A VOS STYLOS

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x,y)=1$, on a aussi $d(f(x),f(y))=1$.

Indication

Si E est le plan ou l'espace, f est une isométrie.

Solution (P. Renfer)

CAS DE LA DIMENSION 1

On trouve l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ la plus générale préservant la distance 1 en se donnant arbitrairement un réel y et deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$, et en posant $f(0)=y$, $f(n)=y+\sum_{i=1}^{n} u_i$ si $n>0$ et $f(n)=y+\sum_{i=1}^{-n} v_i$ si $n<0$.
On trouve l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la plus générale préservant la distance 1 en se donnant pour chaque $x\in[0,1[$ une application f_x de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ préservant la distance 1 et en posant, pour $0\leq x<1$ et $n\in\mathbb{Z}$, $f(n+x)=f_x(n)$.

CAS DE LA DIMENSION 2

Une telle application est nécessairement une isométrie.

Soit f une telle application; nous noterons M' l'image par f d'un point M; une partie F de E sera dite *rigide* si la restriction à F de toute application préservant la distance 1 est une isométrie; dans ce cas, tout sous-ensemble de F est lui aussi rigide et en particulier f conserve la distance de deux points quelconques de F.
Nous écrirons en abrégé t. e. u. pour triangle équilatéral de côté unité. Il est clair que les sommets d'un t. e. u. forment un ensemble rigide.
Nous appellerons *échelle de pas* r la figure formée d'une infinité de points répartis régulièrement sur une droite, la distance entre deux points consécutifs étant r.

1) L'APPLICATION f CONSERVE LA DISTANCE $\sqrt{3}$

Soient A et B deux points tels que $AB=\sqrt{3}$. Il existe C et D tels que ACD et BCD soient des t. e. u.; alors $A'C'D'$ et $B'C'D'$ en sont aussi, donc la distance $A'B'$ vaut $\sqrt{3}$ ou 0 (selon que A' et B' sont ou non du même côté de $C'D'$); et deux points à distance $\sqrt{3}$ ont toujours pour image deux points à distance $\sqrt{3}$ ou 0. Les sommets d'un triangle de côtés $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1 deviennent ceux d'un triangle de côtés $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1, ou $\sqrt{3}$, 0, 1, ou 0, 0, 1; mais ces deux derniers cas sont exclus car de tels triangles n'existent pas. Les sommets d'un triangle de côtés $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1 forment donc un ensemble rigide, et f préserve la distance $\sqrt{3}$. Plus précisément, la figure formée par les sommets de deux t. e. u. ayant un côté commun et situés de part et d'autre de ce côté commun est rigide.

2) Les échelles de pas 1 et les échelles de pas $\sqrt{3}$ sont rigides

En juxtaposant des t. e. u., on voit que les sommets d'un réseau triangulaire d'arêtes unité forment un ensemble rigide; comme un tel réseau contient des échelles de pas 1 et $\sqrt{3}$, le résultat en découle.

3) L'application f conserve les distances $|a - b\sqrt{3}|$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z})$

Soient, sur une même demi-droite d'origine A, deux demi-échelles e_1 de pas 1 et $e_{\sqrt{3}}$ de pas $\sqrt{3}$, issues de A. Pour tout point N de $e_{\sqrt{3}}$ il existe un point M de e_1 tel que $MN \leq \frac{1}{2}$; il y a donc un point P tel que $MP = PN = 1$ et il en résulte que $M'N' \leq M'P' + P'N' = 1+1 = 2$. Les demi-échelles images e'_1 et $e'_{\sqrt{3}}$, issues de A', possèdent ainsi, arbitrairement loin, des points M' et N' tels que $M'N' \leq 2$; elles sont donc portées par la même demi-droite et ceci montre que l'union $e_1 \cup e_{\sqrt{3}}$ est rigide. Les échelles complètes contenant e_1 et $e_{\sqrt{3}}$ ont aussi une union rigide, et les distances $|a - b\sqrt{3}|$, qui séparent deux points de cette union, sont conservées par f.

4) L'application f est continue

Étant donnés deux points M et N, soient I le milieu de $[M, N]$ et P un point tel que MNP soit un triangle équilatéral. L'ensemble $\mathcal{E} = \{|a-b\sqrt{3}|\, |a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$, car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Il existe donc un point Q de $[P, I]$ tel que la distance MQ soit dans $\mathcal{E}$ (donc conservée par f). Il suffit de remarquer que $M'N' \leq M'Q' + Q'N' = MQ + QN \leq MP + PN = 2MN$ pour voir que f est 2-lipschitzienne, donc continue.

5) L'application f préserve toutes les distances

Étant donnés deux points M et N, il existe puisque $\mathcal{E}$ est dense une suite (M_n) de points telle que $\lim_n M_n = M$ et $M_nN \in \mathcal{E}$. Comme f est continue, M'_n tend vers M' et $M'N' = \lim M'_nN' = \lim M_nN = MN$.

CAS DE LA DIMENSION 3

Dans ce cas encore, f doit être une isométrie. Appelons pour abréger t. r. u. la figure (rigide) formée par les quatre sommets d'un tétraèdre régulier d'arête unité. Si $ABCD$ est un t. r. u., E le centre du triangle BCD et F le milieu de CD, AE est une hauteur du triangle AFB qui vérifie $FA = FB = 3\,FE = \frac{\sqrt{3}}{2}$; il en résulte que la hauteur du tétraèdre vaut $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et que l'angle dièdre θ entre deux faces du tétraèdre vérifie $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

1) L'application f conserve la distance $p = \sqrt{\frac{8}{3}}$

Cette distance étant deux fois la hauteur du tétraèdre, l'argument est le même que pour la conservation de $\sqrt{3}$ en dimension 2 : en considérant deux t. r. u. ayant une face commune, on voit que la distance p est transformée en elle-même ou zéro, donc les sommets d'un triangle de côtés p, p et 1 deviennent ceux d'un triangle de côtés p, p, 1, ou p, 0, 1, ou 0, 0, 1; mais ces deux derniers cas sont impossibles. Donc la figure formée par deux t. r. u. ayant une face commune et situés de part et d'autre de cette face est rigide, et f conserve la distance p.

2) L'APPLICATION f CONSERVE LA DISTANCE $q = \sqrt{\frac{32}{27}}$

Il résulte de ce qui précède que toute succession de t. r. u. ayant chacun une face commune avec le précédent forme une figure rigide. Un exemple de telle succession est formé des quatre t. r. u. ABC_0C_1, ABC_1C_2, ABC_2C_3 et ABC_3C_4, tels que les cinq points C_i soient distincts. Ces cinq points sont sur le cercle de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ à distance 1 de A et B; chacun des arcs $C_{i-1}C_i$ a pour mesure θ; celle de l'arc C_0C_5 vaut 4θ et il en résulte que $C_0C_5 = 2R\,|\sin 2\theta|$. Partant de $\cos\theta = \frac{1}{3}$, on obtient successivement $\cos 2\theta = -\frac{7}{9}$, $\sin^2 2\theta = \frac{32}{81}$ et $C_0C_5 = \sqrt{\frac{32}{27}} = q$. Cette distance est donc conservée par f.

3) LES ÉCHELLES DE PAS q ET LES ÉCHELLES DE PAS pq SONT RIGIDES

Nous avons vu que toute fonction conservant 1 conserve p. Par homothétie, il s'ensuit que toute fonction conservant une distance r conserve aussi rp; f conserve donc p^2 et p^3. Mais $p^3 = 4q$; si A_0, A_1, A_2, A_4 et A_4 sont cinq points alignés, dans cet ordre, tels que $A_{i-1}A_i = q$, leurs images A'_i vérifient $A'_{i-1}A'_i = q$ et $A'_0A'_5 = 4q$ et sont donc aussi alignées. En conséquence, les échelles de pas q sont rigides. Ceci ayant lieu pour toute f préservant 1, on en déduit par homothétie de rapport p que les échelles de pas pq sont également rigides.

4) L'APPLICATION f EST UNE ISOMÉTRIE

Le même argument qu'en dimension 2 montre que f conserve les distances $|aq-bpq|$, où a et b sont dans $\mathbb{Z}$. L'irrationnalité du rapport entre pq et q entraîne que les nombres de la forme $aq - bpq$ sont denses dans $\mathbb{R}$; on en tire, toujours comme en dimension 2, que f est continue, et enfin que f est une isométrie.

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0,1[$.

Indication

Elle est décroissante.

PROBLÈME 34

Énoncé

Soient quatre plans parallèles. Montrer que l'on peut choisir un point dans chacun d'eux de façon à obtenir les quatre sommets d'un tétraèdre régulier; donner, en fonction des distances deux-à-deux des quatre plans, toutes les valeurs possibles pour la longueur des arêtes du tétraèdre.

PROBLÈME 35

Énoncé (proposé par D. Dumont, d'Antananarivo)

Pour $n \geq 1$, on définit des polynômes S_n de degré $n-1$ et F_n de degré n par

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 \qquad & S_{n+1}(x) &= nS_n(x) + F_n(x) \\ F_1(x) &= x \qquad & F_{n+1}(x) &= nS_n(x) + xF_n(x)\ ; \end{aligned}$$

ils vérifient $S_n(1) = F_n(1) = n!$. Appelons $s_{n,k}$ et $f_{n,k}$ leurs coefficients, qui sont les entiers tels que

$$S_n(x) = s_{n,0} + s_{n,1}x + \ldots + s_{n,n-1}x^{n-1} \quad \text{et} \quad F_n(x) = f_{n,0} + f_{n,1}x + \ldots + f_{n,n}x^n\ .$$

Étant donnés une permutation σ de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ et un élément p de $[n]$, on dira que *p est un point fixe de σ* si $\sigma(p) = p$; que *p est une succession de σ* si $p < n$ et $\sigma(p+1) = \sigma(p) + 1$; que *le maximum est en position p* si $\sigma(p) = n$.
Par exemple, la permutation $\binom{123456789}{325649781}$ possède 2 successions, 3 points fixes, et le maximum est en position 6.

Démontrer les cinq propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 2. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k points fixes est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 3. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 4. — *Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en dernière position et qui possèdent k successions est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 5. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k points fixes est égal à $s_{n,k}$.*