LA CYCLOÏDE

André Stoll

L'enseignement des mathématiques en S.T.S.: et si, pour respecter l'esprit du programme, on changeait de méthode ?

L'exposé des objectifs de l'enseignement des mathématiques en section de Technicien Supérieur insiste sur le fait que celui-ci doit "contribuer au développement de la formation scientifique grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche scientifique: mathématisation d'un problème (modélisation), travail d'expérimentation et de recherche, construction et mise en oeuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus au regard du problème posé."
Dans cette optique, j'ai essayé de repenser ma pédagogie en S.T.S. et d'organiser mes cours en relation avec mes collègues de technologie et de physique. Tout en respectant les impératifs du programme et de l'examen, j'ai été amené à modifier mon enseignement tant dans la forme que dans le contenu, en proposant essentiellement des activités de résolution de problèmes où les élèves mettent en oeuvre les outils théoriques vus les années précédentes. Souvent aussi ces problèmes permettent de découvrir l'insuffisance de ces outils et, dans ce cas, d'introduire des notions nouvelles qui sont ainsi immédiatement mises en oeuvre.

Le problème ci-dessous est un exemple d'une activité proposée en S.T.S. option C.P.I. (Conception de Produits Industriels). Il est inspiré d'une courbe - la cycloïde - en grande vogue au XVII$^{\text{ième}}$ siècle en Europe. De nombreuses parties de ce problème peuvent faire l'objet d'un T.D. ou d'un module en classe de terminale ou même de première.
Les outils utilisés pour résoudre ce problème sont variés:

- Trigonométrie
- Recherche de l'équation d'une courbe en coordonnées paramétriques
- Relation entre les notions de dérivée et de vitesse
- Tangente à une courbe par des procédés géométriques puis à l'aide de la dérivée.
- Dérivation de fonctions composées
- Primitive et application au calcul de la longueur d'une courbe
- Théorème de l'énergie cinétique étudié en physique et en mécanique
- Equation différentielle du second ordre

Le bilan? Comme c'est la première année que je travaille presque exclusivement par problèmes de synthèse, il est évidemment trop tôt pour tirer des conclusions. Toutefois, je noterai les deux points suivants:

- Les élèves ont enfin compris le lien existant entre le cours de mathématiques et d'autres cours, pour lesquels elles représentent un outil indispensable.
- Paradoxalement, ils rechignent moins à CHERCHER des solutions aux problèmes qui ne sont pas liés directement à leur matière principale et, parfois, nous faisons des mathématiques.

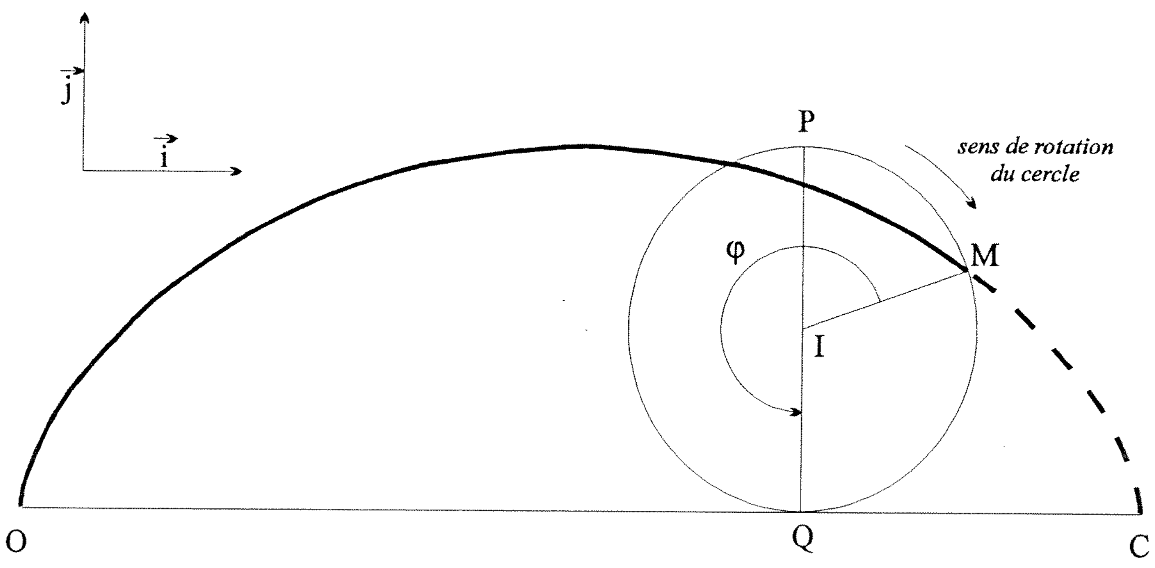
1. Introduction

Dans l'*Histoire de la Roulette* datée du 10 octobre 1658, Blaise Pascal écrit:
La roulette (aussi appelée trochoïde ou cycloïde) *est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; [...] ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire [...] supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*
Dans ce même texte, Blaise Pascal nous apprend que les plus grands mathématiciens de l'époque ont cherché à "*connaître la nature et les propriétés* " de cette courbe. On y trouve entre autres les noms de Roberval, de Fermat, de Descartes, de Wren, de Huyghens...Chacun trouvant une propriété de la cycloïde ou une autre démonstration d'une propriété déjà connue.
Le problème ci-dessous propose de trouver et de démontrer quelques propriétés de la cycloïde, souvent par des méthodes "modernes" parfois par des méthodes (apparemment) plus anciennes.

2. Définition de la cycloïde.

Soit (C) un cercle de centre I et de rayon r;. La cycloïde est la trajectoire d'un point M du cercle (C) lorsque celui-ci roule sans glisser sur une droite. Cette droite est appelée la base de la cycloïde (cf. figure 1).

figure 1



Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité: $OQ = \overset{\frown}{QPM}$

3. Tangente et normale à la cycloïde à un instant t quelconque.

La méthode.

Les méthodes (dérivée d'une certaine fonction,...) vues jusqu'à présent ne s'appliquent pas. Il nous faut donc trouver une autre manière de procéder. La mécanique nous en fournit une.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, nous appliquerons le principe énoncé par Gilles Personne de Roberval au XVII$^{\text{ième}}$ siècle: La tangente (Roberval écrit *la touchante*) à une courbe en un point M est la direction du mouvement de ce point. (Voir encadré ci-contre).

> DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.
> Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de proprietez spécifiques, qui nous fassent connoitre les mouvemens qui les décrivent.
>
> *Axiome, ou principe d'invention.*
>
> LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.
> Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention,
>
> *Regle generale.*
>
> PAR les proprietez spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.
> La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

Pour faciliter le travail de recherche de la direction lorsque le point M est animé de plusieurs mouvements, nous utiliserons l'outil vectoriel et nous représenterons chaque mouvement par un vecteur - appelé « vecteur vitesse » qui a pour direction et sens, la direction et le sens du mouvement et pour norme la vitesse linéaire du point.

Par exemple si le point M se déplace sur une droite (d), le déplacement de ce point sera représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la droite (d), pour sens le sens du déplacement et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 3).

Lorsque le point M est fixe sur une demi-droite [Ow qui pivote autour du point O avec une vitesse angulaire ω (exprimée en rad/s), le point M décrit un cercle de centre O et de rayon OM. Le déplacement de M sera représenté par un vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la perpendiculaire à (OM), pour sens, le sens de rotation et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 2).

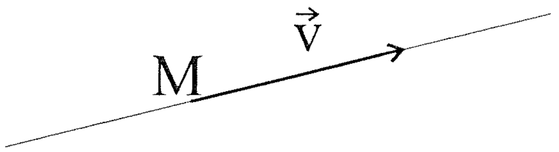


figure 3

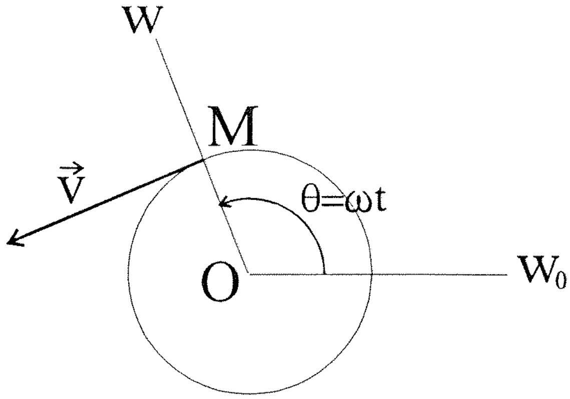


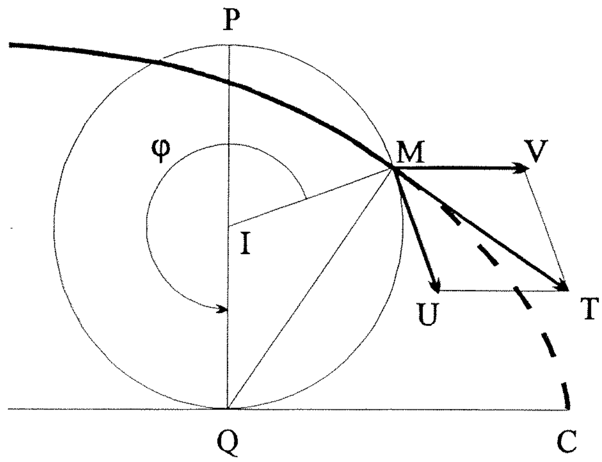
figure 2

Lorsque le déplacement de M résulte de la composition de plusieurs mouvements, celui-ci sera représenté par la somme des vecteurs représentant chaque mouvement.

Application à la cycloïde.

Le mouvement du point M, le point générique de la cycloïde, peut être décomposé en deux mouvements: un mouvement de translation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MV}$ et un mouvement de rotation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MU}$. (cf. figure 4)

figure 4



1. Préciser la direction et le sens de ces deux vecteurs et montrer que "le roulement sans glissement" se traduit par l'égalité MU=MV.
2. En déduire un vecteur directeur $\overrightarrow{MT}$ de la tangente à la cycloïde lorsque le point M n'est pas en C.
3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{MT}$ lorsque le point M est en C ?
4. Montrez que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}\right)$ est la moitié de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IP}\right)$.

   Déduisez-en que les droites (MQ) et (MT) sont orthogonales et que:

   la normale à la cycloïde en M est la droite (MQ).

5. On suppose dans cette question et la suivante, que la vitesse angulaire ω du cercle (C) (en d'autres termes $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) est constante. Exprimez la norme du vecteur $\overrightarrow{MT}$ et la vitesse du point M en fonction de la variable t.

6. Application: longueur d'un arc de cycloïde.

   Soit la fonction $S: t \longrightarrow S(t) = \overset{\frown}{OM}$; En remarquant que $\dot{S}(t) = v(t)$ (la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t c'est à dire le temps), montrez que:

$$\overset{\frown}{OM} = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right) = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)^2$$

Et en particulier : $\overset{\frown}{OC} = 8r$

4. Equations paramétriques de la cycloïde.

1. Montrez qu'avec les notations de la figure 1, une représentation paramétrique de la cycloïde dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

2. Calculez les dérivées de x et de y par rapport à la variable φ et déduisez-en que:

$$\overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 2r\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

3. Donnez un vecteur unitaire de la tangente et un vecteur unitaire de la normale en M à la cycloïde.
   Déduisez-en la tangente à la cycloïde en O et en C.
4. On appelle u l'angle orienté $u = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{IP}\right)$; montrez que le rapport $\dfrac{\sin^2 u}{y}$ est constant.

5. Le pendule cycloïdal de Christian Huygens

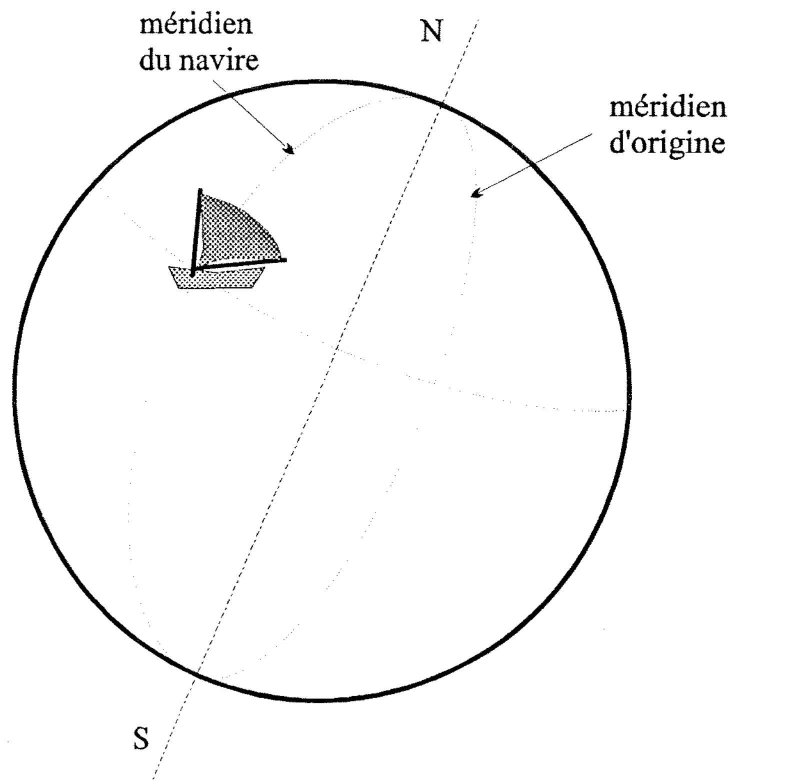
La découverte des Amériques et l'expansion du commerce maritime obligent les marins à changer leurs habitudes. Contrairement à leurs prédecesseurs, les navigateurs du XVII$^{\text{ième}}$ siècle s'éloignent des côtes et s'aventurent en haute mer. Aussi, leur faut-il apprendre à se repérer convenablement c'est à dire à trouver la latitude et la longitude du bateau. Si la latitude du navire s'obtient assez facilement en mesurant la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, il n'en est pas de même de la longitude: il n'existe aucun moyen simple de l'évaluer! De nombreuses cargaisons sont perdues et des fortunes gaspillées.

Les pouvoirs prennent rapidement conscience de ce problème et promettent de fortes récompenses à celui qui résoudra le secret des longitudes: le Stathouder de Hollande promet 25000 florins, Charles II d'Angleterre un traitement de 100 livres l'an et le Cardinal de

Richelieu une pension de 2000 francs...Toutes ces récompenses incitent les savants à se mettre au travail.

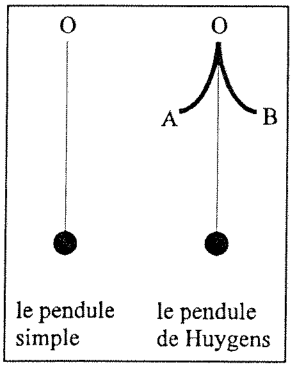
Un des principes pour trouver la longitude est de comparer l'heure locale, celle du bateau, à l'heure du port d'attache ou du méridien d'origine. (Cf.. encadré ci contre). Mais pour cela, il faut transporter l'heure du méridien d'origine sur le navire.

Le pendule de Galilée ou pendule simple permet de régulariser assez correctement les horloges terrestres dont le support est immobile. Malheureusement, l'isochronisme de ce pendule n'est qu'approximatif car la période des oscillations dépend de l'amplitude de ces oscillations. Une horloge de ce type se dérègle trop rapidement sur un navire.



Supposons par exemple que le soleil soit au zénith du bateau et qu'on sache qu'au même instant, il est 15 heures sur le méridien d'origine. Dans ce cas, le navire est à 3 heures à l'ouest c'est à dire à 45 degrés à l'ouest du méridien d'origine.

Pour corriger le défaut du pendule simple, Christian Huygens a l'idée de munir le pendule de deux arcs courbes entre lesquels ont lieu les oscillations. Mais, quelle forme faut-il donner à ces arcs ? Dans ses premières tentatives, Huygens procède par tâtonnements.



En 1659, il démontre deux propriétés de la cycloïde qui lui permettront de construire un pendule dont les oscillations sont parfaitement isochrones c'est à dire indépendantes de l'amplitude des oscillations. Une horloge munie d'un tel pendule garde l'heure du méridien d'origine quel que soit les mouvements du navire et, par suite, permet de déterminer la longitude du navire.

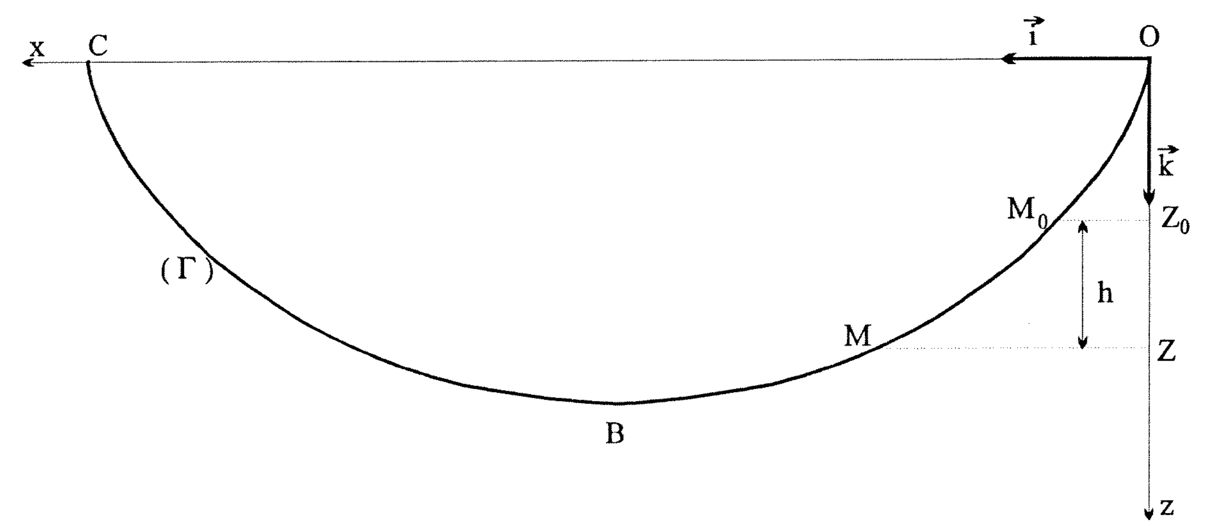
Le but du problème ci-dessous est de présenter les deux propriétés découvertes par Christian Huygens qui sont le fondement du pendule cycloïdal.

Première propriété: la cycloïde est une courbe isochrone.

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement dans un plan vertical sur la cycloïde Γ engendrée par un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses (cf. figure 5)

Il s'agit de montrer que le temps mis par le point matériel M pour revenir à sa position initiale est indépendante de la position M_0 d'où on lâche le point matériel avec une vitesse nulle.

figure 5



Notations: soit f une fonction de la variable t (c'est à dire le temps), on note, suivant la coutume, $\dot{f}$ sa dérivée.

1. Montrez qu'une représentation paramétrique de la cycloïde Γ est: $\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = 0 \\ z = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$

   Remarque: dans cette représentation paramétrique, φ est en fait une fonction inconnue de la variable t. La connaissance de cette fonction φ nous donne la solution du problème.

2. Quelle relation peut-on écrire entre l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ et la vitesse v(t) du point M à l'instant t ?

   Exprimez v(t) et s(t) en fonction de $\varphi(t)$ et de $\dot{\varphi}(t)$.

   (Rappel: l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ n'est rien d'autre que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BM}$ affectée du signe $-$ lorsque M est entre O et B, et du signe + lorsque M est entre B et C)

3. Montrez en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que: $v(t)^2 = 2g(z - z_0)$ (*).

4. Calculez $\dot{z}$ et montrez que $\dot{v} = g\cos\frac{\varphi(t)}{2}$ (indication: dérivez la relation (*))
5. Déduisez de ce qui précède que la fonction s est solution de l'équation différentielle $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ où $\omega = \sqrt{\frac{g}{4r}}$ avec les conditions initiales $\begin{cases} s(0) = \overset{\frown}{BM_0} \\ v(0) = 0 \end{cases}$
6. Résolvez cette équation différentielle.
7. Quelle est la période des oscillations ?

Conclusion 1:

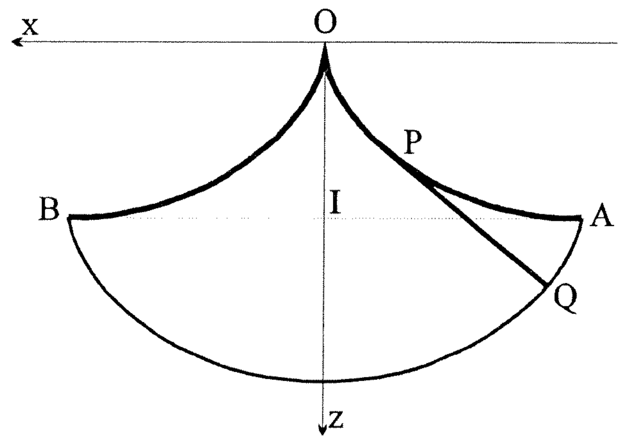
La période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations

Deuxième propriété:

Soit $\overset{\frown}{OB}$ et $\overset{\frown}{OA}$ deux demi-cycloïdes identiques. Un fil dont une extrémité est fixée en O s'enroule sur cette courbe. La partie libre [PQ] du fil reste toujours tendue. Il s'agit de montrer que **lorsque la longueur du fil est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OB}$ alors l'extrémité libre du fil décrit une cycloïde dont la base est la droite (AB)** (cf. figure 6).

8. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $\overset{\frown}{OB} = 4r$.
   Déduisez-en la longueur PQ.
   Quelle est la direction de la droite (PQ)?
   Calculez en fonction de φ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ puis du vecteur $\overrightarrow{AQ}$.
   Déduisez-en que la trajectoire du point Q est une cycloïde.

figure 6

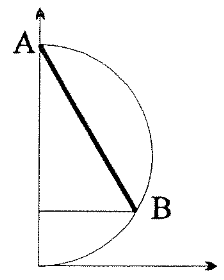


En 1663, pour vérifier l'exactitude des horloges conçues par Huygens, le Capitaine Holmes s'embarque avec deux horloges munies de pendules cycloïdaux. Huygens sait que, même sur la terre ferme, ces horloges ne sont pas parfaitement isochrones car il a négligé la résistance de l'air et les imperfections du fil. Il pense que ces défauts ne sont pas rédhibitoires en ce qui concerne la détermination de la longitude. Sans attendre le retour du navire, Huygens essaie de tirer le maximum de profit de son invention et réclame ses récompenses. Celles-ci lui seront d'ailleurs accordées. En 1666, Huygens sera invité par Colbert à faire partie de l'Académie Royale des Sciences.

6. La cycloïde est "la courbe de plus rapide descente"

1. Avec les notations du § précédent, quel temps faut-il au point matériel M pour aller de O à B le long de la cycloïde (le point matériel étant laché en O sans vitesse initiale)?
2. Quelle temps faudrait-il au point M pour aller de O à B le long de la droite (OB) ?
3. (Cf. figure 7) Montrer que le temps mis par un point matériel pour aller de A vers B le long du segment [AB] est indépendant du point B pris sur le demi-cercle

figure 7



Conclusion:

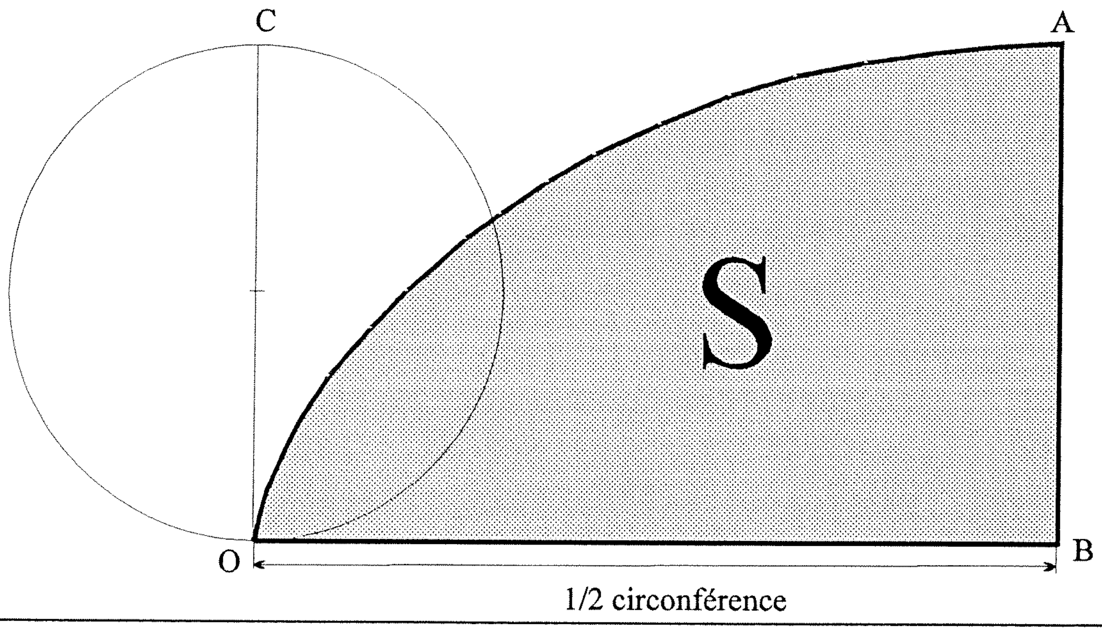
Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus rapide !

<u>Commentaire</u>: on peut d'ailleurs démontrer que la cycloïde est la "courbe de plus rapide descente" (aussi appelée la brachistochrone pour la pesanteur) c'est à dire le chemin le plus rapide de O vers B pour un point matériel pesant, abandonné sans vitesse initiale en O et glissant sans frottement le long de cette courbe.

7. Quadrature de la cycloïde.

But de cette partie: trouver l'aire $\mathcal{A}$ de la surface (S)=(OAB) où l'arc $\overset{\frown}{OA}$ est l'arc de cycloïde de base [OB] engendré par le cercle de diamètre [OC] (cf. figure 8).

figure 8



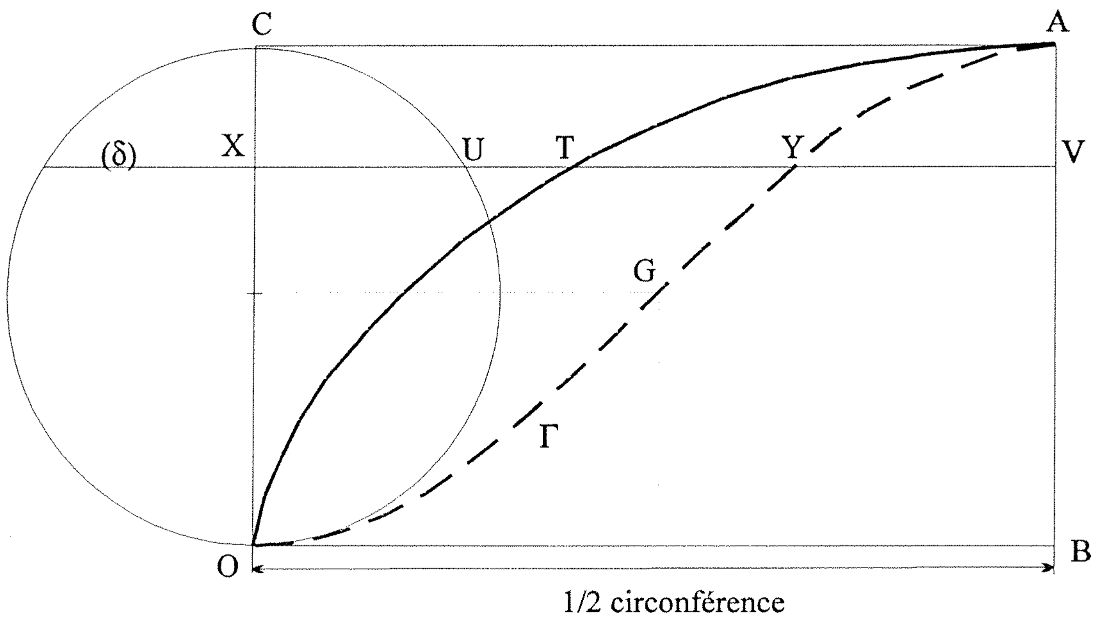
Première méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Roberval

Soit (δ) une droite parallèle à la base de la cycloïde. Cette droite (δ) coupe [OC] en X, le cercle en U et la cycloïde en T (cf. figure 9) . Sur (δ), on prend le point Y tel que $\vec{XU} = \vec{TY}$.

1. Donnez une représentation paramétrique de l'arc de cycloïde $\overset{\frown}{OA}$ et de la courbe Γ décrite par le point Y lorsque X décrit [OC]
2. Déduisez-en qu'une équation de Γ est: $y = r\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right)$ avec $0 \leq x \leq \pi r$ et que le point G de la courbe Γ d'abscisse $\pi r/2$ est centre de symétrie de Γ.
3. Montrez que l'aire de la surface délimitée par Γ, [BA] et [OB] est la moitié de l'aire du rectangle (OCAB). Calculez cette aire.
4. Calculez l'aire de la surface délimitée par Γ et l'arc de cycloïde.
5. Conclusion:

l'aire A est égale à trois fois l'aire du demi-cercle générateur de la cycloïde.

figure 9



Deuxième méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Blaise Pascal.

On découpe la surface (S) en "n tranches horizontales" de même épaisseur Δy. En notant $f(y_k)$ la longueur moyenne de la k-ième tranche alors une approximation de l'aire A est $\sum_{k=1}^{k=n} f(y_k)\Delta y$. En faisant tendre n vers l'infini, on a: $A=\int_0^{2r} f(y)dy$ où f(y)=TV (cf. figure 10)

1. On pose g(y)=TW et h(y)=WV.

   Montrez que: $A=\int_0^{2r} g(y)dy+\int_0^{2r} h(y)dy$.

2. Que représente $\int_0^{2r} h(y)dy$?

   Déduisez-en, sans calcul, que $\int_0^{2r} h(y)dy=\dfrac{\pi r^2}{2}$

3. Montrez que le roulement sans glissement du cercle (C) se traduit par l'égalité: $TW=\overset{\frown}{AW}$.

   On pose i(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AW}$ et j(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BW}$. Démontrez les égalités suivantes: $\int_0^{2r} g(y)dy=\int_0^{2r} i(y)dy=\int_0^{2r} j(y)dy$.

   Calculez $\int_0^{2r} i(y)dy+\int_0^{2r} j(y)dy$ (remarquez que $i(y)+j(y)=\overset{\frown}{AB}$) et déduisez-en que $\int_0^{2r} g(y)dy=\pi r^2$.

4. Conclusion.

figure 10