A VOS STYLOS

PROBLÈME 30

Énoncé

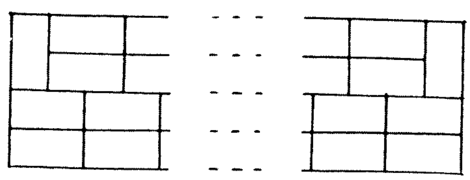
Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?

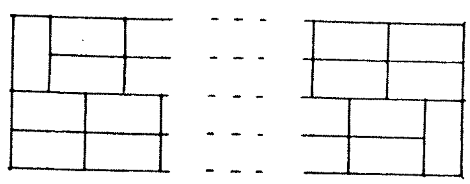
Solution

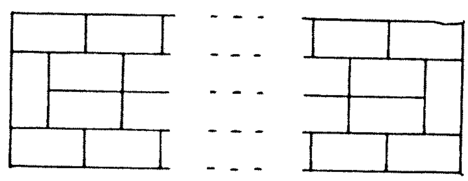
Ce problème est posé et résolu dans un article de R. L. Graham paru dans "The Mathematical Gardner" (D. Klarner Ed., Wadsworth 1981). Nous avons reçu de J. Lefort (Colmar) la solution que voici.

Si un rectangle admet un pavage répondant à la question, ses dimensions p et q vérifient les trois conditions suivantes :

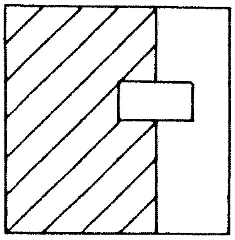
a) L'un au moins des nombres p et q est pair. Sinon, l'aire pq du rectangle serait impaire et il ne pourrait être pavé par des dominos.
b) Les dimensions p et q valent au moins 5. En effet, si un rectangle de dimensions $p \times 4$ (avec $p > 2$) est pavé de façon qu'aucune droite verticale ne passe entre les dominos, on est dans l'un des trois cas suivants :





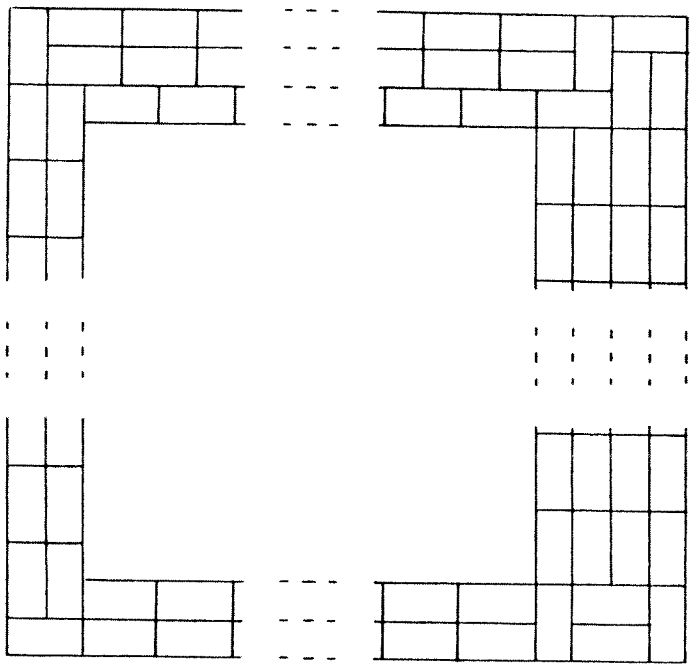


et il existe donc une droite horizontale évitant tous les dominos. Le cas des rectangles $p \times 3$ et $p \times 2$ s'élimine encore plus facilement (nous laissons de côté le cas trivial 1×2, écarté par l'énoncé).



c) Le rectangle n'est pas un carré 6×6. En effet, si un pavage de ce carré répondait à la question, chacune des 10 droites découpant le carré en deux rectangles à dimensions entières devrait couper en deux un domino au moins et même deux dominos au moins (car l'aire hachurée ci-contre est impaire et ne peut donc être pavée par des dominos); la pavage devrait donc comporter au moins 20 dominos, or il n'en a que 18.

Ces trois conditions nécessaires sont aussi suffisantes. En effet, si un rectangle vérifie ces conditions et si l'une des dimensions est impaires, on a affaire à un rectangle $(5 + 2a) \times (6 + 2b)$, avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$, que l'on peut paver ainsi :



(le rectangle central, de dimension $2a \times 2b$, pouvant être pavé n'importe comment). Et si les deux dimensions sont paires, c'est un rectangle $(6 + 2a) \times (8 + 2b)$, que l'on peut paver comme sur la figure page suivante.

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

Indication

Utiliser comme origine de l'axe des temps l'instant de début de la chute de neige.

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x, y) = 1$, on a aussi $d(f(x), f(y)) = 1$.

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Etudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0,1[$.

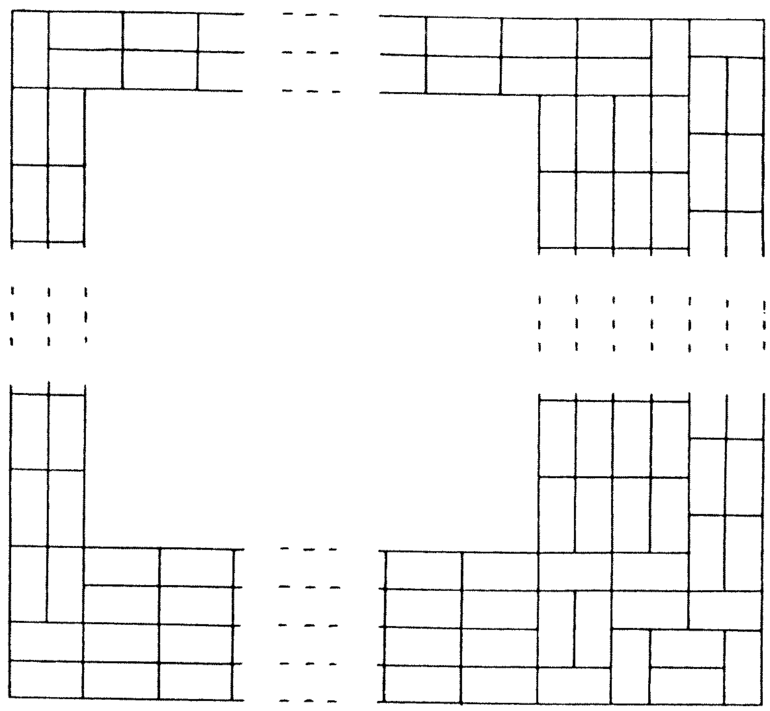


Figure se rapportant à la solution du problème 31