DANS NOS GROUPES I.R.E.M.

Christine UNDREINER-BACH
Au nom du GROUPE MATHS-ÉCONOMIE

Le groupe de Recherche -Formation MATH-ECO travaille à l'IREM de Strasbourg depuis septembre 1993.
Composé d'une dizaine d'enseignants de Mathématiques et de Sciences Economiques et Sociales, il se propose d'explorer les aspects bidisciplinaires des programmes de Mathématiques des classes de **Première et Terminale ES**.

Le travail du groupe a consisté essentiellement en

- une lecture critique de documents chiffrés et/ou graphiques de toutes provenances.
- la production de Travaux Pratiques communs aux deux disciplines
- la production de documents à l'usage des professeurs sur la modélisation en Economie.
- la préparation et l'animation des stages TCA 124 et TCA 125 intitulés « Les mathématiques: un outil pour l'économie? » inscrits au PAF 94/95. (Ces stages ont réuni au mois d'Avril 95, 11 stagiaires à Mulhouse et 34 stagiaires à Strasbourg)

Pour l'année 95/96 le groupe poursuivra le travail dans ce sens par la publication d'une Brochure IREM et l'animation d'un stage ouvert aux enseignants des deux disciplines.

Le document publié ici avait été envoyé aux stagiaires avant le stage pour leur permettre de le tester avec leurs élèves. Il peut être utilisé en Travaux Pratiques, aussi bien par le professeur de Mathématiques que par celui de Sciences Economiques et Sociales, idéalement bien sûr par les deux conjointement. Il a déjà été testé dans des classes sous des configurations différentes. Il peut trouver sa place en classe de Première (impérativement après l'étude des dérivées) ou en début de Terminale.

Le groupe souhaite que d'autres collègues utilisent ce document et leur fassent part de leurs remarques, critiques et suggestions. (Ecrire à Christine Undreiner-Bach Responsable du groupe Math-Eco **Irem de Strasbourg 10 Rue du Général Zimmer 67085 Strasbourg Cedex**)

COUTS ET BENEFICES: ETUDE DE COURBES

Durant une année une entreprise a observé les variations des coûts de production du chocolat. Pour une production de x tonnes, quand x est inférieur à 5 000, elle estime que le coût total (exprimé en Milliers de Francs (Kf)), en fonction de x, est:

$$C(x) = 0{,}000\,001\,x^3 - 0{,}003\,x^2 + 10{,}48\,x + 27\,000$$

Première partie: LES COUTS

1) Etude de la fonction coût total C

1.a Calculer $C'(x)$.

1.b Etudier le signe de $C'(x)$ et en déduire le tableau de variations pour $0 \leq x \leq 5\,000$.

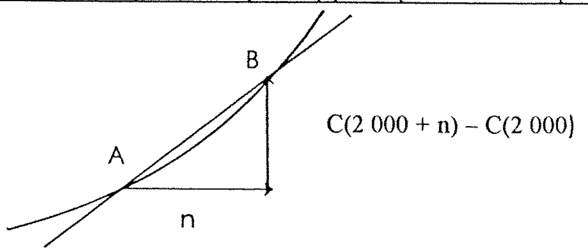
1.c **Figure 1** (tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur de la feuille) représenter graphiquement la fonction coût total dans un repère orthogonal tel que:

- sur l'axe des abscisses 5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un coût total de 10 000 Kf.

RAPPEL DE COURS

coefficient directeur d'une sécante(AB)

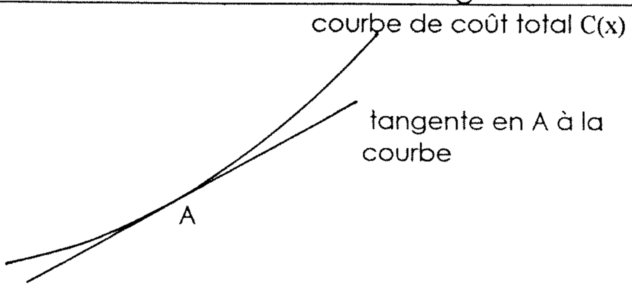
exemple: A(2 000; C(2 000)) et B(2 000 + n; C(2 000 + n))



le coefficient directeur de (AB) est

$$\frac{C(2\,000+n)-C(2\,000)}{n}$$

coefficient directeur d'une tangente: exemple en A(2 000; C(2 000))



le coefficient directeur de la tangente est C' (2000)

c'est la définition du nombre dérivé de C en 2 000

Dans les ouvrages ou articles non mathématiques on trouve souvent le mot "pente". La pente d'une droite n'est définie que dans un repère orthonormal, le terme plus général est coefficient directeur.

2) Exploitation de la figure 1

2.a Estimer **graphiquement** C'(3 000) puis vérifier par le calcul.

2.b Soit M le point de la courbe, d'abscisse x_M. Que représente le coefficient directeur de la droite (OM) ?

2.c Estimer **graphiquement** pour quelle valeur de x le **coût moyen** de production d'une tonne de chocolat est minimum ?

3) Etude de la fonction coût moyen C_M

Pour une production de x tonnes de chocolat, le coût moyen par tonne est donné par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

3.a Calculer $C_M(x)$ puis $C'_M(x)$ (en Kf).

3.b Vérifier que $C'_M(3\,000) = 0$. Etudier le signe de $C'_M(x)$ puis en déduire le tableau de variations pour $0 < x \leq 5\,000$.

3.c Figure 2
Représenter graphiquement la fonction coût moyen dans un repère orthogonal tel que:
- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un coût moyen de 2 Kf.

4) Etude de la fonction coût marginal C_{ma}

L'entreprise a aussi besoin de connaître le coût de production d'une tonne supplémentaire de chocolat lorsqu'elle en a déjà produit x tonnes.
Exemple: l'usine a produit 1 500 tonnes (le coût est donc C(1 500)). Que coûte la production de la 1 501 ième tonne ?. On le notera C_{ma} (1 500).

Ce coût s'appelle le coût marginal. Soit C_{ma} (x) le coût de production de la (x+1) ième tonne de chocolat.

4.a Calculer C_{ma} (2 000) et C_{ma} (3 000) à l'aide de la fonction C (coût total).

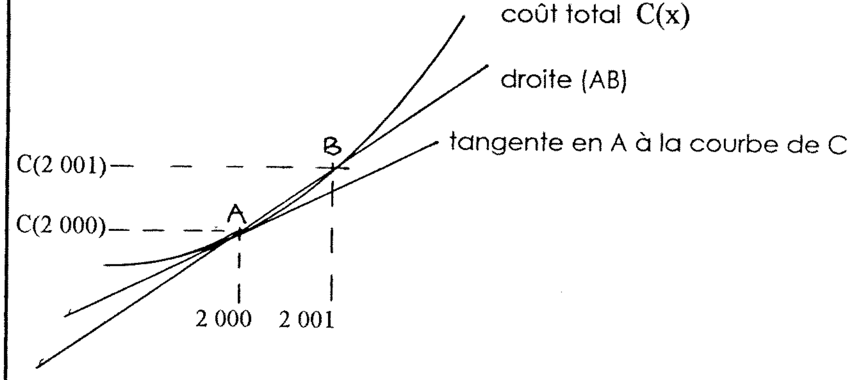
4.b Exprimer C_{ma} (x) à l'aide de C(x+1) et C(x)
puis le mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en x.

4.c Calculer C' (2 000) et recopier C' (3 000) calculé en **2.a.**

4.d Comparer les résultats trouvés aux **4.a** et **4.c.** Comparer les résultats trouvés aux **1.a** et **4.b.**

INTERPRETATION GRAPHIQUE DE CE RESULTAT

Comparaison des coefficients directeurs de la sécante (AB) et de la tangente en A quand n=1.



1 est très petit par rapport à 2 000 donc les points A et B sont très voisins et la sécante (AB) est très proche de la tangente en A.

coefficient directeur de (AB):

$$\frac{C(2\ 001)-C(2\ 000)}{1}$$
$= C(2\ 001) - C(2\ 000)$
$= C_{ma}\ (2\ 000)$

coefficient directeur de la tangente en A: $C'\ (2\ 000)$

$C_{ma}\ (2\ 000) \approx C'\ (2\ 000)$
l'erreur relative est minime et le calcul de $C'(x)$ est plus facile.

Dans toute la suite on prendra pour coût marginal: $C_{ma}\ (x) = C'\ (x)$.

4.e Calculer $C''\ (x)$, la dérivée de $C'\ (x)$. Etudier le signe de $C''\ (x)$ et en déduire le tableau de variations du coût marginal $C'\ (x)$ pour $0 \leq x \leq 5\ 000$.

4.f Représenter la fonction $C'\ (x)$ (c'est à dire aussi $C_{ma}(x)$)sur la **figure 2. Observer le graphique obtenu.**

COMMENTAIRE DE LA FIGURE 2

On constate que le coût moyen est minimum quand il est égal au coût marginal

POINT DE VUE MATHEMATIQUE

D'après le tableau de variations de C_M on sait que le coût moyen passe par un minimum quand sa dérivée s'annule. On a:

$C_M\ (x) = \dfrac{C(x)}{x}$ donc

$C'_M\ (x) = \dfrac{x\,C'(x) - C(x) \times 1}{x^2}$, $x \neq 0$

$C'_M\ (x) = 0$ quand $x\,C'(x) - C(x) = 0$

c'est à dire quand $C'(x) = \dfrac{C(x)}{x} = C_M(x)$

et comme $C'(x) = C_{ma}(x)$...

POINT DE VUE ECONOMISTE

- **Quand la courbe du coût marginal est en dessous de celle du coût moyen** cela signifie que le coût marginal est inférieur au coût moyen. C'est le cas tant que x est plus petit que 3 000 tonnes.
  Alors:
  le coût de production d'une tonne supplémentaire de chocolat est inférieur au coût de production de chacune des x premières tonnes
  le coût moyen des (X+1) premières tonnes sera donc plus faible (la dernière a coûté moins cher!) et ainsi **le coût moyen diminue quand la quantité produite augmente.**
- Par contre **quand la courbe du coût marginal** est au dessus de celle du coût moyen il se produit le phénomène opposé et **le coût moyen augmente quand la quantité produite augmente.**
- **Le coût moyen est minimum quand il est égal au coût marginal.**

Deuxième partie: LES RECETTES ET BENEFICES

Nous allons étudier recette et bénéfice dans deux cas particuliers:

Situation de concurrence parfaite
Situation de monopole parfait

Situation de concurrence parfaite

En situation de concurrence parfaite, le prix de vente n'est pas fixé par l'entreprise mais par les lois du marché. Le prix de vente d'une tonne de chocolat est 34,48 Kf.

5) Recette totale R

Calculer la **recette totale R(x)** en fonction de x et tracer la représentation graphique de R sur la **figure 1**.

6) Etude de la fonction bénéfice total B

On appelle **B(x) le bénéfice total en fonction de x.**

6.a Estimer graphiquement le bénéfice total pour $x = 500$ et pour $x = 2\ 000$.

6.b Calculer B(x) en fonction de x.

6.c Calculer B'(x). Etudier le signe de B'(x). En déduire les variations de B(x) pour $0 \leq x \leq 5\ 000$.

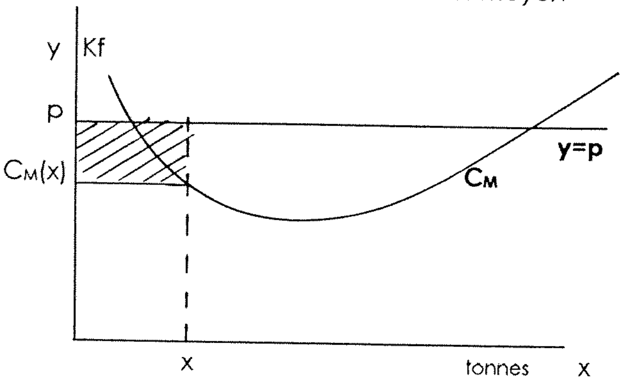
6.d Figure 3
Rreprésenter graphiquement la fonction bénéfice total dans un repère orthogonal tel que:
- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un bénéfice total de 10 000 Kf.

POINT DE VUE ECONOMISTE

le bénéfice total est représenté par la surface hachurée sur la figure ci-dessous

ON RETROUVE LE BENEFICE TOTAL SUR LA FIGURE 2

on s'intéresse à la courbe du coût moyen

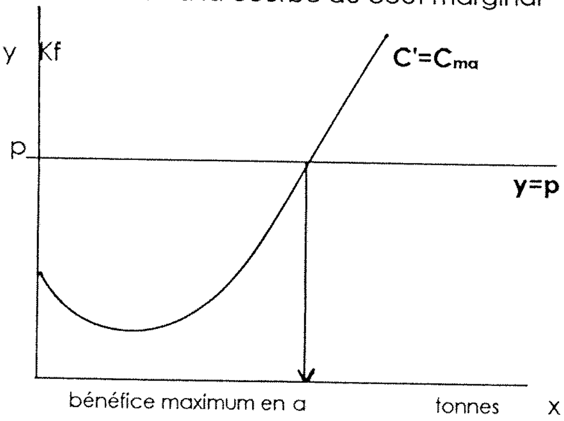


- La figure ci-contre reprend une des courbes de la figure 2: la courbe de coût moyen C_M
- on trace la droite représentant le prix de vente unitaire (constant)

- le **coût moyen** pour une quantité produite x, c'est le **prix de revient unitaire**
- le **bénéfice moyen pour une quantité x** produite est la différence des ordonnées des deux points ayant la même abscisse et situés sur ces deux courbes
- **le bénéfice total est égal au bénéfice moyen multiplié par x. Il est donc représenté par le rectangle hachuré**

le bénéfice est maximum quand le coût marginal est égal au prix de vente unitaire

on s'intéresse à la courbe du coût marginal



- La figure ci-contre reprend une des courbes de la figure 2: la courbe de coût marginal C'
- on trace la droite représentant le prix de vente unitaire (constant)

- quand C'(x), le coût marginal pour une quantité produite x , est inférieur au prix de vente p(x), chaque unité supplémentaire produite rapporte plus qu'elle ne coûte:
  le bénéfice augmente
- quand C'(x), le coût marginal pour une quantité produite x , est supérieur au prix de vente p(x), chaque unité supplémentaire produite coûte plus qu'elle ne rapporte:
  le bénéfice diminue
- donc quand le coût marginal est égal au prix de vente
  le bénéfice est maximum

Situation de monopole parfait

En situation de monopole parfait, l'entreprise peut fixer le prix de vente unitaire p (en Kf) mais celui-ci est lié à la production x (en tonnes). Dans cet exemple on a $x = -200p + 7846$

7) Etude de la fonction recette totale R

7.a Exprimer p en fonction de x.

7.b Calculer la recette totale R(x). C'est une fonction du second degré. Calculer R'(x)

8) Etude de la fonction bénéfice total B

8.a Calculer B(x) en fonction de x.

8.b Calculer B'(x). Etudier le signe de B'(x). En déduire les variations de B(x) pour $0 \leq x \leq 5\,000$.
Remarque: On sait que B(x) = R(x)-C(x). Le maximum de B(x) est atteint quand B'(x) = 0 donc quand R'(x)-C'(x) = 0.

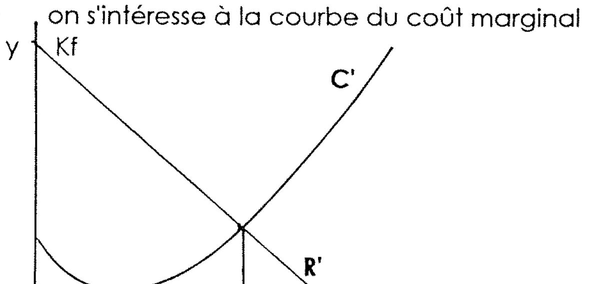
8.c Figure 4
représenter graphiquement la fonction recette totale dans un repère orthogonal tel que:
- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un bénéfice total de 2 000 Kf.

POINT DE VUE ECONOMISTE

le bénéfice est maximum quand le coût marginal est égal à la recette marginale

ON RETROUVE LE BENEFICE TOTAL SUR LA FIGURE 2

on s'intéresse à la courbe du coût marginal



- La figure ci-contre reprend uné des courbes de la figure 2: la courbe de coût marginal C'
- on trace la droite représentant la recette marginale R'

- tant que C'(x), le coût marginal pour une quantité produite x , est inférieur à la recette marginale R'(x), chaque unité supplémentaire produite rapporte plus qu'elle ne coûte:
  le bénéfice augmente
- quand C'(x), le coût marginal pour une quantité produite x , est supérieur à la recette marginale R'(x), chaque unité supplémentaire produite coûte plus qu'elle ne rapporte:
  le bénéfice diminue
- donc quand le coût marginal est égal à la recette marginale
  le bénéfice est maximum