RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1995

ALLOCUTION PRONONCEE PAR MONSIEUR M. MIGNOTTE, DIRECTEUR DE L'U.F.R. DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE LE JOUR DE LA DISTRIBUTION DES PRIX

Le rallye mathématique a 22 ans : il est donc jeune et dynamique. Depuis sa naissance, les programmes des enseignements des classes de première et terminale ont sans doute été réformés une bonne douzaine de fois. Le rallye demeure. Il fait toujours appel à la réflexion et même j'oserai une formule provocatrice - il fait appel au plaisir de la réflexion. Le mot "provocatrice" de la phrase précédente aura pu vous surprendre ; pour expliquer pourquoi j'ai utilisé ce qualificatif, j'emploierai une méthode qui m'est chère, celle de conter une anecdote. Il s'agit du fait suivant que je peux désormais citer : la prescription décennale s'applique. J'étais responsable d'une équipe des sujets de mathématiques pour le bac C. J'ai tenu à ce que le problème principal présente un certain intérêt. Le sujet a été ensuite transmis à l'Inspection Générale. La réponse a été la suivante : "Il serait bon de supprimer la question III.4, car elle demande de la réflexion". Ayant droit de veto, j'ai maintenu cette question. Mais je ne contrôlais pas tout le processus, c'est le sujet de remplacement de septembre qui a été utilisé en juin.

Revenons à cette année, où nos collègues du secondaire nous tiennent des discours très inquiétants au sujet des nouvelles réformes de l'enseignement des mathématiques. D'une certaine manière, les changements qu'ils nous décrivent sont très fâcheux. Mais, pour conclure, je reste optimiste : réformes ou pas, ceux qui ont le goût de la réflexion sont résistants.

PRESENTATION GENERALE

Les épreuves du 22ème Rallye Mathématique d'Alsace ont eu lieu le mercredi 22 Mars 1995 pour les classes de Première et le Mercredi 5 Avril 1995 pour les classes de Terminale. Cette année, 1371 élèves s'étaient inscrits, dont 510 en Terminale et 861 en Première. Pour la première fois, la participation présente une légère baisse (10% seulement) mais ceci s'explique par la diminution du nombre d'élèves en section scientifique, de l'ordre de 20% dans notre académie. La répartition géographique est la suivante : il y avait 464 candidats pour le Haut-Rhin, 815 pour le Bas-Rhin, et 92 candidats de Lycées Français à l'étranger.

En Terminale, 21 copies ont été primées. Le premier prix est attribué à un binôme ayant entièrement résolu le premier exercice et ayant fait environ la moitié des deux autres exercices. Cette copie se détachait nettement des autres. Les seconds prix récompensent des binômes ayant entièrement résolu le premier ou le troisième exercice et ayant fait la moitié d'un autre exercice. Enfin, les troisièmes prix sont décernés aux candidats ayant résolu un exercice dans sa totalité.

En Première, 34 copies ont été primées. Les premiers prix récompensent les candidats ayant convenablement résolu deux exercices et ayant donné un certain nombre d'éléments intéressants pour un troisième erxercice. Les élèves ayant résolu correctement deux exercices se voient attribuer un deuxième prix. Quant au troisième prix, il est décerné aux élèves ayant entièrement résolu un exercice et fait plus de la moitié d'un autre exercice.

Nous tenons encore à remercier les chefs d'établissement pour la mise à disposition des locaux, ainsi que les collègues qui ont accepté de surveiller les épreuves et de s'occuper de l'organisation de celles-ci à l'intérieur de leur lycée.

CLASSE DE PREMIERE

Exercice 1

Il est bien connu que les Shaddocks pondent des oeufs. Pour pondre un oeuf, ils doivent compter jusqu'à 4. Ou plutôt, quand un Shaddock compte régulièrement, il pond toujours un oeuf à chaque multiple de 4.
Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller Shaddock de compter tous les oeufs entreposés dans la réserve du Ministère.Le Conseiller, exténué d'avoir tant compté et pondu, note 1995 oeufs sur son registre. Combien y avait-il d'oeufs initialement dans la réserve ?

Solution

Après avoir compté 4 anciens oeufs, il en pond un nouveau qu'il compte aussitôt.
Après cela, il lui suffira de compter 3 anciens oeufs de plus pour en pondre un nouveau, puis il faudra à chaque fois ajouter 3 anciens oeufs à chaque nouvel oeuf pour que le Shaddock en ponde un.
Si l'ancien nombre d'oeufs est de la forme $4+3x+r$ avec $r = 0,1$ ou 2, alors le Conseiller pondra $1+ x$ oeufs et il y en aura $5+4 x+r$, avec $r = 0$; 1 ; 2.

$1995 = 5+ 4x+r \Leftrightarrow 4x+r = 1990$

Or, $1990 = 4 \times 497 +2 \Rightarrow x = 497$
Il y avait $4 + 3 \times 497+2 = 1497$ oeufs

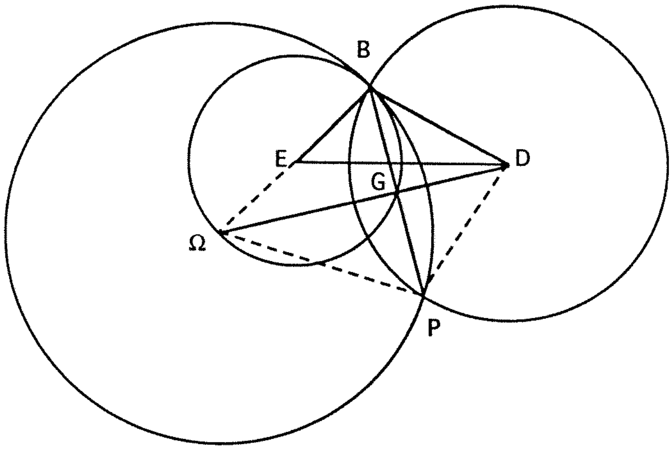
Remarque : le nombre final d'oeufs étant de la forme $5 + 4x + r$ avec $r = 0$;1 ; 2 il ne peut être un multiple de 4, et il ne suffit donc pas d'enlever un quart (avec 1996, il n'y aurait pas de solution).

Exercice 2

Le Docteur Jones a trouvé dans les caves de l'Institut de Recherche d'Ethnologie Méso-Américaine, les statues de Glesecoatl et de Pluvitepeck.
Furieux, il se rend compte qu'elles ont été ramenées du temple de Tezcatlipoca avant qu'il ne puisse mesurer la distance entre leurs emplacements. Or cette distance doit être connue très précisément car elle permet de déterminer sur un autre site, l'emplacement du trésor de Moctuzema.
Il se rend sur place et constate qu'il reste les statues de Barbisclan, Didiextla et Emilomok. Il mesure les distances et trouve 15 m entre Barbisclan et Didiextla, 10 m entre Barbisclan et Emilomok , 20 m entre Emilomok et Didiextla.
Dans ses recherches précédentes, il a découvert les règles que suivent les emplacements de statues dans les temples mayas : Emilomok doit être équidistant de Barbisclan et de Glesecoatl ; Didiextla doit être équidistante de Barbisclan et de Pluvitepeck ; Glesecoatl doit être aligné avec Barbisclan et Pluvitepek et à égale distance d'eux. Quelle était la distance entre les emplacements de Glesecoatl et de Pluvitepeck ?

Solution

$BD = 15$; $BE = 10$; $DE = 20$
$BE = GE$; $BD = PD$; G milieu de [BP]   G et P inconnus ?



• G est sur le cercle C_1 de centre E et de rayon 10
• P est sur le cercle C_2 de centre D et de rayon 15
• G milieu de [BP] $\Rightarrow \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BG}$; c'est à dire que P est l'image de G par l'homothétie h de centre B et de rapport 2.
Or, $G \in C_1$ donc $P \in h(C_1)$

$h(C_1)$ est le cercle de centre Ω et de rayon 2 x 10 = 20 $(\overrightarrow{B\Omega} = 2\overrightarrow{BE})$

Ω, G, D sont alignés car [BP] est une corde du cercle C_2 et du cercle $h(C_1)$

Donc $(\Omega G) \perp (BP)$ et $(DG) \perp (BP)$

•On peut calculer $\cos \hat{B}$, grâce à $ED^2 = BE^2 + BD^2 - 2BE \times BD \times \cos \hat{B}$

$$\cos \hat{B} = \frac{10^2 + 15^2 - 20^2}{2 \times 10 \times 15} = -\frac{75}{300} = -\frac{1}{4}$$

D'autre part $\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sqrt{\frac{15}{4}}$

L'aire de $B\Omega D$ vaut $\frac{1}{2} \times B\Omega \times BD \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{150\sqrt{15}}{4} = \frac{75\sqrt{15}}{2}$

Cette aire vaut aussi $\frac{1}{2} \Omega D \times BG$

Calculons ΩD (l'angle $\hat{E}$ est pris dans le triangle BED)

$$\cos \hat{E} = \frac{10^2 + 20^2 - 15^2}{2 \times 10 \times 20} = \frac{275}{400} = \frac{11}{16} \Leftrightarrow \cos B\hat{E}D = \frac{11}{16}$$

On a $\Omega \hat{E} D = 180° - B\hat{E}D \Rightarrow \cos \Omega \hat{E} D = -\frac{11}{16}$

Et $\Omega D^2 = \Omega E^2 + ED^2 - 2\Omega E \times ED \times \cos \Omega \hat{E} D = 10^2 + 20^2 + 2 \times 10 \times 20 \times \dfrac{11}{16} = 500 + 275$ $= 775$ d'où $\Omega D = \sqrt{775} = 5\sqrt{31}$.

Conclusion : $\dfrac{1}{2}\Omega D \times BG = \dfrac{75\sqrt{15}}{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{31} \times BG = 75\sqrt{15} \Leftrightarrow BG = \dfrac{15\sqrt{15}}{\sqrt{31}}$

et par conséquent $GP = \dfrac{15\sqrt{15}}{31} \approx 10,434$.

Exercice 3

On veut empiler des assiettes identiques sur des étagères superposées pouvant supporter chacune au maximum une pile de cinq assiettes. Pour des raisons d'équilibre, le nombre d'assiettes par étagère doit diminuer strictement avec la hauteur. Combien y a-t-il de possibilités de rangement suivant le nombre d'assiettes et le nombre d'étagères ?

Solution

Il y a au maximum 5 assiettes sur l'étagère du bas puis 4, 3, 2, 1, 0 sur les étagères au-dessus. On aura au maximum 6 étagères et 15 assiettes.
On cherche donc les sommes $a_1 + a_2 + ... + a_p = A$ avec $0 \leq A \leq 15$, $1 \leq p \leq 6$ et $5 \geq a_1 > a_2 > ... > a_p \geq 0$ (a_i = nombre d'assiettes sur la $i^{\text{ème}}$ étagère).
En écrivant toutes les sommes possibles, on obtient le tableau suivant, donnant le nombre de rangements dans chaque cas :

nbre d'étagères P / nbre d'assiettes A	1	2	3	4	5	6
0	1					
1	1	1				
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	2	1			
5	1	3	2			
6		2	3	1		
8		1	3	2		
9		1	3	2		
10			2	3	1	
11			1	2	1	
12			1	2	1	
13				1	1	
14				1	1	
5					1	1

Remarque : 0 assiette et 0 étagère donneraient un autre cas.

CLASSE DE TERMINALE

Exercice 1

Au royaume du Père Ubu, les années ne sont comptées qu'avec les nombres ubuesques. Les nombres ubuesques sont des nombres qui ne sont pas égaux à un nombre multiplié une ou plusieurs fois par lui-même.
La première année s'appelle Ubu 2, la deuxième Ubu 3, la troisième Ubu 5, la quatrième Ubu 6, la cinquième Ubu 7, la sixième Ubu 10, etc ...
Comment s'appellera la 199495ème année ?

Solution

On commence par remarquer que la 199495ème année aura un nom supérieur à 199495. Cherchons quel sera le rang de Ubu 200.000. Il faut donc retrancher 1 et tous les nombres de la forme n^p avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$.

• On constate que $2^{18} = 262.144$ et $2^{17} = 131.072$, donc le plus grand exposant sera 17.
• Cherchons pour chaque exposant $p \geq 2$, combien il y a de nombres de la forme n^p avant 200.000. D'autre part, il ne faut retrancher le nombre 1 de la liste qu'une fois. on prendra donc : $E(\sqrt[p]{200.000} - 1)$.
• Les nombres de la forme n^p avec $p = 4$, sont également des nombres de la forme n^p avec $p = 2$; il ne faut pas les retrancher une deuxième fois. De même pour $p = 9$, $p = 16$ et $p = 8$.
• Les nombres de la forme n^p avec $p = 6$ sont à la fois des carrés et des cubes, donc si on retranche tous les carrés et tous les cubes, ces nombres ont été ôtés deux fois ; il faut donc les ajouter (de même pour $p = 10$; 14 ; 15).
• Les nombres de la forme n^{12} sont des nombres de la forme n^6, ils auront donc été retranchés 2 fois et ajoutés 1 fois. On n'en tient plus compte.

p	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17
$\sqrt[p]{200.000}$) -1.	446	57	10	6	4	2	2	1	1	1	1
Signe	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-

Il faut également retrancher 1 pour le nombre 1.
Le rang de Ubu 200.000 est donc :
200.000 - 1 - 446 - 57 - 10 + 6 - 4 + 2 - 2 - 1 + 1 +1 - 1 = 199 488
Il faut donc avancer de 7 rangs et la 1994 95ème année sera Ubu 200.007. En vérifiant qu'aucun des nombres de 200.001 à 200.007 n'est de la forme n^p avec $2 \leq p \leq 17$

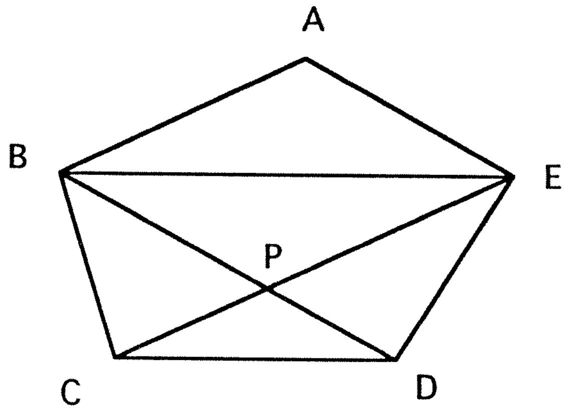
Exercice 2

Le palais de Thram II, fils d'Ottokar IV

En Syldavie, le gouvernement est formé de cinq ministères. Pour travailler efficacement, le roi Thram II décide de faire construire un palais pentagonal. Un concours s'adressant à tous les architectes est ouvert.
Le palais doit être partagé par des cloisons intérieures reliant tous les sommets. Chaque ministère disposera d'une aile triangulaire ayant deux murs extérieurs. La partie commune à deux ministères sera consacrée aux relations interministérielles. Pour éviter les jalousies, Thram II souhaite que chaque ministère dispose d'une aile d'un hectare.
Montrer que tous les projets des architectes auront la même superficie totale.

Solution

Soit ABCDE un tel pentagone.



1) Les triangles BCD et CDE ayant même aire et une base [CD] commune, les hauteurs issues de B et de E respectivement sont les mêmes.
On en déduit que (BE) // (CD), et de même, chaque diagonale, sera parallèle à l'arête opposée.

2) Soit P le point d'intersection de(BD) et (EC). Appelons x l'aire de DPC et on aura :
aire de BPC = aire de EPD = 1 - x.

D'autre part, grâce aux parallélismes du 1), on sait que AEBP est un parallélogramme et donc :
aire de EPB = aire de ABE = 1.
Les triangles PCD et PED ont la même hauteur h issue de D donc

aire de PCD = $\frac{1}{2}$ PC x h et aire de PDE = $\frac{1}{2}$PE x h,

par conséquent $\dfrac{\text{aire de PCD}}{\text{aire de PDE}} = \dfrac{PC}{PE} \Rightarrow \dfrac{x}{1 - x} = \dfrac{PC}{PE}$

Les triangles PCB et PEB ont la même hauteur h' issue de B donc

aire de PCB = $\frac{1}{2}$PC $\times$ h' et aire de PBE = $\frac{1}{2}$PE $\times$ h'

par conséquent $\dfrac{\text{aire dePCB}}{\text{aire de PBE}} = \dfrac{PC}{PE} \Rightarrow \dfrac{1-x}{1} = \dfrac{PC}{PE}$.

On en déduit que :

$$\frac{1-x}{1}=\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow 1-2x+x^2=x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \quad \Delta = 5 \ ; \ x = \frac{3 \pm\sqrt{5}}{2}$$

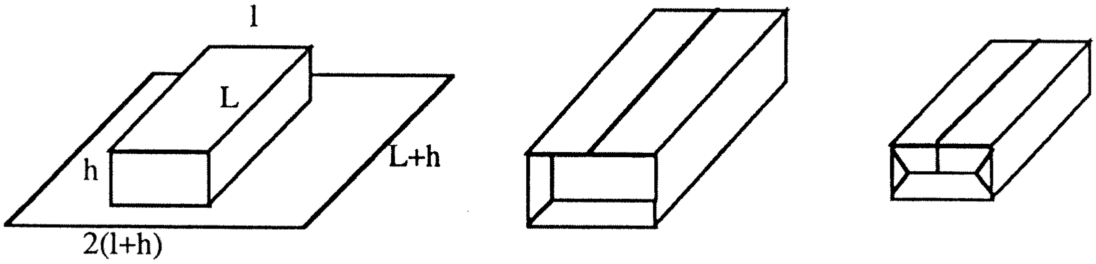
or, $x \leq 1$, donc $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

L'aire totale du pentagone est donc égale à :
aire de (ABE) + aire de (BCD) + aire de (BPE) + aire de (PDE) = 1 +1+1+ (1-x)

$$= 4 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 3

Pour le Nouvel An Chinois, la compagnie des **M**archands **A**ssociés de **Th**é a décidé d'offrir à ses plus fidèles clients sa spécialité au jasmin enveloppée dans de la soie. Pour emballer une boîte de dimensions L , l , h, on dispose d'un rectangle de tissu de dimensions (L + h) , 2(l +h).
Calculer pour un volume V fixé du paquet, les dimensions L, l, h, qui leur feront utiliser le moins de soie possible.



Solution

La surface de la soie sera $S = 2(l + h)(L + h) = 2(Ll + Lh + lh + h^2)$.

1) Fixons une valeur de h. Alors $\dfrac{V}{h} = L \times l$ est constant et on aura $L = \dfrac{V}{h} \times \dfrac{1}{l}$

et $S = 2(\dfrac{V}{h}\times\dfrac{1}{l}\times l+\dfrac{V}{h}\times\dfrac{1}{l}\times h+lh+h^2) = 2(\dfrac{V}{h}+h^2+hl+\dfrac{V}{l})$.

Cherchons le minimum de $f(l) = \dfrac{V}{h}+h^2+hl+\dfrac{V}{l})$

$f'(l) = 2\ (h - \dfrac{V}{l^2}) \Rightarrow$ f a un minimum pour $l = \sqrt{\dfrac{V}{h}}$

et on aura alors $L = \dfrac{V}{h}\times\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{V}{h}}} = \sqrt{\dfrac{V}{h}}$; donc $L = l$.

Conclusion : pour chaque valeur de h, la surface sera la plus petite possible lorsque $L = l$.

2) On se place dans le cas où $\mathbf{L = l}$ et on cherche la valeur de h qui rend S minimale.

$S = 2\,(h+l)^2$ et $l = \sqrt{\dfrac{V}{h}} \Rightarrow S = 2\left(h + \sqrt{\dfrac{V}{h}}\right)^2$.

Pour que S soit minimale, il faut et il suffit que $g(h) = h + \dfrac{\sqrt{V}}{\sqrt{h}}$ soit minimale

or, $g'(h) = 1 - \dfrac{\sqrt{V}}{2} \times \dfrac{1}{h^{3/2}}$ $\quad g'(h) = 0 \Leftrightarrow h^{3/2} = \sqrt{\dfrac{V}{4}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ et g présentera un minimum en cette valeur (il suffit de faire le tableau de variation).

Conclusion : S minimale pour $h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ et $L = l = \sqrt[3]{2V}$ c'est-à-dire lorsque $L = l$ et $h = \dfrac{1}{2}\,l$
