## PROBLÈME 31

### Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

### Solution

Nous prendrons le village comme origine des abscisses et le début de la chute de neige comme origine des temps. Soient $t_1$, $t_2$ et $t_3$ les instants de départ des trois chasse-neige. Le mouvement d'un chasse-neige est régi par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{constante}}{t - s(x)}$$

où $s(x)$ est l'instant de passage en $x$ du chasse-neige précédent (pour le premier chasse-neige, $s(x) = 0$, début de la chute de neige). Considérant $t$ comme fonction de $x$, on obtient l'équation linéaire $t'(x) = a\big(t - s(x)\big)$ avec condition initiale $(x = 0, t = t_i)$. La méthode de variation de la constante consiste à simplifier cette équation en remplaçant les fonctions $t(x)$ et $s(x)$ par $T(x) = t(x)\,e^{-ax}$ et $S(x) = s(x)\,e^{-ax}$; ceci donne $T'(x) = -aS(x)$, avec condition initiale $(x = 0, T = t_i)$; la solution est

$$T(x) = t_i - a\int_0^x S(u)\,du\ .$$

Les fonctions $T_1$, $T_2$ et $T_3$ qui correspondent aux trois mouvements sont donc

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= t_1 - a\int_0^x 0\,du = t_1\ ;\\
T_2(x) &= t_2 - a\int_0^x T_1(u)\,du = t_2 - t_1 ax\ ;\\
T_3(x) &= t_3 - a\int_0^x T_2(u)\,du = t_3 - t_2 ax + \tfrac{1}{2}t_1 a^2 x^2\ .
\end{aligned}$$

L'abscisse $x$ du point où les trois engins se rattrapent doit vérifier $T_1(x) = T_2(x) = T_3(x)$. L'égalité $T_1(x) = T_2(x)$ fournit $ax = (t_2 - t_1)/t_1$ ; reportant cette valeur dans $T_1(x) = T_3(x)$, on obtient la relation $t_1^2 + t_2^2 = 2t_1t_3$, condition de rencontre des trois véhicules.

En appelant $h$ l'heure du début de la chute de neige et $h_1$, $h_2$ et $h_3$ les heures des trois départs, de sorte que $t_i = h_i - h$, cette condition devient

$$h = \frac{2h_1h_3 - h_1^2 - h_2^2}{2(h_3-h_2)} = h_1 - \frac{(h_2-h_1)^2}{2(h_3-h_2)}.$$

Avec les données de l'énoncé ($h_1 = 0$, $h_2 = 4$, $h_3 = 6$) on trouve $h = -4$ : la neige a commencé à huit heures.

REMARQUE. — On pouvait savoir a priori que le résultat ne dépendrait que des trois instants de départ : tous les autres paramètres qui auraient pu intervenir se résument en une seule constante, $a$, homogène à l'inverse d'une longueur; le résultat, $f(a, h_1, h_2, h_3)$, est, lui, homogène à un temps. En changeant l'unité de longueur sans toucher à l'unité de temps, on voit que $f$ ne dépend pas de $a$.

## PROBLÈME 32

### Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par $E$ la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications $f$ de $E$ dans $E$ qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points $x$ et $y$ de $E$ vérifiant $d(x, y) = 1$, on a aussi $d(f(x), f(y)) = 1$.

### Indication

Si $E$ est le plan ou l'espace, $f$ est une isométrie.

## PROBLÈME 33

### Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$.

## PROBLÈME 34

### Énoncé

Soient quatre plans parallèles. Montrer que l'on peut choisir un point dans chacun d'eux de façon à obtenir les quatre sommets d'un tétraèdre régulier; donner, en fonction des distances deux-à-deux des quatre plans, toutes les valeurs possibles pour la longueur des arêtes du tétraèdre.