PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

RAPPEL DE L'ÉNONCÉ DU PROBLÈME 7 :

Le problème 2 (voir '*L'Ouvert*' n° 73) nous avait amené à en formuler un autre, dont la solution peut d'ailleurs servir à celle de ce problème 2. Il s'agit du problème 7 dont nous rappelons l'énoncé : $ABCD$ étant un quadrilatère quelconque inscrit dans un cercle, démontrer que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, ABD, forment un rectangle.

Deux solutions sont proposées ici, l'une de J.-P. Friedelmeyer utilisant la géométrie élémentaire de Terminale, l'autre analytique de P. Renfer, plus calculatoire mais qui donne un résultat supplémentaire.

SOLUTION DE J.-P. FRIEDELMEYER

Quitte à changer la dénomination des sommets, on peut se ramener à la disposition $ABCD$ de la figure 2, avec C et D du même côté par rapport à (AB). Soit O le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

1. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (fig. 1). Alors I est sur l'arc capable d'où l'on voit $[AB]$ sous l'angle $\frac{\pi+\alpha}{2}$ où $\alpha = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. En effet : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IB}) = \pi + (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) = \pi + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi+\alpha}{2}$ (modulo 2π)
(car I est du même côté que C par rapport à $[AB]$).

Soit K le milieu de l'arc AB ne contenant pas C. Alors $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}) = \pi + \alpha$. K est donc le centre du cercle portant l'arc capable lieu de I, lorsque C décrit l'arc AB.

2. Posons $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = 2\theta$ avec $O < \theta < \pi$. Alors $(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}) = \theta$. Le triangle IKJ est isocèle si J est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABD (fig. 2). On en déduit : $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi-\theta}{2}$ (modulo 2π). Soit Ω l'intersection de (AC) et (BD). Ω est entre C et A et entre B et D nécessairement, et $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \pi - \theta - \alpha$. La bissectrice **intérieure** (ΩX) de $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A})$ est définie par $(\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi-\theta-\alpha}{2}$ et $(\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi-\theta-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\theta}{2}$ (modulo 2π).

(IJ) est donc parallèle à (ΩX). Par permutation des sommets on en déduit que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, DAB, définissent un rectangle dont les côtés sont parallèles respectivement aux bissectrices du couple de droites (AC, BD) (fig. 3).

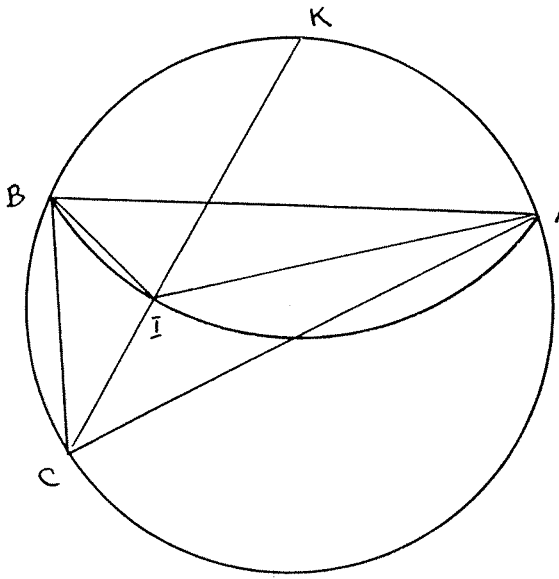

Figure 1

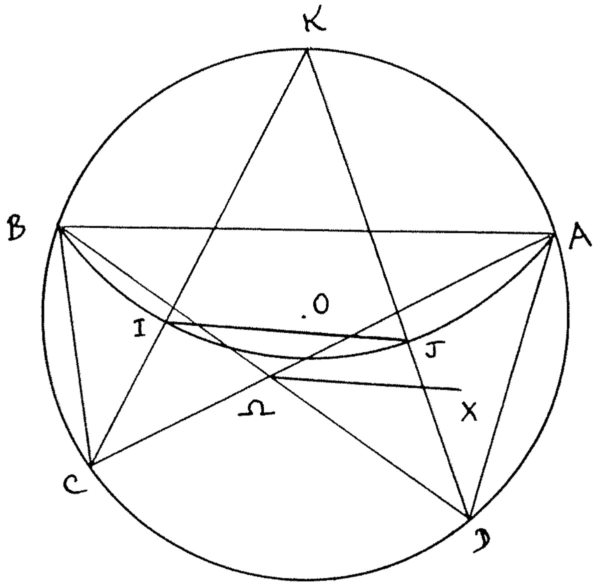

Figure 2

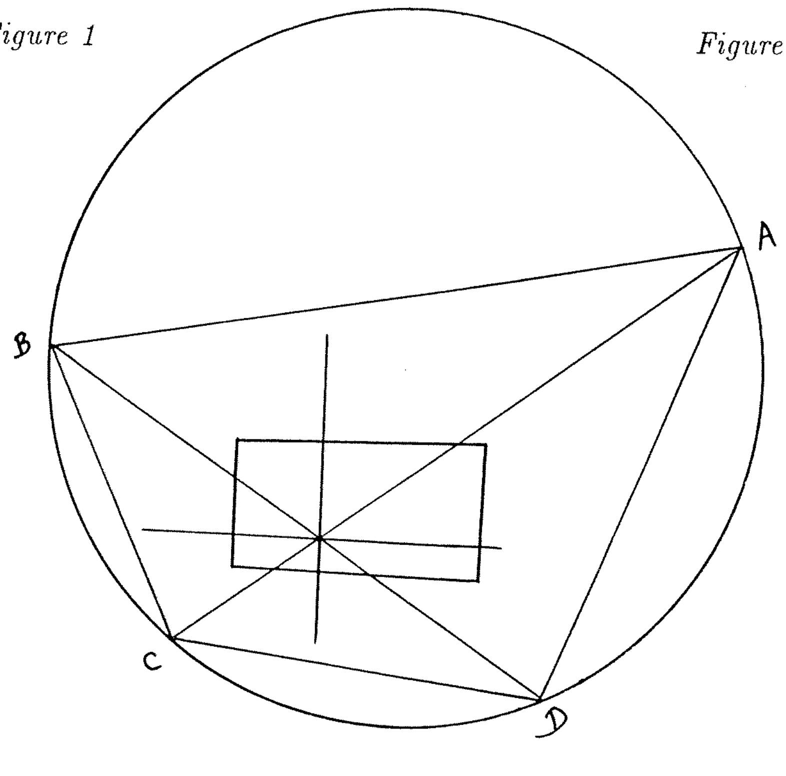

Figure 3

SOLUTION DE P. RENFER

On considère un quadrilatère convexe A_1, A_2, A_3, A_4 inscriptible dans un cercle Γ, de centre O et de rayon 1.
Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les centres des cercles tangents aux deux diagonales et tangents intérieurement à Γ.
Soient I_1, I_2, I_3, I_4 les centres des cercles inscrits respectivement aux triangles $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$.
Soit $2v$ l'angle géométrique entre les deux diagonales. On se propose de démontrer le résultat suivant :

Le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ est un rectangle inscrit dans le quadrilatère $C_1C_2C_3C_4$.
Plus précisément :
I_1 est barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$,
I_2 est barycentre de $(C_3, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$,
I_3 est barycentre de $(C_3, \cos^2 v)$ et $(C_4, \sin^2 v)$,
I_4 est barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_4, \sin^2 v)$.

La démonstration est analytique avec un minimum de calculs!
Soit Ω le point d'intersection des diagonales.
Soient δ_1 et δ_2 les bissectrices des diagonales.
Soit $\mathcal{R}_1$ le repère orthonormé d'origine Ω et d'axes δ_1 et δ_2.
Soit $\mathcal{R}_2$ le repère orthonormé d'origine O et d'axes parallèles à δ_1 et δ_2.
Soient (a, b) les coordonnées de Ω dans le repère $\mathcal{R}_2$.

Soit d la distance ΩC_1 et ρ le rayon du cercle de centre C_1.
Alors : $\rho = d \sin v$ et $OC_1 = 1 - \rho$.
En calculant OC_1^2 dans le repère $\mathcal{R}_2$ on obtient :

$$(a+d)^2 + b^2 = (1 - d\sin v)^2$$
$$d^2 \cos^2 v + 2(a + \sin v)d + a^2 + b^2 - 1 = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation d'inconnue d est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= a^2 + 2a\sin v + \sin^2 v - a^2\cos^2 v - b^2\cos^2 v + \cos^2 v \\ &= a^2 \sin^2 v + 2a \sin v + 1 - b^2 \cos^2 v \\ &= (1 + a\sin v + b\cos v)(1 + a \sin v - b\cos v).\end{aligned}$$

En posant $A = 1 + a\sin v + b\cos v$ et $B = 1 + a\sin v - b\cos v$, on obtient :

$$d = \frac{1}{\cos^2 v}\Big[- a - \sin v + (AB)^{1/2}\Big].$$

C'est l'abscisse de C_1 dans le repère $\mathcal{R}_1$.
On trouve l'ordonnée d' de C_2 en échangeant a et b et en remplaçant v par $\frac{\pi}{2} - v$.
En posant $C = 1 + b\cos v - a\sin v$, on obtient :

$$d' = \frac{1}{\sin^2 v}\big[- b - \cos v + (AC)^{1/2}\big].$$

Soit I le barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$.
Les coordonnées de I dans $\mathcal{R}_1$ sont :

$$-a - \sin v + (AB)^{1/2} \text{ et } -b - \cos v + (AC)^{1/2}.$$

Il reste à prouver que I coïncide avec I_1. Il est facile de calculer la distance r de I à la droite (A_2A_4), qui a pour équation dans $\mathcal{R}_1$: $x \sin v + y \cos v = 0$

$$r = -A + (AB)^{1/2} \sin v + (AC)^{1/2} \cos v.$$

D'après la propriété réciproque de la relation d'Euler, on aura $I = I_1$ si r vérifie : $1 - 2r = OI^2$ (le rayon du cercle circonscrit Γ est 1). Or :

$$\begin{aligned} OI^2 &= (-\sin v + (AB)^{1/2})^2 + (-\cos v + (AC)^{1/2})^2 \\ &= 1 + 2A - 2(AB)^{1/2} \sin v - 2(AC)^{1/2} \cos v \\ &= 1 - 2r. \end{aligned}$$

Le raisonnement est analogue pour les points I_2, I_3, I_4.