étendue intérieure d'une figure à deux dimensions susceptible d'être évaluée, le mot *"surface"* étant réservé à la limite d'un solide!

I_{41} Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle (Figure 8).

<u>indication</u> : utiliser le triangle ABD.

L'ensemble de ces propositions et axiomes permet alors la démonstration suivante du théorème de Pythagore qui conclut le Livre I d'Euclide (Proposition I_{47}) et dont il me parait difficile de contester tant la logique et la rigueur, que la clarté.

Activité 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, et ABDE, ACFG, BCHI les carrés construits (à l'extérieur) sur les côtés du triangle ABC (Figure 9). Démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale au carré construit sur l'hypoténuse.

Voici les grandes lignes de la démonstration :

1) Les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{ABI}$ sont égaux (Axiome 2).

2) Les triangles DBC et ABI sont égaux (Proposition I_4).

3) Le carré ABDE est le double du triangle DBC et le rectangle BJKI est le double du triangle ABI (Proposition I_{41}).

4) Donc le carré ABDE est égal au rectangle BJKI (Axiome 6).

5) De même le carré ACFG est égal au rectangle CJKH. Donc la somme des carrés ABDE et ACGF est égale au carré BCHI.

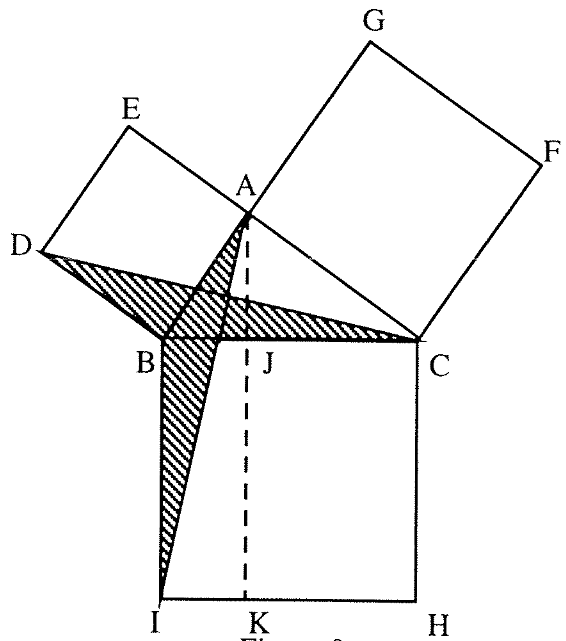


Figure 9

Cette logique impeccable n'est évidemment pas la seule possible. A l'autre bout du monde, en Chine, un mathématicien du nom de Liu Hui donne cette autre démonstration du théorème de Pythagore, dans un livre intitulé *"Neuf livres sur l'art du calcul"* (≈ 260 ap. J.C.). La démonstration de Liu Hui repose sur l'idée simple suivante : pour démontrer que deux figures ont des aires égales, il suffit de montrer qu'elles peuvent être décomposées en les mêmes morceaux, deux à deux superposables (Figure 10). Construisons sur les côtés du triangle ABC les carrés ACHI extérieurement et le carré BCFG intérieurement. Prenons sur HI le point E tel que (AE) soit perpendiculaire à (AB). Alors les triangles ABC et AEI sont égaux (triangles rectangles ayant un côté égal : AI=AC et un angle autre que l'angle droit égal : $\widehat{CAB}=\widehat{EAI}$). Et donc AE=AB. Complétons alors le carré BAED en construisant (ED) perpendiculaire à (EA) et (BD) perpendiculaire à (AB). Ainsi le carré ABDE est la réunion des polygones numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 qui recomposés autrement donnent le polygone AFGBHI réunion des carrés ACHI et FCBG. La démonstration repose donc sur celle de l'égalité respective des triangles AFL et EHK ; LGB et KJD ; BJD et AEI qui se déduit elle même de l'égalité de deux triangles rectangles ayant un côté égal et un angle (non droit) égal. Cette méthode est basée sur l'idée de **multicongruence**. Expliquons la.

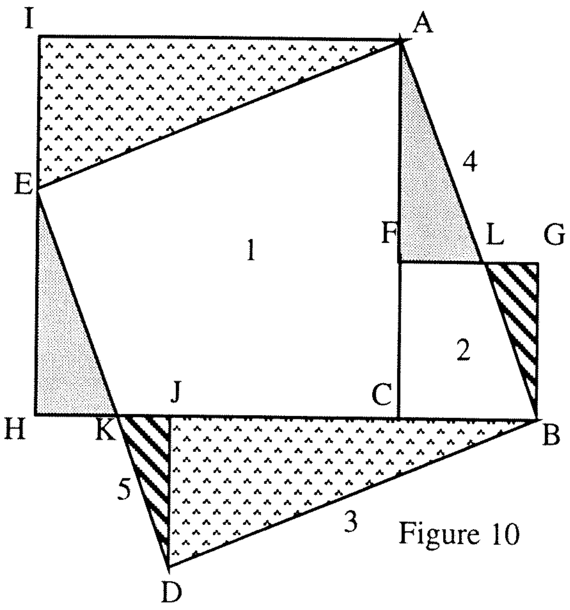


Figure 10

II La multicongruence des polygones.

Pour éviter l'ambiguïté du mot *"égal"* que nous avons utilisé principalement (avec Euclide) dans le sens *"égal en aire"*, appelons **congruentes** deux figures qui sont superposables. Ainsi dans la proposition d'Euclide I_4 nous devions parler de triangles congruents plutôt que de triangles égaux. C'est ce que nous ferons dorénavant. Nous dirons alors que deux polygones P et Π (comme par exemple le carré ABDE et le polygone AFGBHI de la figure 10) sont **multicongruents** si l'on peut décomposer P en un nombre fini de polygones $p_1, p_2, ..., p_n$ disjoints[4] et Π en le même nombre n fini de polygones $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ disjoints tels que pour tout indice i le polygone p_i est congruent (superposable) au polygone π_i. Par exemple l'hexagone ABCDEF et le carré MNPQ de la figure 11 sont multicongruents.

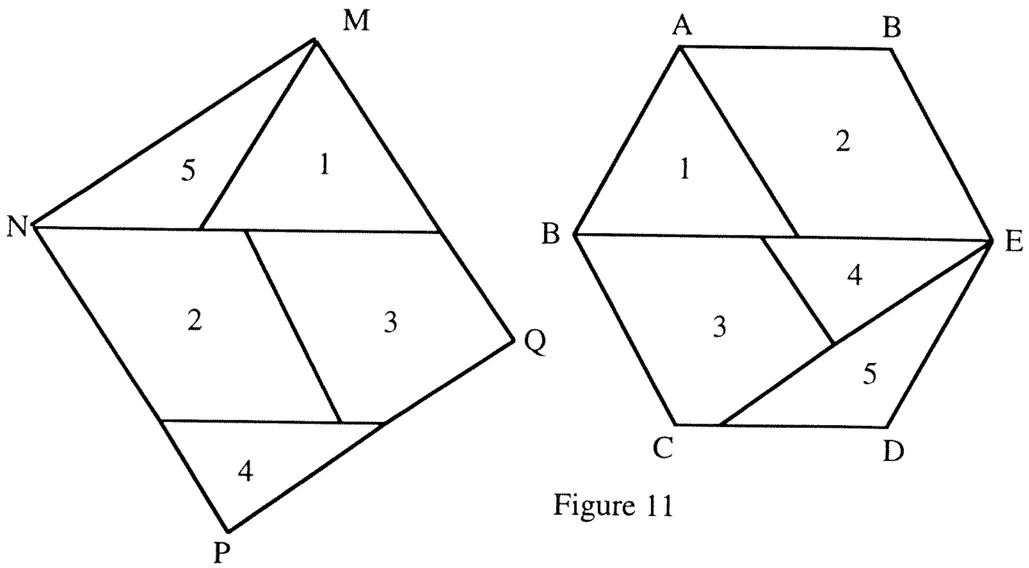


Figure 11

[4] (On entend par polygones disjoints des polygones n'ayant aucune surface commune, bien que les bords puissent être communs.)

Activité 4 :

Démontrer l'égalité (en aire) de deux parallélogrammes ABCD et ABEF ayant une base AB commune et les deux autres, CD et FE sur une même parallèle (cf problème I - figure 1), en utilisant la méthode de multicongruence.

Le résultat est immédiat dans le cas où l'intersection de (AD) et (BE) se fait à l'extérieur du segment [AD] (figure 5). Dans l'autre cas la figure 12 donne la décomposition, dont le lecteur trouvera la justification.

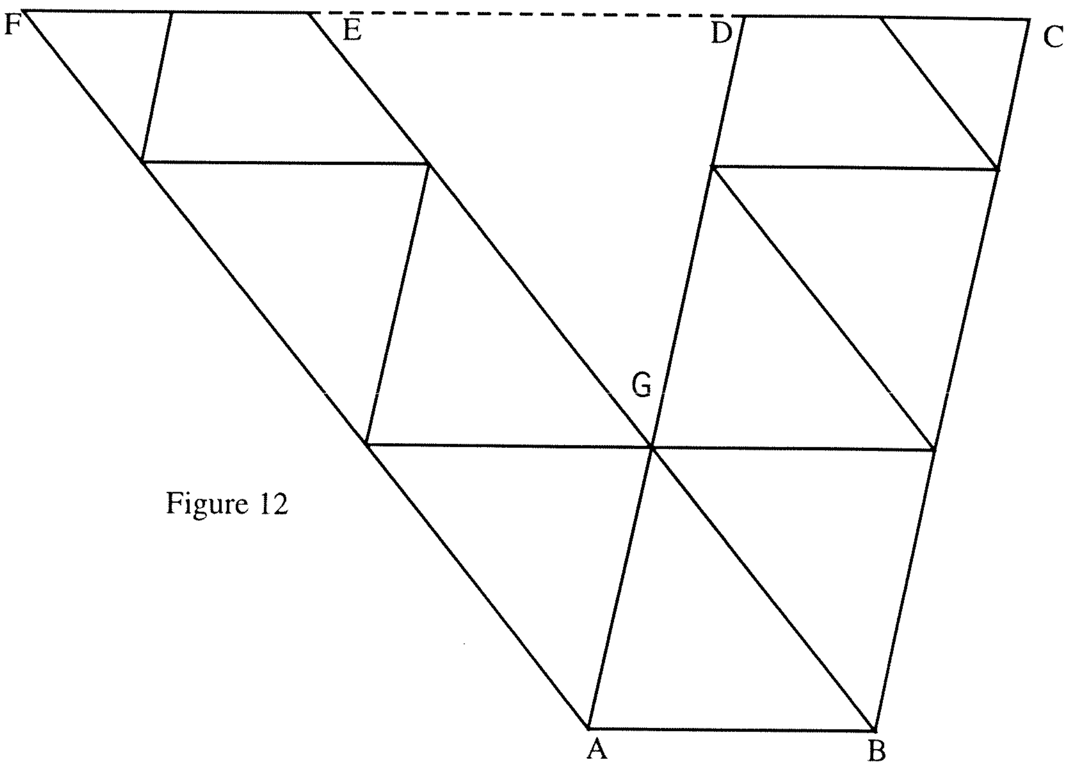


Figure 12

Activité 5 :

Démontrer qu'un triangle quelconque ABC a même aire que le rectangle BCDE où (DE) coupe [AB] et [AC] en leurs milieux, en utilisant la méthode de multicongruence. Deux cas peuvent se présenter, selon que la hauteur issue de A se projette entre B et C, ou à l'extérieur de [BC] (Figure 13 et 14)

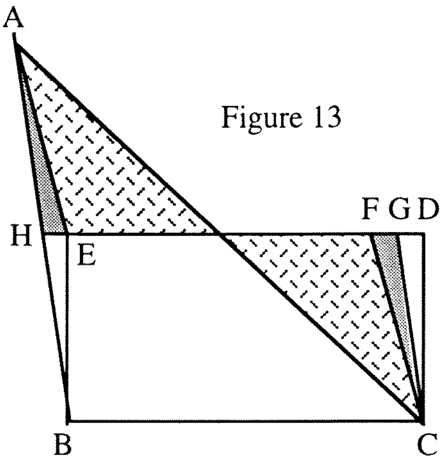


Figure 13

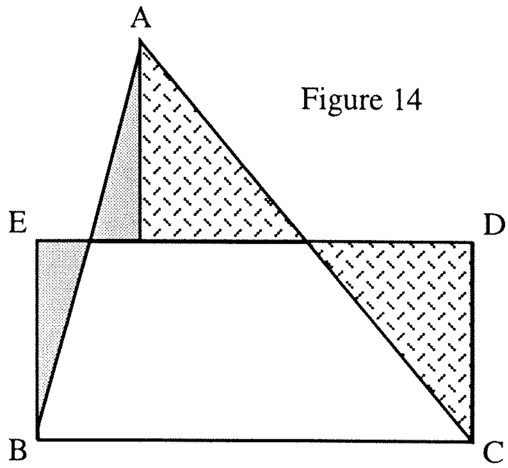


Figure 14

Activité 6 :

Démontrer la multicongruence de deux triangles ABC et DBC de même aire, ayant une base commune BC et A et D de part et d'autre de (BC) de façon que AD coupe le segment [BC] (Figure 15).

Il suffit de mener des parallèles aux côtés par le point E intersection de (BC) et (AD).

(EF) // (CD) et (EH) // (AB)
(EG) // (BD) et (EI) // (AC)

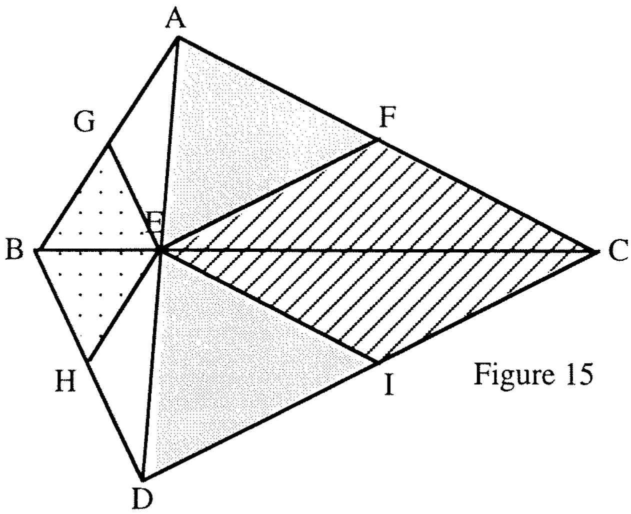


Figure 15

Mais le problème est nettement plus difficile, si (AD) ne coupe pas le segment [BC] et nous ne nous y engagerons pas. D'une façon générale, on aura perçu le lieu de cette problématique avec celle des constructions de Tangran, illustrée par exemple par la figure 11. Nous donnerons en annexe, à la fin, les moyens de construire les 5 morceaux qui constituent ce Tangran là.

Ainsi on a là un moyen simple de démontrer l'égalité en aire de certains polygones : il suffit de mettre en évidence une multicongruence : deux polygones multicongruents ont forcément même aire puisqu'ils sont réunion disjointe des mêmes morceaux. Mais la réciproque est-elle également vraie, à savoir : deux polygones de même aire sont ils toujours multicongruents? On trouvera en annexe   une méthode d'équidécomposition de deux triangles qui ont même base et dont les sommets se trouvent sur une même parallèle à la base. Deux mathématiciens ont démontré de façon indépendante au début des années 1830 que cette réciproque était bien exacte : F.Bolyai et P.Gerwien. Ce n'est pas le lieu ici de développer leurs méthodes. Mais elles posent le problème suivant : comment mettre en évidence l'égalité en aire de deux polygones? Il y a bien sûr la méthode qui consiste à mesurer l'aire de chaque polygone au moyen de formules, ce qui n'est pas toujours très simple si le polygone a une forme tant soit peu élaborée et qui, rappelons le, met presque toujours en jeu des nombres irrationnels. Il existe une autre méthode purement géométrique, élaborée également par Euclide dans les livres I et II des *"Éléments"* et qui est la **quadrature**.

III La quadrature des polygones.

Le mot *"quadrature"* est l'un des rares mots du vocabulaire mathématiques à être passé dans le langage courant, par l'intermédiaire de l'expression *"quadrature de cercle"* pour désigner un problème impossible à résoudre. Mais à l'origine, la **quadrature** d'une surface désignait la construction géométrique, à la règle et au compas, d'un carré égal en aire à cette surface. Réaliser la quadrature du cercle consiste donc à construire un carré de même aire qu'un cercle donné, à la règle et au compas (Figure 16).

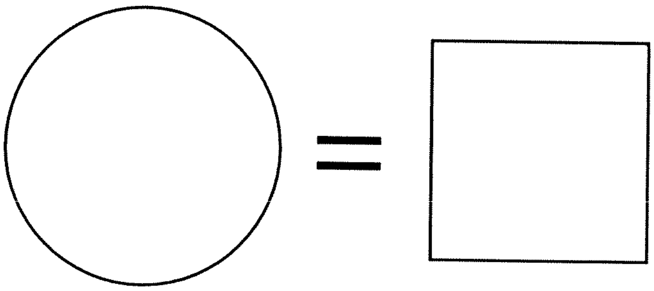


Figure 16

On utilisait aussi autrefois le mot *"quarrer"* une surface, du latin *"quadrare"* : rendre carré.

Dans ses *"Éléments"*, Euclide nous apprend à *"quarrer"* n'importe quel polygone convexe ou non, comme par exemple celui de la figure 17.

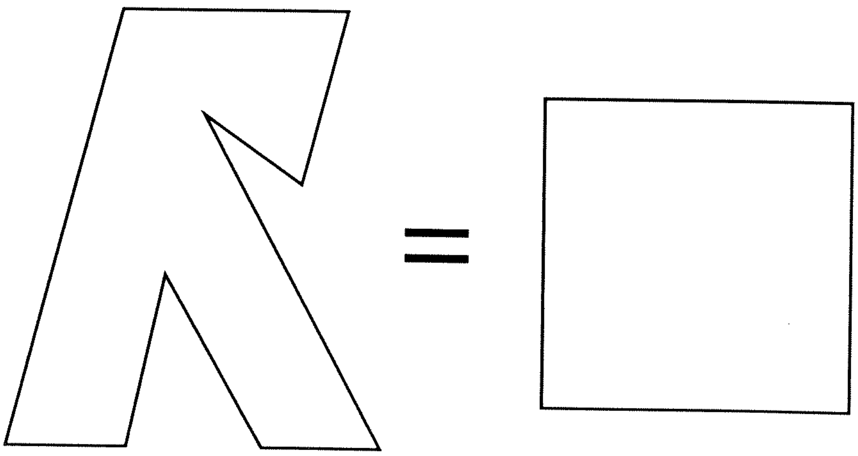


Figure 17

La quadrature permet ainsi de comparer deux polygones quelconques par la comparaison des carrés qui réalisent leur quadrature. En ce sens, la quadrature représente l'étape préliminaire à la mesure des aires au moyen d'un carré étalon pris comme unité.

Pour réaliser la quadrature d'une figure polygonale il suffit de suivre trois étapes que nous noterons construction C_1, C_2, C_3:

Construction C_1 : décomposer le polygone en triangles, puis les triangles en rectangles par la construction c_1 (Figure 18) ou c'_1 (Figure 19) (cf. Activité 5).

Figure 18

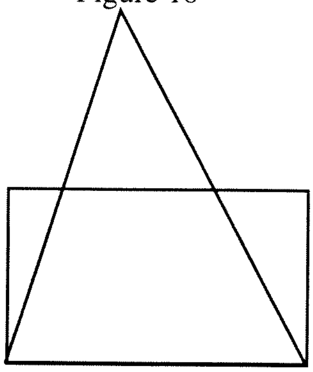
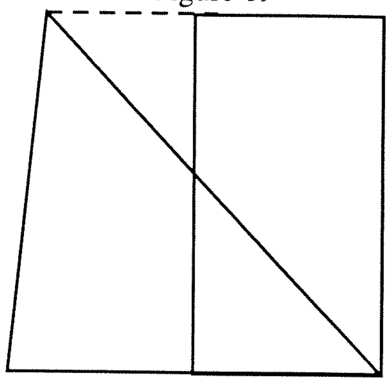


Figure 19



Construction C_2 : Par la construction c_2 (Figure 20), transformer chacun des rectangles ainsi obtenu en un rectangle ayant un côté fixé, le même pour tous, de façon à pouvoir les accoler pour réaliser un seul rectangle. Le rectangle ABCD de côtés a×b est égale au rectangle CEFG de côté imposé c, le second, x étant construit en prenant l'intersection de la diagonale (KC) avec (AB). On démontrera facilement que les rectangles ABCD et CEFG ont même aire. Ce résultat correspond à un résultat plus général qui fait l'objet de la proposition I_{43} des *"Éléments"* d'Euclide (Figure 21). Voici cette proposition I_{43} :

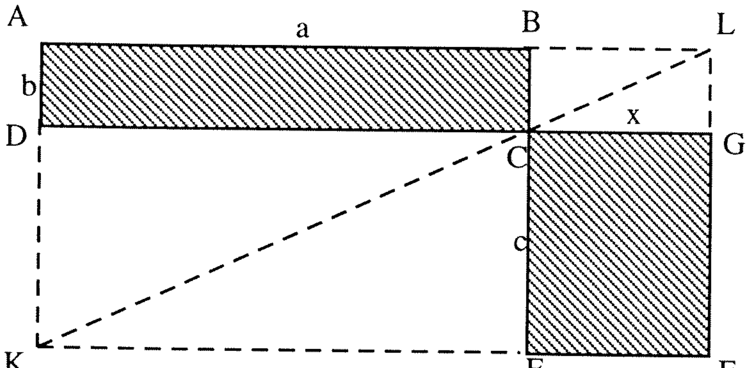


Figure 20

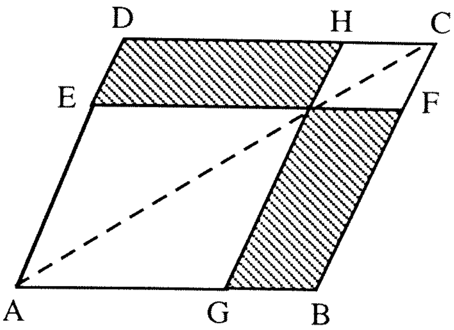


Figure 21

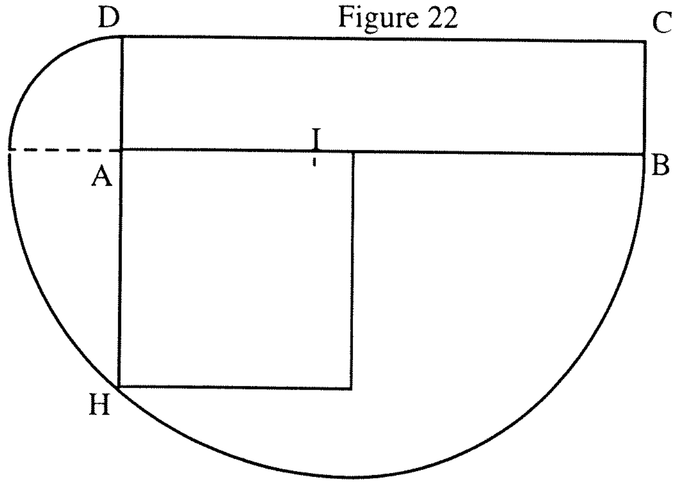
"Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux"

Soit ABCD un parallélogramme, (EF) et (GH) deux parallèles aux côtés, se coupant sur une diagonale en I. Alors les parallélogrammes BFIG et HDEI ont la même aire. Ce sont ces parallélogrammes qu'Euclide nomme *"compléments"* (Il suffit de considérer les deux triangles ABC et ACD auxquels on retranche chaque fois deux triangles respectivement égaux).

Activité 7 : Quadrature d'un rectangle = Transformation d'un rectangle en carré.

Construction C_3 Nous disposons donc maintenant d'un seul rectangle que nous allons transformer en carré par la construction c_3 suivante (Figure 22).

Figure 22



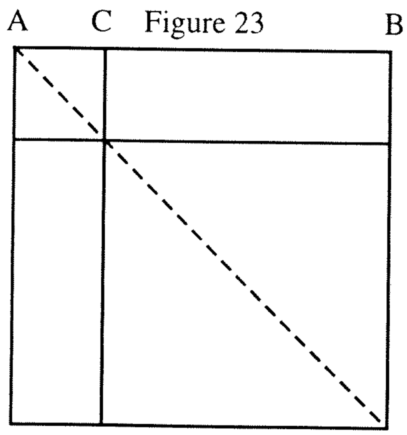
Soit ABCD un rectangle. Prolongeons AB selon AE=AD et soit I le milieu de [EB]. Le demi cercle de diamètre [EB] coupe (DA) en H. Alors le carré de côté [AH] a même aire que le rectangle ABCD. C'est la proposition 14 du Livre II des *"Éléments"* d'Euclide. En voici la démonstration, toujours purement géométrique.

Activité 8 : Démonstration de la proposition II_{14} des *"Éléments"*

Elle se fait en trois étapes, illustrées par trois propriétés et trois figures.

1) Soit un segment AB et un point C entre A et B (Figure 23). Alors le carré de côté AB est la somme des carrés de côtés AC et CB et du double du rectangle CA×CB.

Figure 23



2) Soit un segment AB, son milieu C, et D un point quelconque entre A et B distinct de C (Figure 24). Alors la somme du rectangle ADJF (égal à DA×DB) et du carré KJIH de côté CD (partie hachurée) est égale au carré de côté CB.

démonstration :

D'après 1) le carré de côté AC, ou BC, est la somme des carrés BDJE et HIJK et des rectangles DCKJ et IJEG. Or la somme de BDJE et DCKJ donne CAFK, donc l'aire limitée par AFKHID qu'Euclide appelle un *"gnomon"* est bien égale au carré de côté BC.

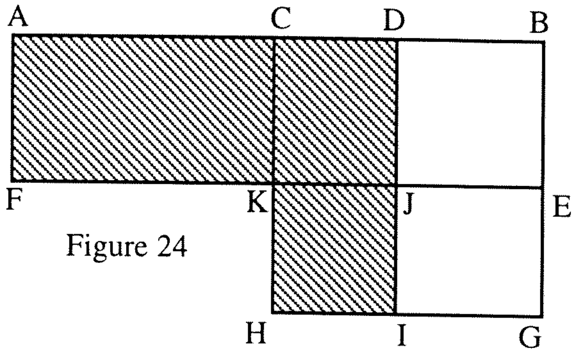
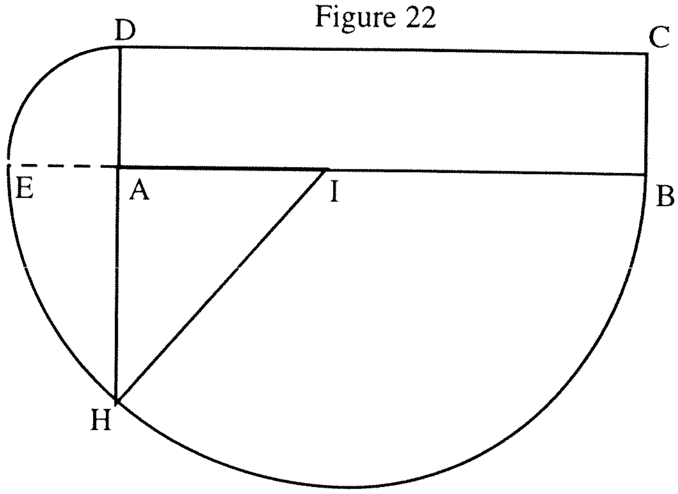


Figure 24

3) Reprenons alors la figure 22. En appliquant le résultat 2) précédent au segment [EB] de milieu I, le rectangle AB×AD augmenté du carré de côté AI est égal au carré de côté IB ou IH. Mais par Pythagore, le carré de côté IH est la somme des carrés de côtés AI et AH. Retranchant le carré de côté AI de part et d'autre, il reste que le rectangle AB×AD est égal au carré de côté AH.

Figure 22


Activité 9 :

Illustrons les trois étapes de la quadrature en réalisant la quadrature du pentagone régulier ABCDE (Figure 25).

1) Ce pentagone est la somme des rectangles BFDG et EHDI.
2) Le rectangle EHDI (construction c_1) est égal en aire au rectangle DGKL (construction c_2). Le pentagone a donc même aire que le rectangle BFKL.
3) Le rectangle BFLK est transformé en le carré KMNP par la construction c_3.

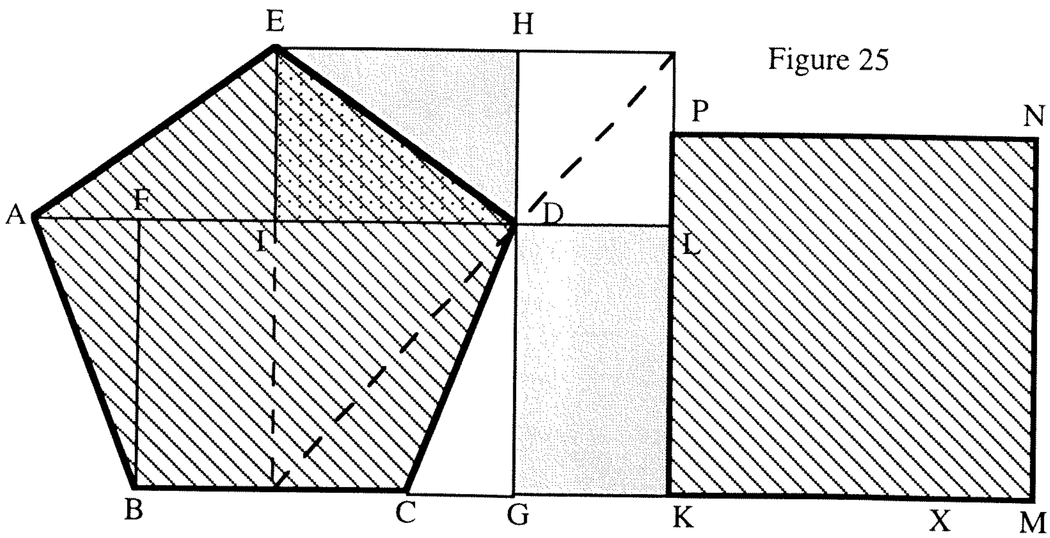


Figure 25

Les lunules d'Hippocrate[5].

Les grecs ont bien sûr cherché à réaliser également la quadrature de surfaces autres que polygones, et donc limitée par des lignes courbes, en particulier la célèbre quadrature du cercle, mais aussi la quadrature de la parabole, et d'autres encore.

Hippocrate de Chios réussit ainsi à démontrer l'égalité de certaines surfaces limitées par deux arcs de cercle (lunules) avec certains triangles, ce qui permet leur quadrature.

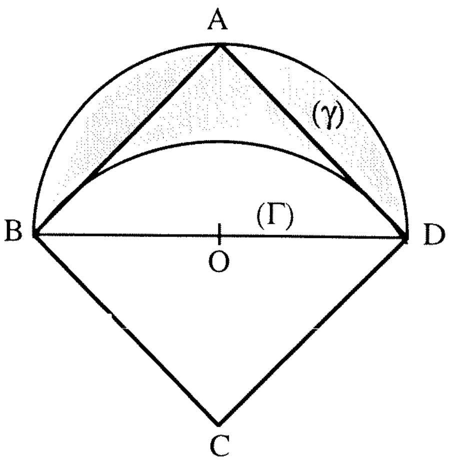
Activité 10 : Soit ABCD un carré de centre O et (L) la lunule définie par le cercle (γ) de centre O de rayon OA et le cercle (Γ) de centre C de rayon CD.

Comparer les quarts des aires des disques (γ) et (Γ). On utilisera le théorème suivant : Euclide XII_2 : *"Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres."*

Donc le quart de cercle BCDB est le double du quart de cercle BOAB

En déduire que l'aire de la lunule (L) est égale à l'aire du triangle ABD (figure 26).

Figure 26



EXERCICES

Le lecteur qui souhaiterait tester la bonne compréhension des méthodes développées ci-dessus peut traiter les problèmes suivants.

Activité 11 :

Généralisation du théorème de Pythagore par Pappus d'Alexandrie (≈300 ap.J.C.). Soit ABC un triangle quelconque ABDE et ACFG deux parallélogrammes construits extérieurement sur les côtés AB et AC, et soit H l'intersection de (DE) et (FG). Les parallèles à (AH) menées par B et C coupent (DH) et (FH) respectivement en M et N (Figure 27).

[5] On trouvera une étude plus détaillée des lunules dans le Volume II.

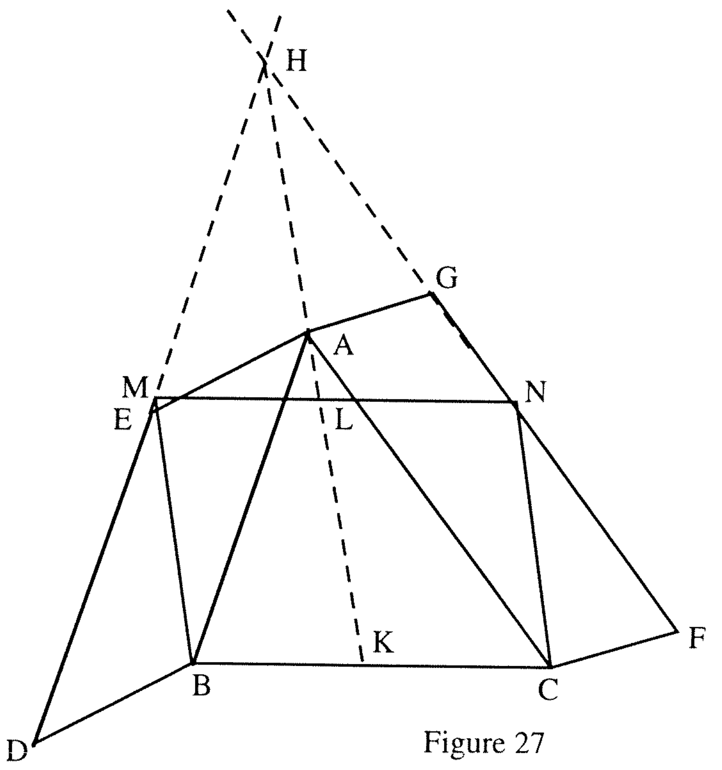


Figure 27

Démontrer que BCNM est un parallélogramme et que son aire est la somme des aires des parallélogrammes ABDE et ACFG.

indication : comparer les parallélogrammes BDEA, BMHA, BMLK.

Activité 12 :

Soit ABC un triangle quelconque. Trouver un point M intérieur au triangle, tel que les aires des triangles MAB, MAC, MBC soient respectivement la moitié, le tiers et le sixième de l'aire de ABC (Figure 28).

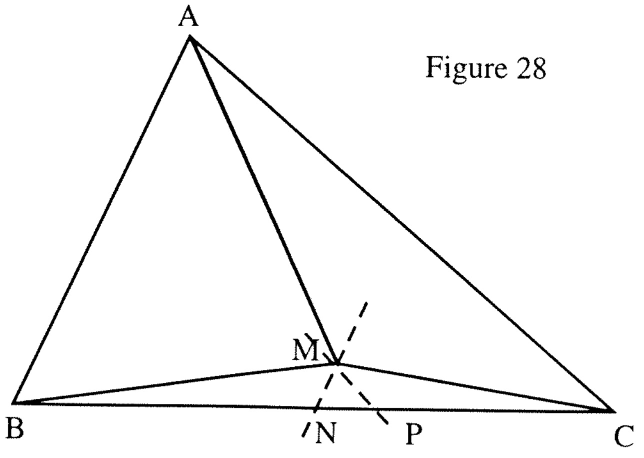


Figure 28

indication : prendre sur [BC] des points N et P tels que N soit au milieu de [BC] et P au tiers de [BC] à partir de C. Puis considérer l'intersection des parallèles à (AB) et (AC) respectivement, passant par N et P. Les triangles ABM et ACM sont respectivement égaux aux triangles ABN et ACP.

Activité 13 : Réalisez la quadrature de la figure limitée par les 2 carrés ABCD et EFGH (Figure 29) (partie ombrée).

<u>indication</u> se ramener à la quadrature d'un unique rectangle, par la construction c_3

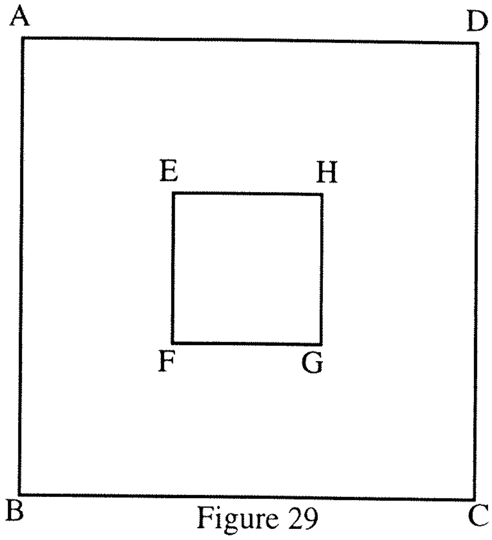


Figure 29

Activité 14 :

Expliquez et justifier la figure de la page de titre présentant le théorème de Pythagore sous la forme d'une multicongruence. On remarquera que le carré moyen est partagé en quatre morceaux congruents par deux droites perpendiculaires passant par le centre du carré, l'une des droites étant parallèle à l'hypoténuse du triangle rectangle. Déplaçons ces morceaux selon la figure 30 pour entourer le petit carré. Démontrer que la figure ainsi obtenue est un carré de côté égal à l'hypoténuse du triangle rectangle

Activité 15 :

Construction des cinq morceaux constituant le carré et l'hexagone de la figure 11.

1) Transformer l'hexagone ABCDEF en le rectangle AA'C'D' (voir figure 31).

2) Réaliser la quadrature de ce rectangle en le carré AIHK selon la construction c_3, et placer ce carré de façon que A soit commun avec un sommet de l'hexagone, et I sur la diagonale FC de l'hexagone.

3) Démontrer que (HK) passe par D' (Utiliser Euclide I_{38} généralisé au cas de parallélogrammes - voir Activité 2).

4) Tracer (G'J') parallèle à (AK) par G' sur HD' , tel que KG'=HK. On met ainsi en évidence un découpage commun de l'hexagone et du carré en les cinq même morceaux polygones.

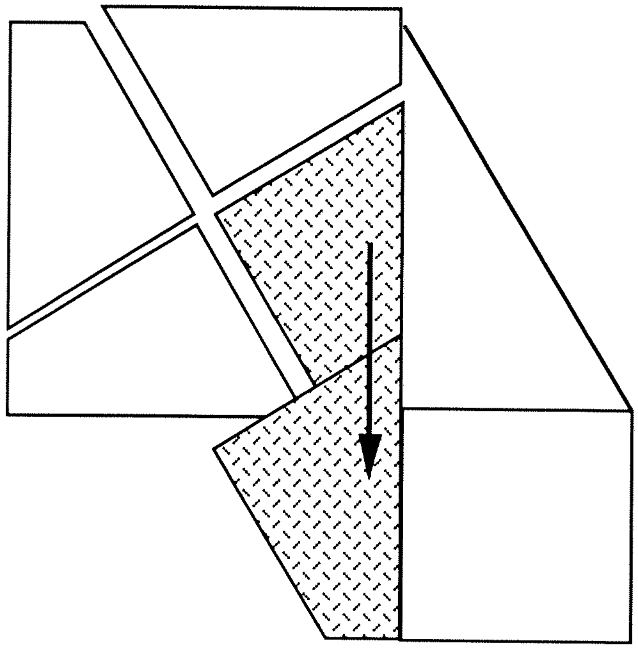


Figure 30

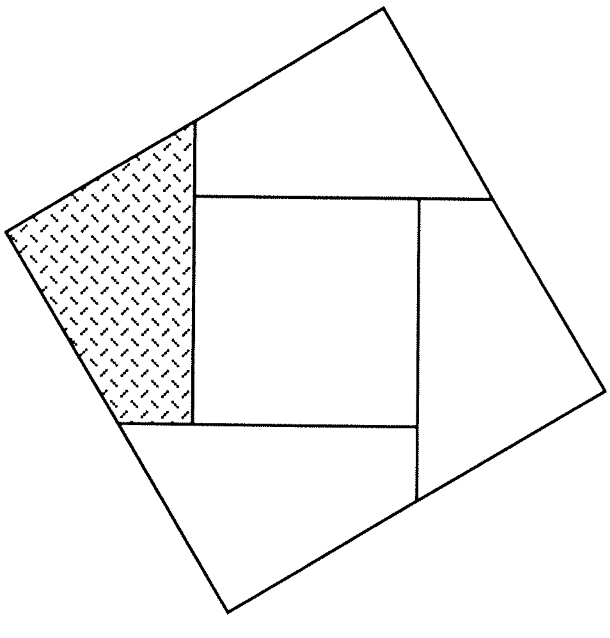
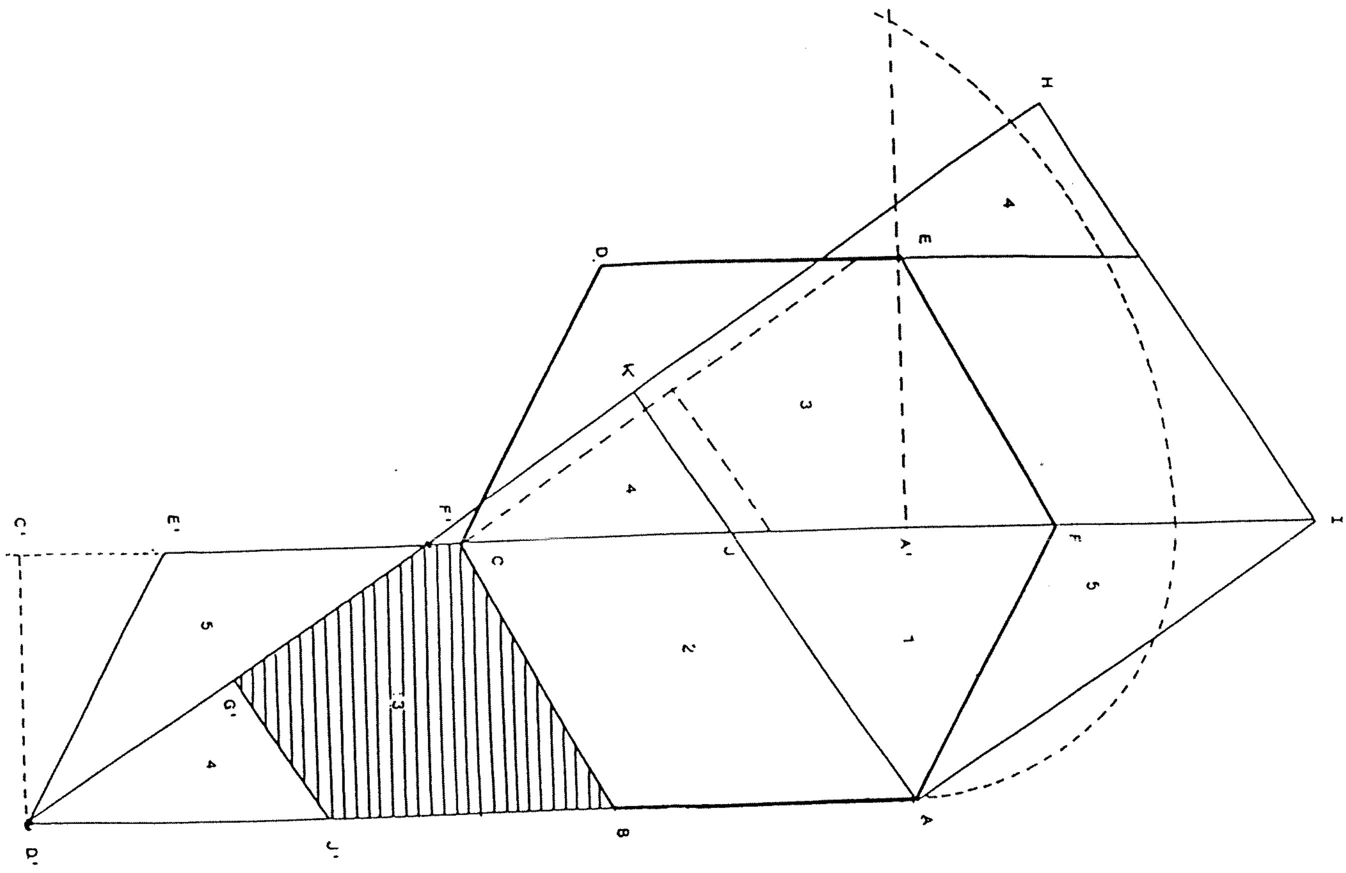


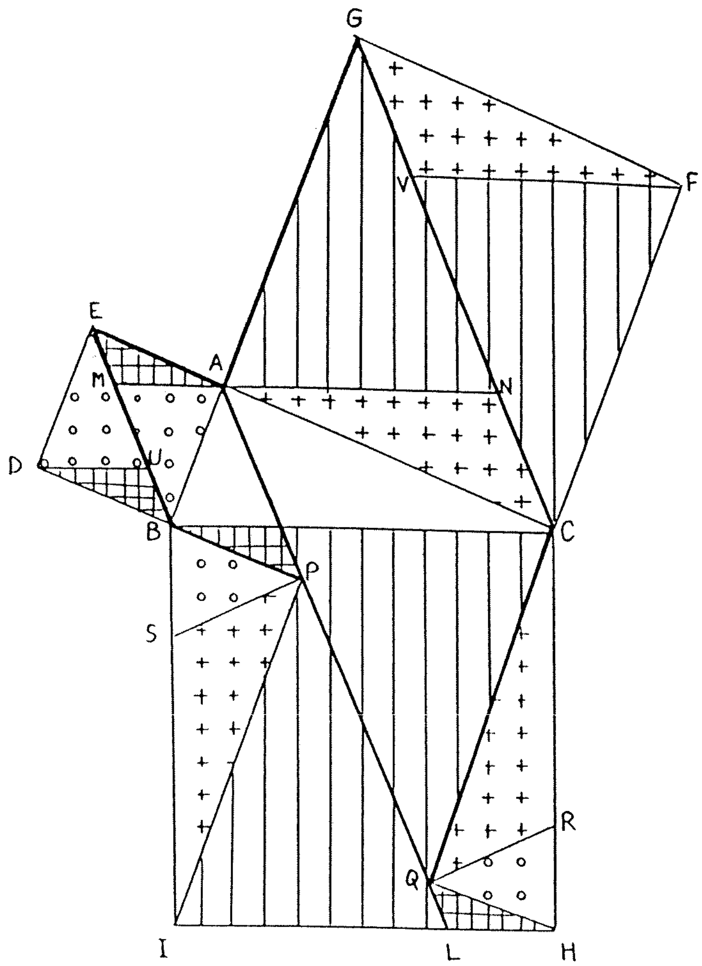
Figure 31



Activité 16 :

Démontrer le théorème de Pythagore en appliquant le principe de multicongruence mis en évidence par la figure 32

Figure 32



(MAN), (DU), (FV) sont parallèles à (BC)
(AL) est parallèle à (BE) et (CG)
(PS) et (QR) sont perpendiculaires à (AL)

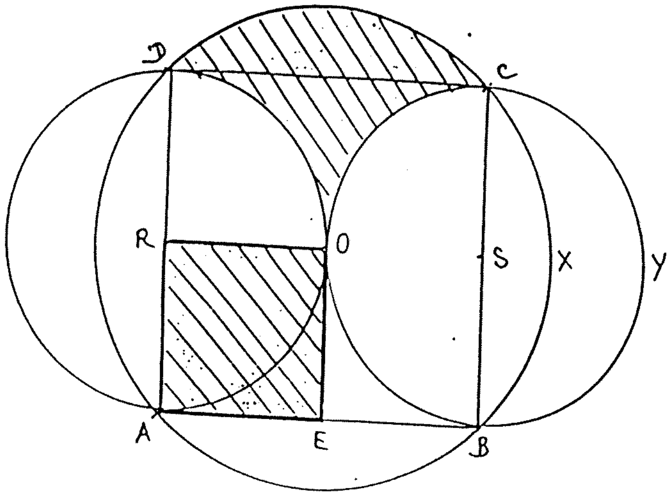
Donc AEBP et AGCQ sont des parallélogrammes, le premier égal au carré ABDE, le second au carré ACFG. Ainsi, chacun des angles en P ou en Q fait un demi-droit. Il est alors facile de mettre en évidence la multicongruence des carrés ABDE et ACFG avec le carré BCHI.

Activité 17 :

Démontrer que les deux aires hachurées de la figure 33 sont égales (d'après Léonard de Vinci).

On utilisera l'égalité de la lunule BYCXB avec le triangle OBC, démontrée dans l'activité 10.

Figure 33



Indication :

Soit A l'aire du grand cercle de centre O

B celle de l'un des petits cercles (centre R ou S),

C celle de la lunule BYCXB

D la partie hachurée DOCD.

Alors A+2C=2B+2D.

Donc D=1/2A-B+C or 1/2A=B

Donc D=C Mais C=OBC=AEOR

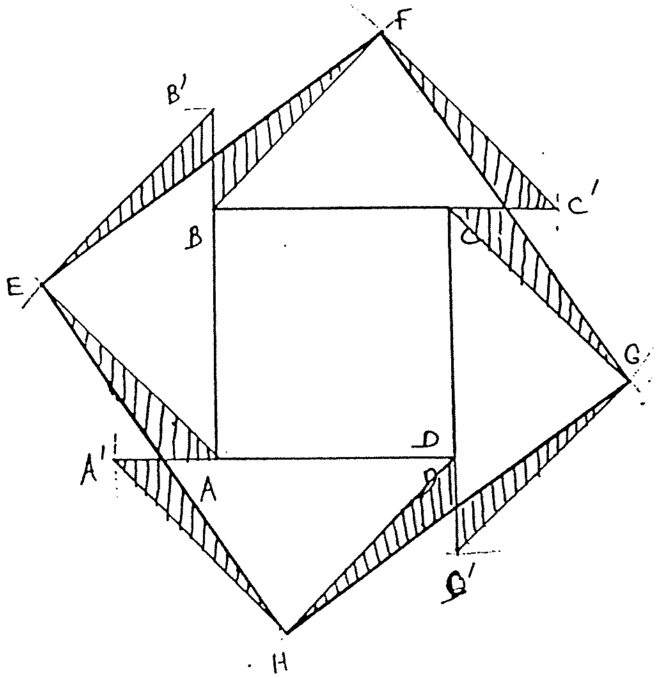
Activité 18 :

Construire un carré avec trois carrés égaux donnés.

Solution d'Abûl Wafà

Soient ABCD, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 les trois carrés.
Divisons chacun des deux derniers en deux triangles égaux, par une diagonale, et disposons les quatre triangles ainsi obtenus le long du contour du premier carré, selon AEB', BFC', CGD' et DHA'. Alors EFGH est le carré cherché.
(figure 34)

Figure 34



Activité 19 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, duquel on enlève le triangle rectangle ADE où (DE) est parallèle à (BC) (figure 35).

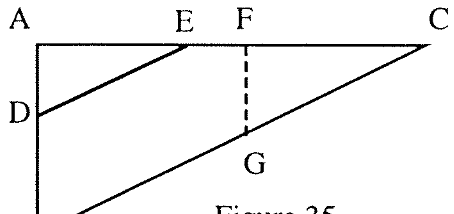


Figure 35

Du même triangle ABC on peut aussi enlever le triangle FGC tel que FC=AE (et FG=AD) où (FG) est parallèle à (AB). On obtient ainsi deux trapèzes égaux en aire : BDEC et AFGB.

Réaliser leur équidécomposabilité (figures 36 et 37).

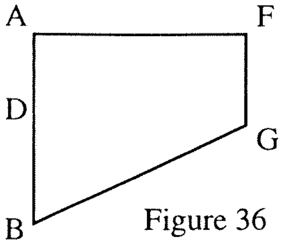


Figure 36

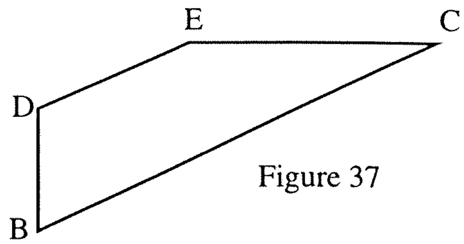


Figure 37

Activité 20 ; d'après Rallye mathématique d'Alsace 1992 :

Un père avait quatre fils. Il leur laisse en héritage un champ quadrilatère convexe ABCD, qu'ils doivent partager en quatre parts d'aires égales de la façon suivante : ils creuseront un puits en un point P qui leur servira de lieu de rencontre, et les quatre parts seront constituées des triangles PAB, PBC, PCD, PDA. A quelle condition un tel partage est-il possible, et si c'est le cas, où est situé le puits P?

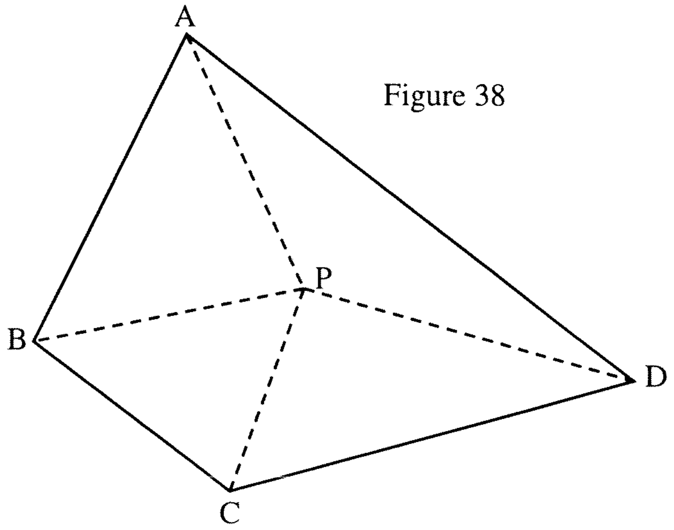


Figure 38

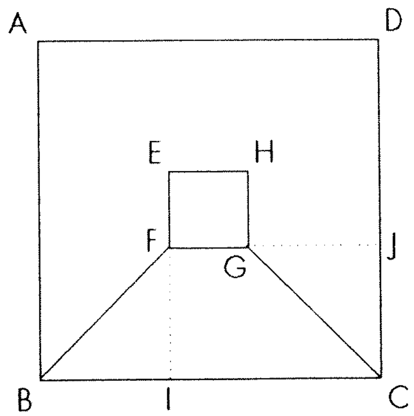
Solution de l'Activité 13 :

Données : deux carrés parallèles ABCD et EFGH qui ont même centre, le premier contenant le second.

Notations : I et J sont les projetés orthogonaux de F et G sur (BC) et (CD) respectivement.

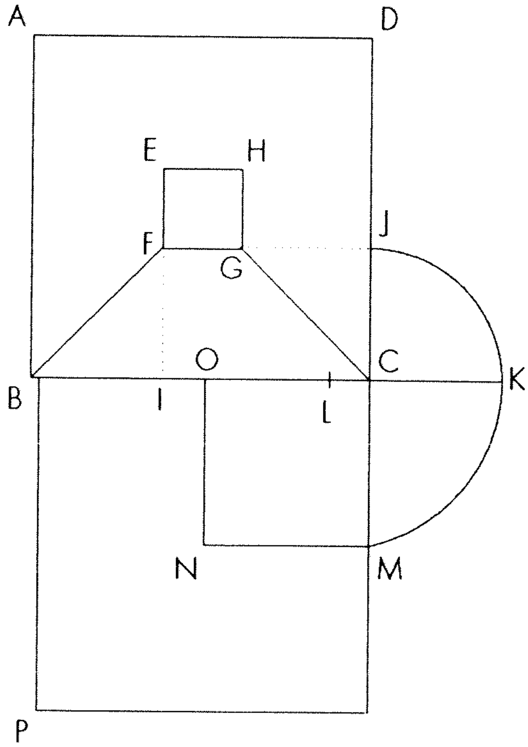
L'aire de la partie de plan limitée par les carrés ABCD et EFGH est égale à quatre fois celle du trapèze isocèle BCGF. Comme les triangles BIF et GCI ont même aire, l'aire de ce trapèze est aussi celle du rectangle FICJ.

Figure 39



Il reste donc à réaliser la quadrature de ce rectangle. Elle sera faite en utilisant l'activité 8. Le cercle de centre C et de rayon CJ coupe (BC) en K. Soit L le milieu du segment [IK]. Le cercle de centre L et de rayon LK coupe la droite (CD) en M. D'après l'activité 8, le carré CMNO de côté [CM] et le rectangle FJCI ont même aire. P désignant le symétrique de C par rapport à N, le carré de diagonale [CP] réalise la quadrature de la figure proposée

Figure 40



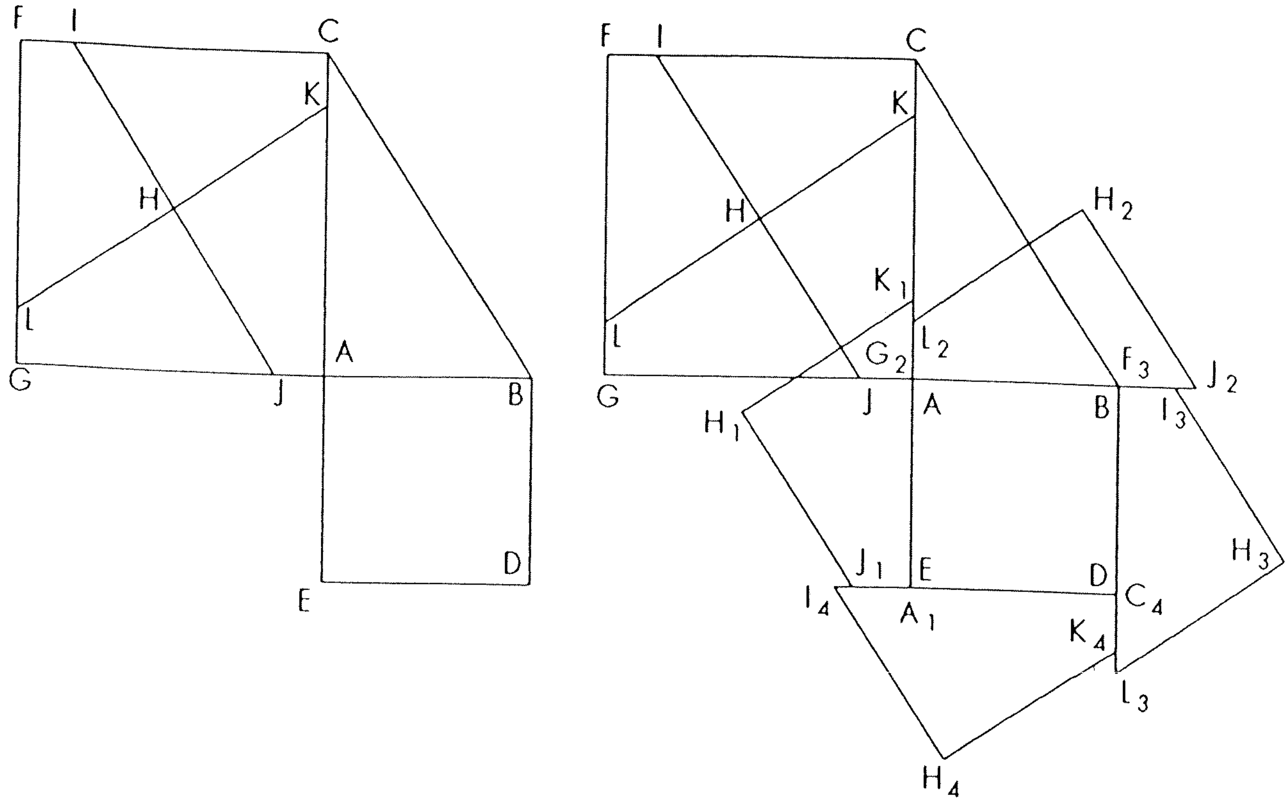
Solution de l'Activité 14 :

Données : un triangle ABC, rectangle en A, les carrés ABDE et ACFG construits sur les segments respectifs [AB] et [AC] à l'extérieur du triangle ;
H, le centre du second carré ;
la parallèle à (BC) passant par H coupe [CF] en I et [GA] en J ;
la perpandiculaire à (IJ) passant par H coupe [AC] en K et [FG] en L.

Notations : t_1, t_2, t_3 et t_4 sont les translations de vecteurs respectifs AE, GA, FBet CD.
On pose $t_1(H)=H_1$, $t_1(K)=K_1$, $t_1(A)=A_1$ et $t_1(J)=J_1$ etc, et c=AB, l=KC.

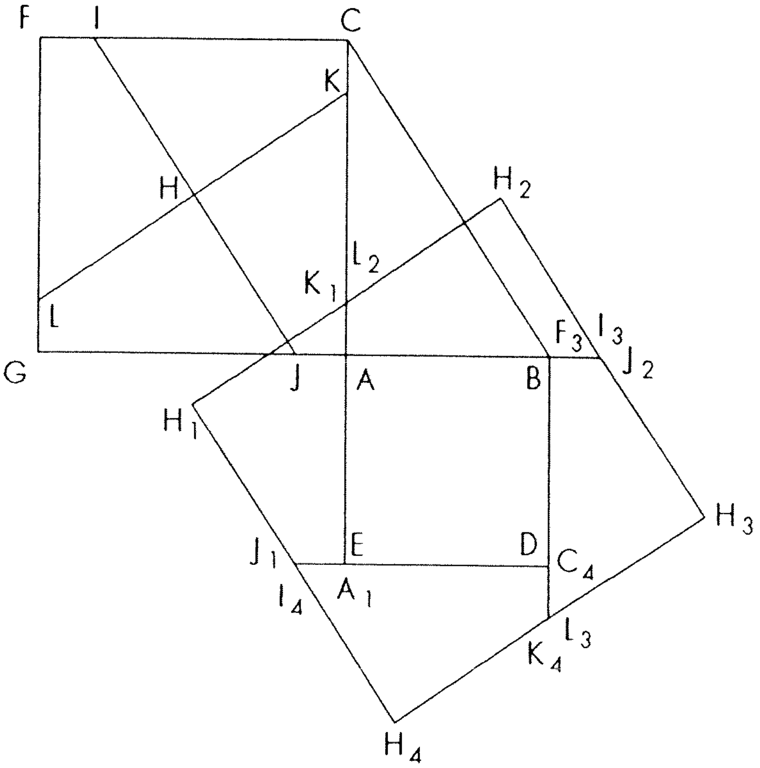
Les quadrilatères HJAK, HKCI, HIFL et HLGJ sont isométriques puisque H est le centre du carré ACFG et les angles en H sont droits.

Figure 41 et 42



ICBJ est un parallélogramme donc IC=JB. Comme GJ=IC, on peut écrire GJ=JB, ce qui prouve que J est le milieu du segment [GB]. On en déduit GJ=JA+AB=KC+AB=l+c.
$AK_1=A_1K_1-AA_1=AK-AB=GJ-AB=l+c-c=l=GL=AL_2$.
Par suite les points K_1 et L_2 sont confondus.
On a aussi $(H_1K_1)//(HK)$, $(L_2H_2)//(LH)$ et (LH)=HK) donc $(H_1K_1)=(L_2H_2)$.
Ainsi les points H_1, K_1, L_2 et H_2 sont alignés.
On démontrerait de la même façon l'alignement des points H_2, J_2, I_3 et H_3, celui des points H_3, L_3, K_4 et H_4 et enfin celui des points H_4, I_4, J_1 et H_1.
La figure donnée par les points H_1, K_1, L_2, H_2, J_2, I_3, H_3, L_3, K_4, H_4, I_4 et J_1 est par conséquent un quadrilatère.

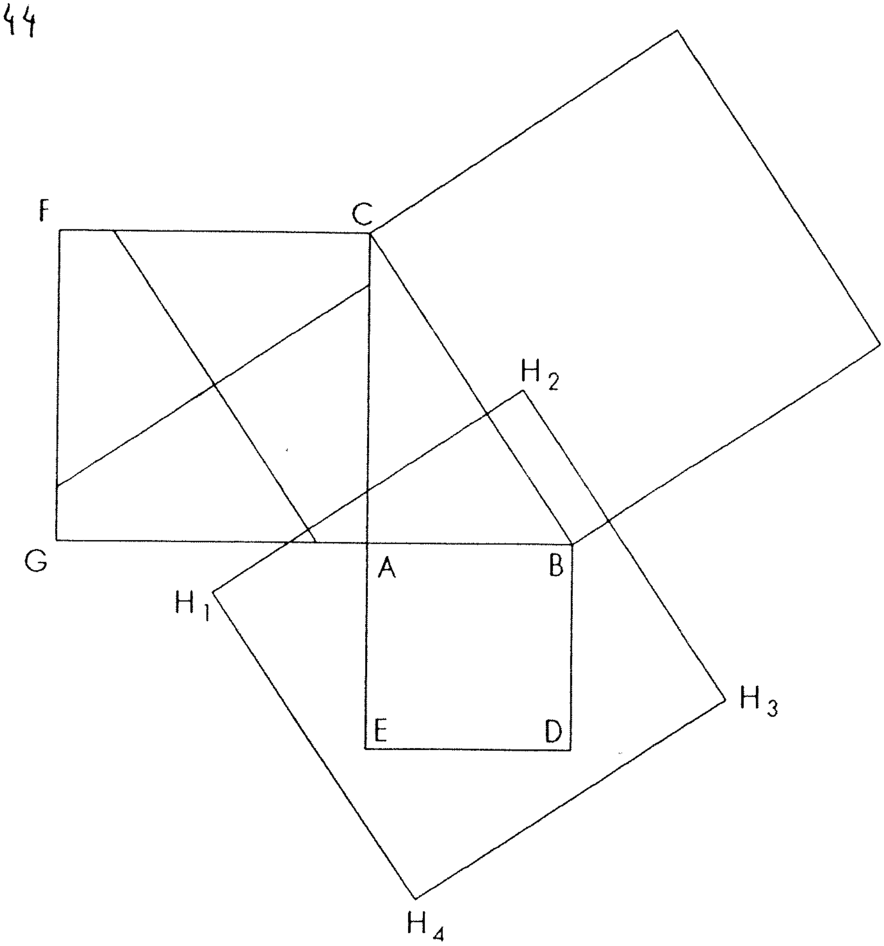
Figure 43



Des égalités $\begin{cases} H_1H_2 = H_1K_1 + L_2H_2 = HK + LH = LK = IJ = BC \\ H_2H_3 = H_2J_2 + I_3H_3 = HJ + IH = IJ = BC \end{cases}$ on tire $H_1H_2=H_2H_3=BC$.

Ceci achève de montrer que $H_1H_2H_3H_4$ est un carré de côté BC.

Figure 44



Pour conclure, voici quelques indications bibliographiques pour le lecteur souhaitant développer ce type d'activités et s'informer sur les aspects théoriques sous-jacents.

Boltianskii V.G. : Hilbert's third problem
Traduit du russe en anglais par R.A. Silverman, Winston and Sous, Washington 1978.

Egret M.A. : Un apprentissage des aires en sixième
Mission laïque française 1992.

Fourrey E. Curiosités géométriques
Librairie Vuibert Paris 1920.

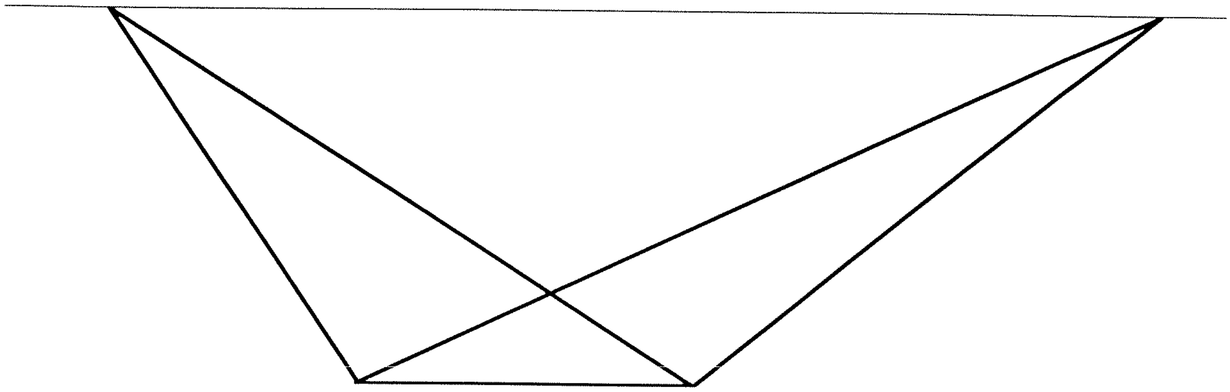
Hadwiger H. - Glur P. : Zerlegungsgleicheit ebener
Polygone (Elemente der Mathematik 6,97-106).

Hilbert D. Les fondements de la géométrie.
Traduits par Rossier, Paris Dunod 1971.

EQUIDÉCOMPOSABILITÉ DE DEUX TRIANGLES DE MEME BASE ET DONT LES SOMMETS SE TROUVENT SUR UNE MEME PARALLELE À LA BASE

par Michel SARROUY

L'activité 4 donne d'une façon simple l'équidécomposabilité de deux parallèlogrammes ayant une base commune et les deux autres sur une même parallèle à la base. Mais comment réaliser cette équidécomposabilité dans le cas de deux triangles tels ceux de la figure suivante?

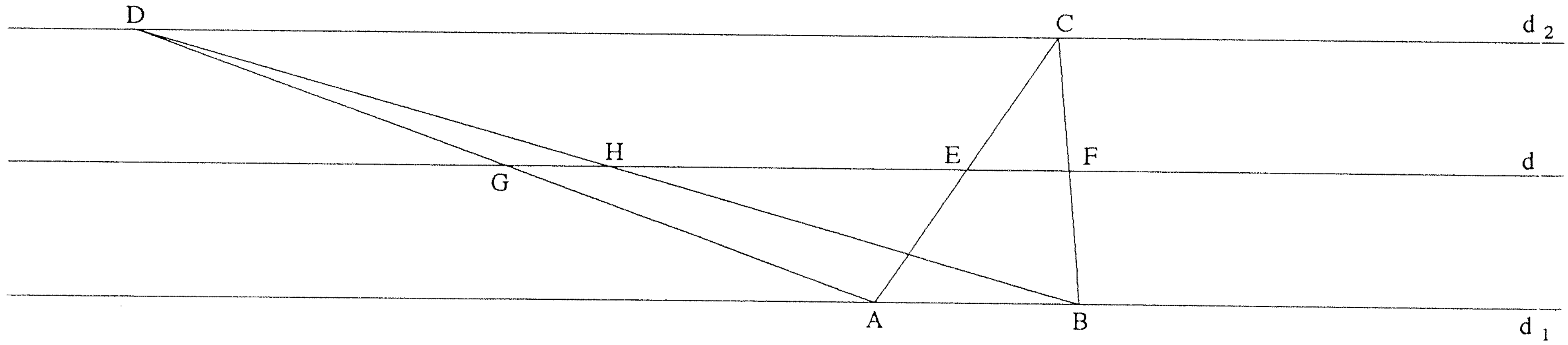


L'activité qui suit donne d'une part une démonstration de l'égalité en aire des deux triangles (méthodes 1 et 2) et d'autre part un découpage en morceaux réalisant leur équidécomposabilité.

Equidécomposabilité des deux triangles qui ont même base et dont les sommets se trouvent sur un même parallèle à la base

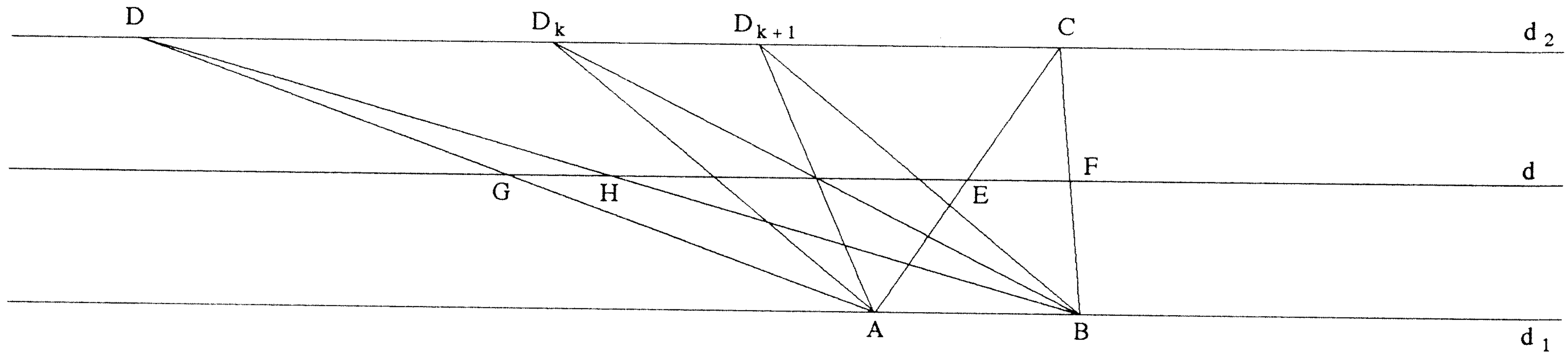
Notations communes aux trois méthodes : d_1 et d_2 sont deux droites parallèles
A et B sont des points distincts de d_1. A est à gauche de B.
C et D sont des points distincts de d_2. C est à droite de D.
d est la parallèle équidistante de d_1 et d_2.
t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
d coupe les segments [A C], [B C], [A D] et [B D] en E, F, G et H respectivement.

Les trois méthodes ci-dessous utilisent la transitivité de l'équidécomposabilité.

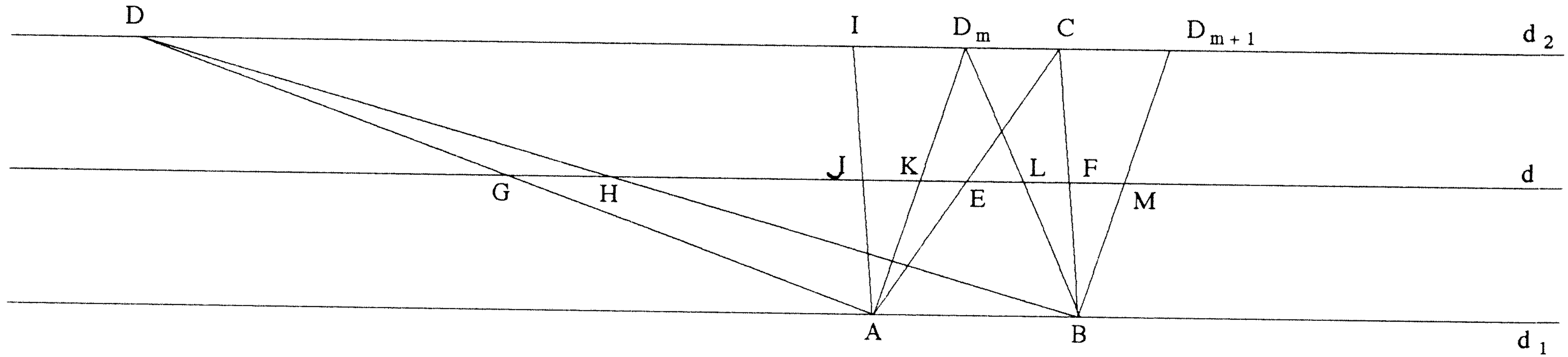


Première méthode :

Construction des images successives D_1, D_2, … , D_m par t^{-1}, t^{-2}, … , t^{-m} tant qu'elles appartiennent au segment [C D].
On pose de plus $D_0 = D$.
Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et m - 1, les triangles $A\,B\,D_k$ et $A\,B\,D_{k+1}$ ont même aire car $A\,B\,D_{k+1}\,D_k$ est un parallélogramme.



Avec les notations du schéma ci-dessous, sachant que (A I) // (B C) et (A D_m) // (B D_{m+1}) on a les égalités d'aires suivantes :

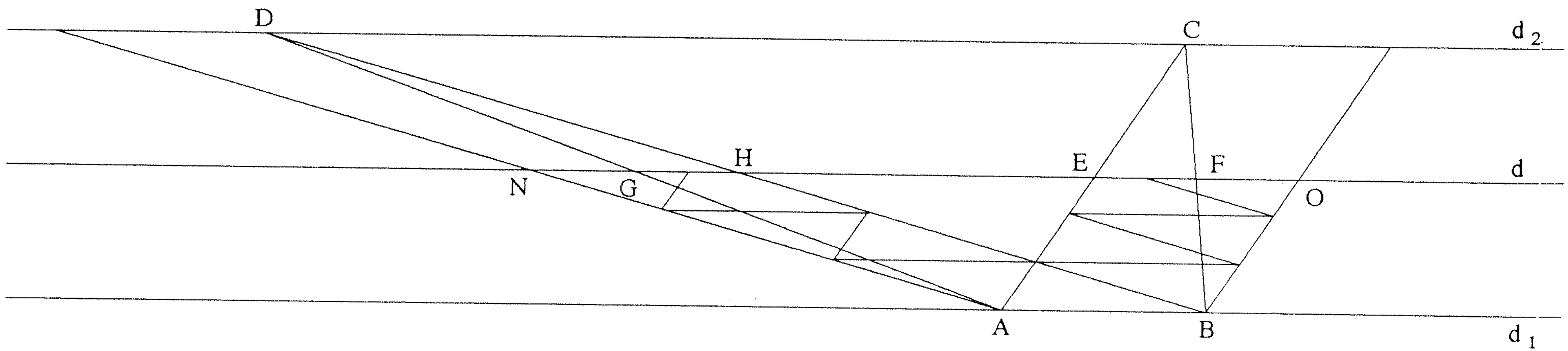


$$\begin{aligned} D_m AB + JAK &= D_m KL + \underbrace{JAK + KEA} + ELBA \\ &= \overbrace{LMB} + JEA + ELBA \\ &= BMF + LBF + EFC + AELB \\ &= BMF + ABC \end{aligned}$$

et comme $JKF = BMF$, on a $D_m AB = ABC$.

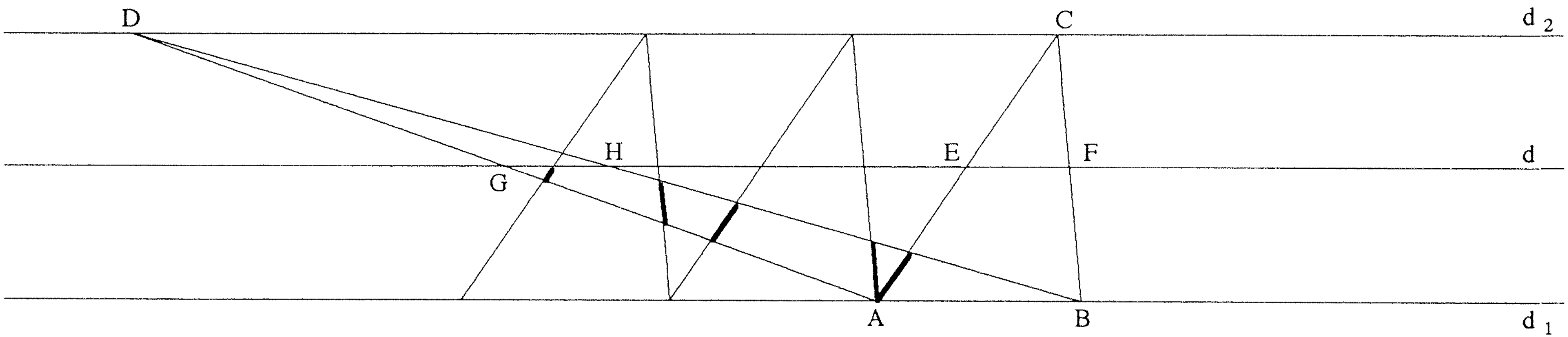
Deuxième méthode :

La parallèle à (B D) passant par A coupe d en N et la parallèle à (A C) passant par B coupe d en O.
Les triangles D H G et A N G ont même aire donc l'aire du triangle A B D est égale à celle du parallélogramme A B H N.
De même, celle du triangle A B C est égale à celle du parallélogramme A B O E.
Ces deux parallélogrammes ont des aires égales

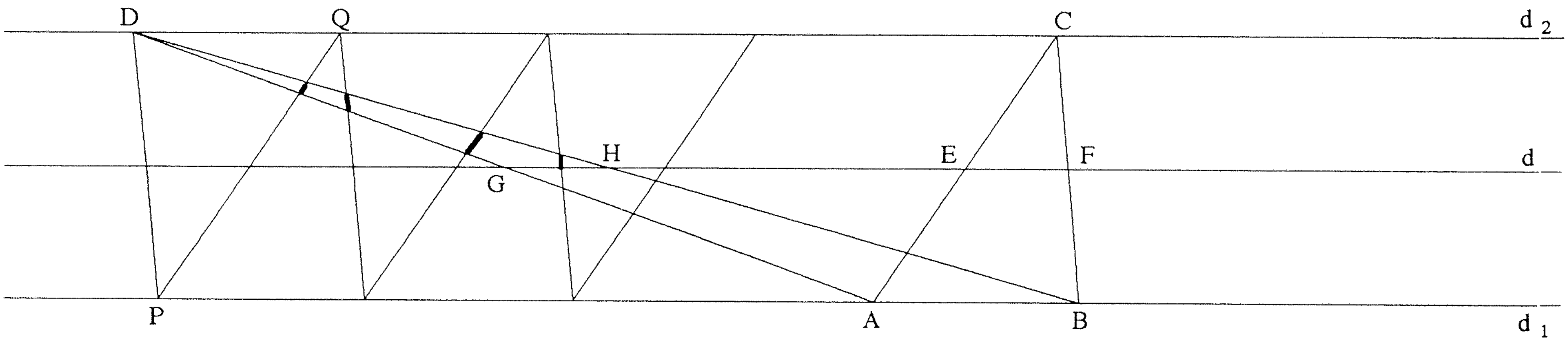


Troisième méthode :

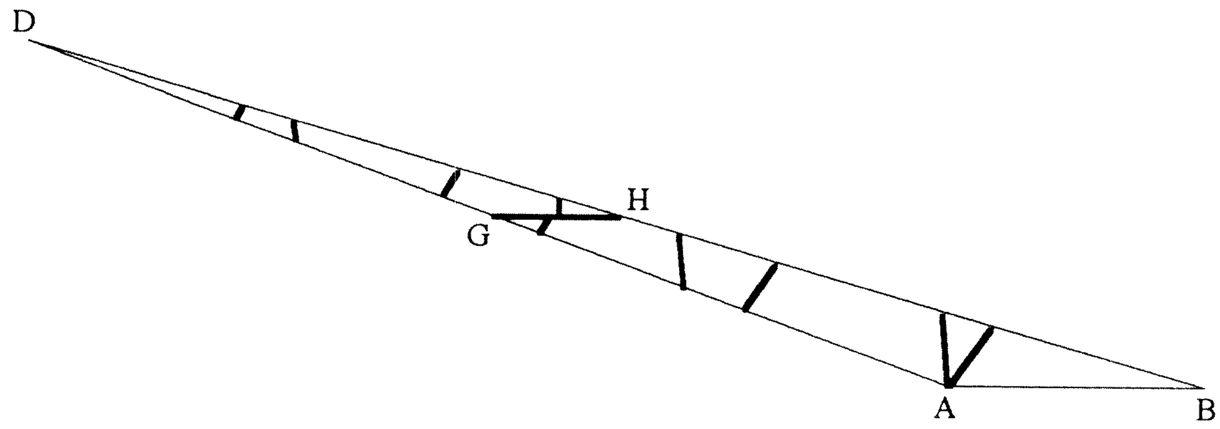
- Construction des images successives du triangle A B C par les translations t, t^2, … , t^p jusqu'à ce que la première des deux images t^p ([B C]) et t^p ([A C]) rencontre le segment [G H].
  On ne conserve de ces images que les segments d'intersection avec la surface A B H G.



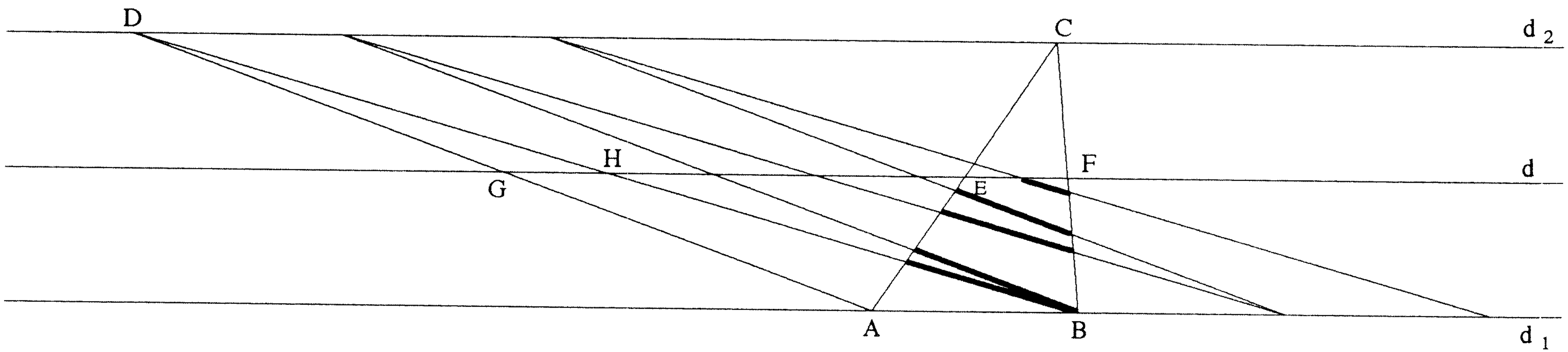
- La parallèle à (B C) passant par D coupe d_1 en P et la parallèle à (A C) passant par P coupe d_2 en Q.
  Construction des images successives du triangle D P Q par les translations t^{-1}, t^{-2}, … , t^{-p}.
  On ne conserve de ces constructions que les segments d'intersection avec la surface D G H.



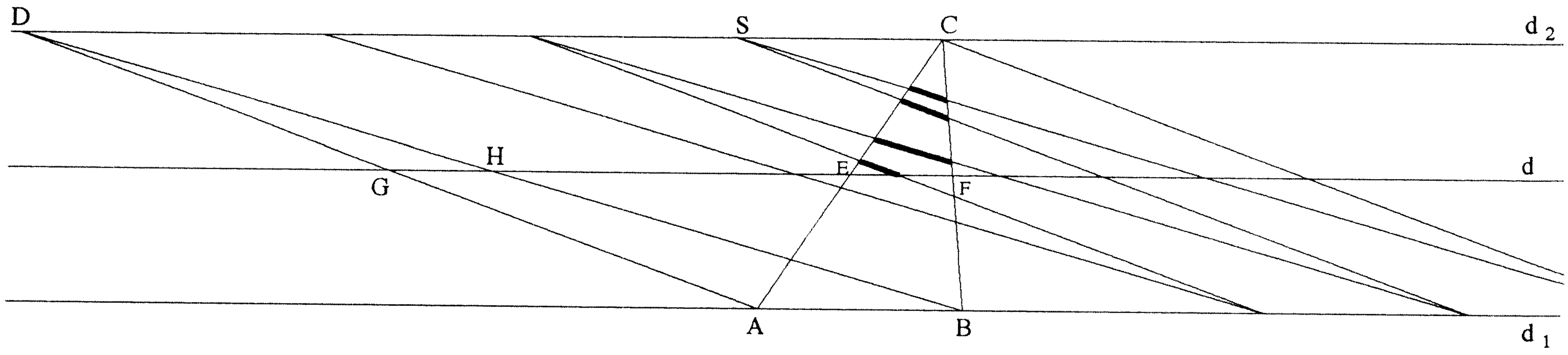
- Les segments obtenus au cours des deux constructions précédentes ainsi que [G H] sont ceux qui partagent le triangle A B D :



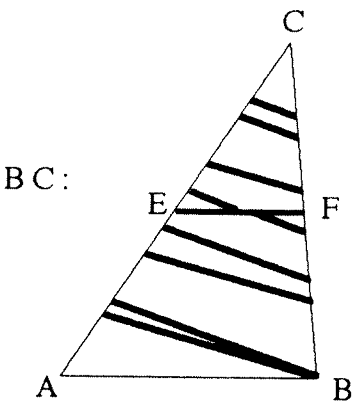
- Construction des images successives du triangle A B D par les translations $t^{-1}, t^{-2}, \dots, t^{-p}$.
  On ne conserve de ces images que les segments d'intersection avec la surface A B F E.



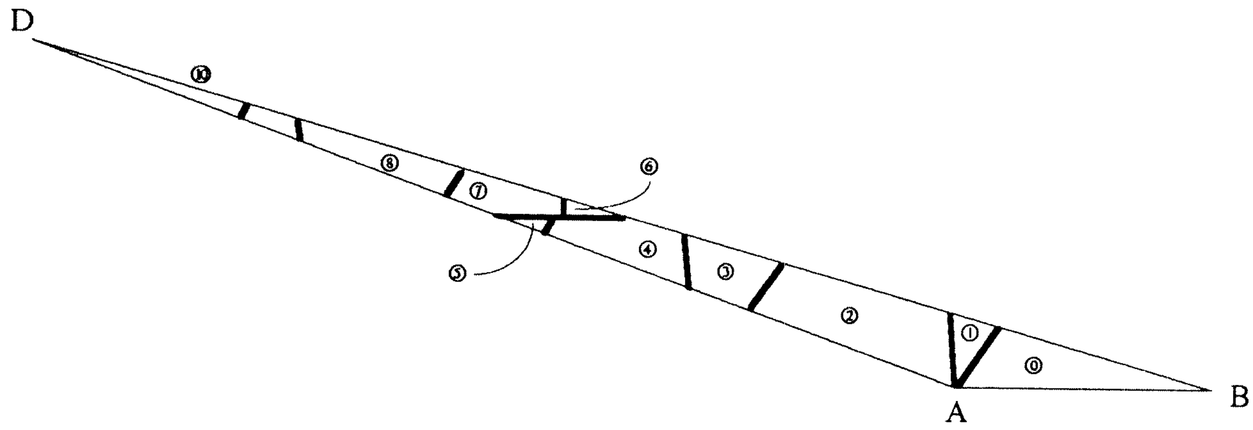
- La parallèle à (A D) passant par C coupe d_1 en R et la parallèle à (B D) passant par R coupe d_2 en S.
  Construction des images successives du triangle A R S par les translations $t, t^2, \dots, t^p$.
  On ne conserve de ces constructions que les segments d'intersection avec la surface C E F.

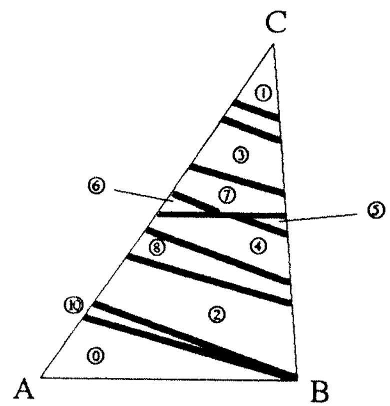


- Les segments obtenus ainsi que [E F] sont ceux qui partagent le triangle A B C :



- Correspondance entre les différentes parties :





MESURER ET COMPARER - QU'EST-CE QUE C'EST ?

par Klaus VOLKERT

Dans ce qui suit, je vais esquisser la théorie moderne des deux notions qu'on trouve dans le titre. En général je me bornerai à quelques indications sans entrer dans les détails, souvent compliqués. Le but de mes remarques est de vous faire voir comment la théorie moderne répond aux questions posées, il y a longtemps, comme nous l'avons vu dans cette brochure, dans l'histoire des mathématiques.

Il y a une différence évidente entre les deux idées *mesurer* et *comparer*. Mesurer est strictement lié à l'idée de nombre, par contre comparer ne l'est pas. Comparer est une relation directe entre des objets (par ex. des segments, des figures, ...), mesurer fonctionne en appliquant un nombre à chaque objet et en comparant ces nombres. Autrement dit le résultat d'une comparaison est une réponse du type oui ou non (ces segments sont égaux ou non) par contre une mesure produit des nombres (ce segment possède une longueur de 30 cm).

Dans les textes qui précèdent nous avons parlé d'objets géométriques tels que des segments ou des figures. Comment les comparer ? Une réponse à cette question nous est déjà donnée par Euclide. Dans l'axiome numéro sept il dit : "Ce qui est superposable est ce qui est égal" ou dans la traduction par Peyrard, qui me semble moins claire, "Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles". Cet axiome réduit la notion *d'égalité* a celle de *superposabilité* qui est un peu étrangère au système statique d'Euclide. Beaucoup plus tard on a créé le terme "congruence" pour cette forme d'égalité qui est à distinguer de l'identité. Euclide lui-même usait de ce principe, sans le dire, en supposant dans la démonstration de sa première proposition, que le rayon du cercle centré en A et passant par le point B soit le même que le rayon du cercle centré en B et passant par A. Il le réutilisait expressément dans la démonstration de la proposition quatre : deux triangles sont congruents s'ils ont deux côtés égaux et l'angle égal compris entre les deux côtés, et dans la démonstration du théorème huit : deux triangles sont congruent si leurs côtés sont égaux. Ce sont les seuls endroits où Euclide travaille explicitement avec le *principe de la superposition.* Il évite son usage dans d'autres démonstrations (par ex. la proposition cinq) même s'il pouvait la faciliter par une superposition. Donc on pense qu'Euclide lui-même ne se sentait pas à l'aise avec ce principe qui remonte peut-être à Thalès.

Le principe de superposabilité a posé des problèmes énormes dans l'histoire de la géométrie parce qu'on l'a critiqué comme introduisant un élément physique ou empirique dans la géométrie pure. Vers la fin du 19ème siècle on a trouvé deux solutions à ce problème : l'une consiste à substituer la notion de transformation (ou application) à la place de la superposabilité, ce qui revient à postuler que deux segments ou angles ou figures sont congruents s'il y a une transformation (par ex. une translation ou une rotation) qui applique l'un sur l'autre. L'autre solution est d'utiliser deux relations non définies, l'une entre les segments, l'autre entre les angles, soumises seulement à quelques axiomes comme base, et de définir la congruence des figures par la congruence de tous leurs segments et de tous leurs angles. La première notion est donc plus générale que la seconde, parce que suivant la seconde solution la congruence est seulement définie pour des polygones. La première idée revient à August Ferdinand Moebius (1827), à Hermann von Helmholtz (1868), et à Félix Klein (1872) le célèbre programme d'Erlangen ; elle fut utilisée comme base de l'enseignement géométrique en France pour la première fois par Charles Méray (1884), et elle est aujourd'hui très répandue dans les écoles, au moins en Allemagne. L'autre solution revient à David Hilbert et ses fameux <u>Fondements de la Géométrie</u>, (1899/1900) ; bien entendu d'autres mathématiciens ont travaillé avant Hilbert dans cette direction comme Moritz Pasch (1882) et G. Veronese (1891). Nous voulons, ici, ne considérer que la solution hilbertienne.

Donc nous disposons d'une relation dite "congruence" entre les segments, en particulier nous pouvons décider si un segment AB est congruent à un segment CD ou non. Voilà une relation de comparaison avec les qualités usuelles, c'est-à-dire symétrie, réflexivité et transitivité. Nous sommes donc capables de partager l'ensemble de tous les segments en des classes d'équivalence selon la relation "être congruent". Nous appelons chacune de ces classes *une longueur*. Notons bien qu'il n'y a point de concept de nombre ici, nous avons seulement comparé les segments sans les mesurer.

La même construction peut se faire pour les angles, notion assez difficile à préciser. Pour la définition de la notion d'aire, la congruence est beaucoup trop restrictive, par exemple un triangle n'est jamais congruent à un carré ou à un rectangle. Par conséquent il faut créer dans le cas des figures une autre relation de comparaison : c'est la *multicongruence* ou *l'équidécomposabilité*. Parce que la multicongruence, dont nous avons déjà parlé dans cette brochure, est elle aussi une relation d'équivalence on peut former les classes d'équivalence selon cette relation et définir : Une *aire* est une telle classe d'équivalence. Notons en passant que cette définition ne dépend que de la notion de congruence. Par conséquent elle est valable aussi bien dans la géométrie euclidienne, c'est-à-dire la géométrie ordinaire que dans la géométrie non-euclidienne, ou dans la géométrie sphérique. Par contre l'idée usuelle d'épuiser une figure par des carrés, n'est plus réalisable ni dans la géométrie hyperbolique, ni dans la géométrie sphérique. La raison en est un peu bizarre mais néanmoins vraie. Dans ces géométries il n'existe ni carrés ni rectangles, la somme des angles du triangle n'étant plus égale à deux droits dans ces géométries. Un peuple qui connaît la multicongruence mais pas l'idée de la mesure des aires par des nombres peut faire des transactions comme échanger deux lots de bâtiment qui sont dans la même classe d'équivalence, ou partager un rectangle entre un nombre arbitraire d'héritiers. Ce qu'ils ne savent pas c'est calculer le prix d'un lot de bâtiment ! On comprend très bien, en conséquence, la difficulté liée à toutes les relations de comparaison : on ne dispose pas de la possibilité d'établir une relation entre les différentes classes d'équivalence, ou d'une comparaison indirecte par les nombres associés à ces classes. On peut, au moins en principe, décider que deux figures appartiennent à la même classe - c'est-à-dire qu'elles sont de même aire - mais on ne peut pas décider quelle est la plus grande si elles ne sont pas équivalentes. L'importance de la multicongruence réside dans le fait qu'elle offre une possibilité de définir l'aire d'un polygone sans recourir aux nombres et sans tomber dans des cercles vicieux : "l'aire d'une figure est son étendue". D'un point de vue didactique la multicongruence est très précieuse parce qu'elle est très intuitive et parce qu'elle offre la possibilité de faire beaucoup d'expériences concrètes (pensez par exemple aux jeux de tangram !).

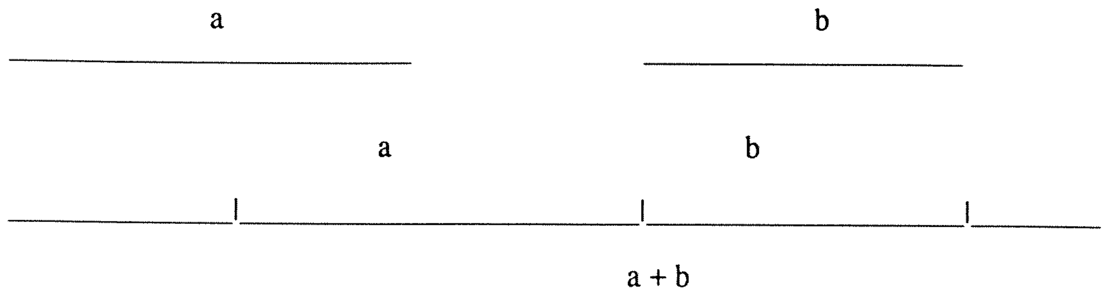
L'idée de mesure s'impose en conséquence. La mesure commune est le *tertium comparationis* entre les objets qui sont distincts c'est-à-dire qui ne sont pas des éléments de la même classe d'équivalence. Mais on verra que le processus de la mesure est assez complexe ; il est lié à des suppositions plus fortes que la comparaison. Euclide nous en a donné une esquisse dans les axiomes de son premier livre (le résultat d'une mesure est une *grandeur* pour Euclide et pour nous aussi).

1. *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
2. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
3. *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*
4. *{Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.*
5. *Et les doubles du même sont égaux entre eux.*
6. *Et les moitiés du même sont égales entre elles.}*
7. *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*
8. *Et le tout {est} plus grand que la partie.*
9. *{Et deux droites ne contiennent pas une aire}.*

Souvent on lit "nombre" au lieu de "grandeur", et on obtient des vérités arithmétiques, mais cela ne me semble pas complètement justifié. Le premier livre des "Éléments" est consacré exclusivement à des considérations géométriques et les nombres ne sont traités par Euclide que dans des livres postérieurs. Donc je préfère utiliser le concept de grandeur ou de quantité, ici, lequel sera éclairci, je l'espère au moins, dans la suite.

L'idée de grandeur est, je l'ai déjà dit, assez complexe. Examinons comme point de départ l'exemple des segments. Tout le monde sait, et on apprend ça déjà à l'école primaire, qu'il faut une unité pour mesurer des segments. La définition habile de cette unité, le mètre, est un problème qui n'appartient pas aux mathématiques. Supposons donc que nous ayons choisi un segment arbitraire comme unité. Pour mesurer un segment quelconque par cette unité il nous faut la possibilité de juxtaposer cette unité ou plus généralement de juxtaposer des segments.

Si l'unité est désignée par e et si a est un segment, il se peut qu'on ait $a=e+e+e$ ou $a=3e$. D'un point de vue géométrique l'addition des segments se fait par juxtaposition d'un segment a un autre sur la même droite :



Euclide s'assure de cette possibilité dans les premières propositions du premier livre : transport d'un segment sur un autre à un point de départ donné. Pour aboutir à $a=3e$ il nous faut :

1. Juxtaposer e trois fois sur une droite d.

2. Réaliser que $3e$ (sur d) est congruent à a qui peut se trouver à un endroit arbitraire du plan, nous nous bornerons à la géométrie plane. Dans ce cas on dit aussi que la mesure $m(a)$ est égal a 3 (par rapport à l'unité e).
   Donc nous voyons qu'une mesure à besoin de la congruence des segments. Nous tombons sur les deux principes suivants :

   (P1) Si un segment a est congruent à un segment b, il faut que la mesure de la longueur de a soit la même que celle de b, ou en abrégé : que $a \equiv b \Rightarrow m(a) = m(b)$

   (P2) Si le segment c est congruent à la somme des segments a et b, il faut que la mesure de c soit la somme des mesures de a et b : $c \equiv a + b \Rightarrow m(c) = m(a) + m(b)$
   (Comparez les axiomes 2 à 8 chez Euclide).

   Parvenus à ce point, nous sommes capables de définir aussi la relation "être plus petit que": a est plus petit que b si et seulement si il existe un c avec $a+c \equiv b$. D'où s'ensuit un autre principe qu'on peut nommer le principe de monotonie : **(P3)** Si a est plus petit que b on a aussi : $m(a)$ est plus petit que $m(b)$.

En général on n'a pas la chance de trouver des relations simples comme $a \equiv 3e$.

Pour une mesure exacte de tous les segments il nous faut d'autres principes.

D'abord on doit former des parties de l'unité, c'est-à-dire qu'on dispose pour tout entier naturel n, d'un segment e' avec $ne'=e$, parce que nous usons du système décimal il est confortable de choisir des puissances de 10 pour n. On parle de la divisibilité des grandeurs. Pour les segments, la divisibilité est garantie par la possibilité de construire des parties d'un segment à l'aide du théorème de Thalès, donc il nous faut quitter le premier livre des *Éléments*. Mais comme nous l'avons déjà vu, la divisibilité n'est pas suffisante pour garantir qu'on peut mesurer exactement un segment quelconque, souvenez vous de la diagonale du carré ou racine de 2. Pour y arriver il faut avoir une sorte de continuité qui garantisse qu'un processus infini de mesure converge vers une valeur bien définie. Autrement dit, il nous faut quitter le domaine des fractions décimales finies ou périodiques pour travailler avec de telles fractions infinies, un fait, que nous expliquerons tout de suite. Dans le cas des segments on utilise deux axiomes. L'un c'est l'*axiome* dit d'*Archimède-Eudoxe* qui dit qu'on peut multiplier le plus petit de deux segments de telle façon que ce multiple soit plus grand que le plus grand. Cet axiome exclut l'existence d'un segment qui soit "non-mesurable par grandeur" c'est-à-dire qui soit plus grand que tout autre segment. Cet axiome est d'ailleurs d'une grande importance dans les fondements de la géométrie parce que c'est cet axiome qui garantit la longueur infinie des droites, qui est donnée dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique mais pas dans la géométrie sphérique. Le second axiome est un *axiome de continuité* comme le principe des intervalles emboités ou un énoncé comparable pour les coupures de Dedekind. Si on travaille avec les coupures de Dedekind l'axiome d'Archimède-Eudoxe est une simple conséquence de l'axiome de continuité ce qui n'est plus vrai dans le cas général.

Tout ce qui précède nous garantit le fait suivant (qui est d'ailleurs à démontrer !) :

Après avoir choisi une unité e, on peut assigner à tout segment a un nombre réel $m(a)$ avec les propriétés P1 à P3 et $m(e) = 1$. On a de plus $a = m(a)e$. Pour arriver à cette mesure on a en général besoin d'utiliser les parties 1/10, 1/100,1/1000 de l'unité etc., pour améliorer l'approximation. Les mesures qui correspondent à ces approximations sont des nombres décimaux finis ; la mesure exacte est la limite de ces nombres décimaux finis, c'est-à-dire en général un nombre décimal infini. On le voit, d'un point de vue mathématique, mesurer exactement est assez difficile ! De plus, il est clair qu'une mesure réelle n'est jamais exacte. Nous rencontrerons donc la différence entre l'idéal mathématique et la réalité.

Dans le cas des segments, la situation se simplifie parce qu'on peut démontrer : $m(a) = m(b)$ si et seulement si a est congruent à b. C'est-à-dire que deux segments sont congruents si et seulement si ils ont la même mesure. Autrement dit, il ne faut pas distinguer ces deux concepts dans le cas présent parce que les classes selon les deux relations sont les mêmes (Euclide parlait toujours d'égalité).

Pour les angles la situation est plus ou moins analogue à celle des segments. Une vraie différence ne se fait voir que dans le cas des aires. On se souvient que nous avons défini une aire comme une classe d'équivalence de polygones multicongruents. Mais il existe bien sûr des figures qui sont multicongruentes sans être congruentes. Donc on n'a certainement pas la réciproque du principe P1 pour les aires. Il est surprenant que l'on puisse démontrer le théorème suivant, dans lequel m signifie la mesure usuelle des aires des polygones, définie par exhaustion avec des carrés, ce qui revient à dire que $2m(triangle)=m(b)m(h)$ où $m(b)$ est la mesure de la base et $m(h)$ celle de la hauteur : Deux polygones sont de même mesure d'aire si et seulement si ils sont multicongruents. Ce théorème fut démontré en 1832 par l'Allemand aujourd'hui complètement oublié P. Gerwien et un an plus tard par Farkas Bolyai, le père du fameux J. Bolyai, un des inventeurs de la géométrie non-euclidienne. Sa véritable importance n'était pas estimée avant l'époque des *Fondements de la géométrie* de Hilbert. Celui-ci a consacré tout un chapitre de son livre au développement d'une théorie des aires purement géométriques, c'est-à-dire sans recours aux nombres réels. Cette théorie était élémentaire pour Hilbert, en ce sens qu'elle n'utilise pas les axiomes de la continuité, les axiomes du quatrième groupe c'est à dire l'axiome d'Archimède-Eudoxe et l'axiome de complétude. De plus un doctorant de Hilbert, Max Dehn, pouvait démontrer en 1901 qu'on n'a pas l'équivalence analogue entre la multicongruence des volumes et leurs mesures, il y a des volumes de même mesure qui ne sont pas multicongruents.

En passant je veux noter qu'on n'a pas besoin de réduire le problème de la mesure des aires (par exemple d'un triangle) à un calcul du type $1/2m(b)m(h)$. La théorie de la multicongruence admet dans le cas euclidien la réduction d'une aire polygonale quelconque à une aire triangulaire ; la dernière est multicongruente à une aire triangulaire ayant un côté donné (l'unité si l'on veut). Par conséquent, on peut prendre comme mesure d'aire la mesure de la longueur de la hauteur, qui est un segment, du triangle à base fixe. Autrement dit : la théorie de la multicongruence admet la réduction du problème de la mesure d'aire à celui des segments d'une manière géométrique c'est-à-dire sans usage des processus infinis comme l'exhaustion. Il semble que cette idée fut détaillée pour la première fois par G. Veronese (1897).

Pour terminer cette excursion dans un domaine assez abstrait je vais brièvement esquisser les propriétés les plus importantes de ce qu'on appelle aujourd'hui un *domaine de grandeurs*. Autrement dit, nous voulons caractériser d'une manière abstraite la structure sous-jacente à des exemples aussi divers que les longueurs, les aires, l'argent etc., c'est-à-dire des ensembles dans lesquels on peut introduire une mesure.

L'idée de caractériser et d'analyser un tel domaine fut conçue pour la première fois - après les axiomes d'Euclide et un usage fréquent des énoncés semblables dans la géométrie - dans la première moitié du 19e siècle par Bernard Bolzano (1781-1848) dans sa "Groessenlehre", (publication posthume). (Comparer, par exemple, le début des "Éléments de géométrie" par Legendre : "Axiomes: 1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. 2. Le tout est plus grand que sa partie. Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé. 4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite. 5. Deux grandeurs, lignes, surface ou solide, sont égales, lorsqu'étant placées l'une sur l'autre elles coincident dans toute leur étendue. "Rien de plus chez Legendre !")

Elle fut reprise une cinquantaine d'années plus tard par le mathématicien allemand Ludwig Otto Hölder (1859-1937). Dans la suite, nous utiliserons un langage moderne, en particulier le langage des ensembles.

Soit donné un ensemble G, une opération binaire $+: GxG \rightarrow G$ et une relation < sur GxG. Un tel domaine $(G,+,<)$ est appelé *domaine de grandeur* si et seulement si les conditions suivantes sont données :

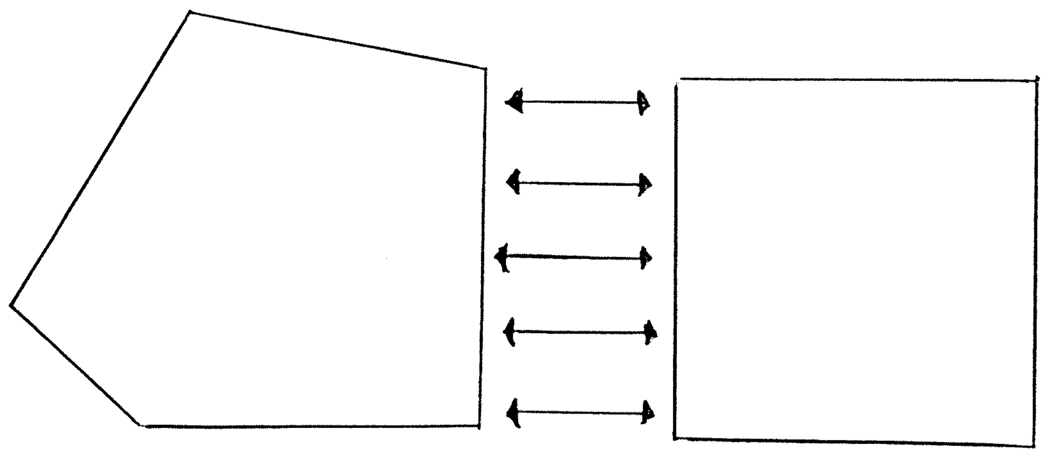
(A) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (associativité de l'addition)
(C) $a+b=b+a$ (commutativité de l'addition)

(T) On a toujours soit $a<b$ soit $a=b$ ou $a>b$ (loi de trichotomie)

(S) L'équation $a+x=b$ est résoluble si et seulement si $a<b$ (loi de la résolubilité).

Un exemple d'un domaine de grandeur nous est fourni par les classes d'équivalence des segments ou par les longueurs (notez que l'ensemble G est donc un ensemble de classes et qu'au niveau des classes la congruence des segments est exprimée par l'identité de la classe correspondante. Si on dénote la classe d'un segment AB par $[AB]$, on peut décrire $AB=CD$ si et seulement si $[AB]=[CD]$).

En rappelant qu'une classe n'est pas autre chose qu'un ensemble défini d'une manière particulière il est clair qu'on peut étendre la définition de l'addition des segments et celle de la relation "est plus petit que" aux classes aussi. Les classes d'équivalence des figures (=polygones) selon la multicongruence, donc les aires, nous fournissent un autre exemple d'une domaine de grandeurs. Dans cet exemple, l'addition se fait par réunion par rapport à une partie congruente des frontières de deux figures :



(Il n'est pas facile de préciser l'idée d'un polygone et celle de la somme de deux polygones, pour nous ici les remarques en haut sont suffisantes).

Même les nombres naturels et rationnels positifs obéissent aux conditions (A) à (S). Mais il faut observer que ces conditions ne sont pas tirées de l'idée de nombre mais de celle de mesure.

Sur la base de (A) à (S) on peut facilement démontrer d'autres propriétés simples comme :

si $a<b$ *et* $b<c$ on a aussi $a<c$ (transitivité),
si $a<b$, on a aussi $a+c<b+c$ (monotonie),
si $a+c<b+c$, on a aussi $a<b$ (réciproque de la monotonie),
si $a+c=b+c$, on a aussi $a=b$.

Pour $a+a+...+a$ (n-fois) on écrit na avec un nombre naturel n. Si un domaine de grandeurs G possède la propriété que pour chaque a de G et chaque nombre naturel n il existe un x de G avec $nx=a$, on dit que le domaine est *divisible* et on écrit aussi $x=a/n$. Alors on peut former des multiples comme $m(a/n)$ pour lesquels on écrit $(m/n)a$. L'addition des grandeurs se transfère facilement pour un domaine divisible aux multiples rationnels du type $(m/n)a$. Il est fascinant qu'on obtienne ainsi une justification pour la loi d'addition des fractions : $(m/n)a+(k/l)a=((ml+nk)/nl)a$.. Pour démontrer cette identité il faut multiplier l'équation par nl et user de quelques identités simples comme $m(l/m)a=a$.

Le cadre des domaines de grandeurs divisibles est approprié à des questions comme les suivantes : Après avoir choisi une grandeur e de G comme unité, peut-on écrire chaque grandeur a de G dans la forme $a=m(a)e$? Quels nombres entrent comme mesure $m(a)$? Pour toutes les grandeurs a et b existe-t-il toujours une mesure commune c'est-à-dire une grandeur c avec $a=nc$ et $b=mc$? Quels nombres sont m et n ? Comme nous l'avons déjà vu dans cette brochure la réponse en général est "non", que l'on pense à la diagonale du carré. Par contre on peut démontrer facilement qu'un domaine de grandeurs divisibles est toujours dense c'est-à-dire qu'il existe toujours, en lui, entre deux grandeurs différentes une troisième grandeur, et par conséquent une infinité. Donc un domaine de grandeur divisible ressemble beaucoup aux nombres rationnels.

Pour garantir que la réponse aux questions posées en haut est toujours positive il faut une ou plusieurs conditions de continuité ou de complétude comme on dit aujourd'hui. Soit donc $(G,+,<)$ un domaine de grandeurs divisibles. Parce que la structure que nous avons supposée est assez pauvre (par exemple nous ne disposons point d'une notion de convergence et par conséquent de limite) la possibilité la plus simple d'introduire l'idée de continuité est celle des *coupures de Dedekind*. Pour définir ces entités on n'a besoin que de la relation <.

<u>Définition</u> : Une coupure de Dedekind (U,V) dans le domaine de grandeurs (G,+,<) est une paire de sous-ensembles U et V de l'ensemble G avec les propriétés suivantes :

(1.) $U \cup V = G$

(2.) $U \cap V = \varnothing$

(3.) pour tout a de U et tout b de V on a $a<b$.

L'idée des coupures fut introduite par Richard Dedekind en 1872 dans son ouvrage : *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Son but en était la construction des nombres réels sur la base des nombres rationnels. Dans son travail très concis qui est, aujourd'hui encore, intéressant à lire, Dedekind explique comment les coupures peuvent exprimer le fait qu'il y a des lacunes dans le domaine des nombres rationnels. Ce fait se reflète dans la différence entre les coupures qui sont engendrées par un nombre rationnel (comme $U=\{q\in Q|q<2 \text{ ou } q=2\}$, $V=\{q\in Q|q<2\}$ qui est engendré par 2) et ceux qui ne le sont pas (comme $U=\{q\in Q|q<0 \text{ ou } q^2<2\}$ et $V=\{q\in Q|q\leq 0 \text{ ou } q^2>2 \text{ ou } q^2=2\}$). La dernière coupure est engendrée par le "nombre" racine de 2, qui n'est pas rationnel. Donc cette coupure n'est pas engendrée par un nombre (rationnel) ! L'idée révolutionnaire de Dedekink était de substituer la coupure à la place du "nombre" racine de deux.

La définition d'un domaine de grandeurs divisible continu est maintenant très simple : un tel domaine est appelé complet si et seulement si chaque coupure de Dedekind est engendré par une grandeur du domaine. On peut démontrer que les nombres qui résultent d'une mesure dans un domaine de grandeurs, divisible et complet sont les nombres réels positifs et rien d'autre. Nous sommes donc arrivés encore une fois au bout de notre chemin : les nombres réels positifs sont la réponse aux problèmes de mesure. Autrement dit : les nombres réels sont le modèle universel pour l'idée de continuité.

Littérature :

Fragen der Elementargeometrie, édité par F. Enriques. Edition allemande par H. Thieme. Vol. 1 (Leipzig et Berlin, 1911)

Hilbert, D. : *Fondements de la géométrie - Editions du CNRS.*

Rautenberg, W. : *Elementare Grundlagen des Analysis* (Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich -1994) .

TITRE :	ACTIVITES GEOMETRIQUES POUR LE COLLEGE ET LE LYCEE, PRESENTEES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE. VOLUME I
AUTEURS :	Groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Strasbourg : Michel CINUS ; Paul-Henri CLAVIER ; Agnès CUZIN ; Jean-Pierre FRIEDELMEYER ; Marcel KRIER Michel SARROUY ; André STOLL ; Klaus VOLKERT.
DATE :	Janvier 1996
EDITEUR :	IREM de Strasbourg (S.164)
MOTS-CLES :	Aire, comparaison, équidécomposabilité, Euclide, Frege, incommensurabilité, irrationnalité, mesure, multicongruence, quadrature, tangram.
RESUME :	Ce premier volume, centré sur la notion de mesure, développe le thème des grandeurs incommensurables pour retrouver le sens originel de la notion de nombre irrationnel. Il revient aux sources de la démonstration géométrique, développée par Euclide au moyen de la méthode des aires, laquelle permet de contourner les problèmes numériques liés aux irrationnels tout en favorisant un apprentissage de la démonstration au collège.
NOMBRE DE PAGES :	102
ISBN :	2-911446-00-3