A VOS STYLOS

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$.

Solution (P. Renfer d'Ostwald)

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x^2} \neq \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{\ln}{x(1-x)}.$$

Soit $\varphi(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$, alors :

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \varphi(x) - (\varphi(x) + \frac{1}{1-x}\ln(x) \quad (1) \\ &= -\frac{\ln x \ln(1-x)}{x} + \varphi(x) - \varphi(1-x) \quad (2). \end{aligned}$$

On va prouver que f' est négative sur l'intervalle $]0, 1/2[$, à l'aide de la formule (1), puis qu'elle est négative sur l'intervalle $[1/2, 1[$, à l'aide de la formule (2). On saura alors que f est décroissante sur $]0, 1[$.

1) La fonction φ est développable en série entière en 0. Pour $x \in [0, 1[$, on a :

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Sur l'intervalle $[0, 1[$, φ décroit donc de -1 à $-\infty$.

$$\varphi(x) + \frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^{n+1}.$$

Soit $\psi(x) = -x\ln(x)$, alors $\psi'(x) = -1 + \ln(x))$. La fonction ψ est positive sur $]0, 1[$ et admet comme maximum $\psi(1/e) = 1/e$. La formule (1) donne donc, pour x entre 0 et $1/2$:

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \varphi(x) - x\ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n \\ &\leq -1 + \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -1 + \frac{1}{e(1-x)} \leq -1 + \frac{2}{e} < 0. \end{aligned}$$

2) Soit $\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(1-x)$.
La fonction χ, somme de deux fonctions décroissantes, décroît sur $]0,1[$. Elle s'annule en $1/2$ et elle est donc négative sur $]1/2,1[$. La formule (2) indique alors que, pour x entre $1/2$ et 1, $xf(x)$ est négatif.

Conclusion

La fonction f décroit de $+\infty$ à 0.

PROBLÈME 34

Énoncé (forme équivalente)

Etant donnés quatre points sur une droite, montrer qu'ils sont les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier, dont la longueur des arêtes est déterminée.

Indication

Dans sa solution, Pierre Renfer suppose le problème résolu et prend un repère orthonormé dans lequel les sommets du tétraèdre sont $A(1,-1,-1), B(-1,1,-1), C(-1,-1,1), D(1,1,1)$.

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (voir l'énoncé détaillé dans notre précédent numéro)

L'énoncé demande de démontrer cinq propositions relatives aux dénombrements des points fixes et des successions dans les permutations. Dans la solution qu'il propose, R. Renfer énonce une sixième proposition :
PROPOSITION 6.– *Soit q un entier de $[n+1]$. Le nombre de permutations de $[n+2]$ ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions, dont une en position q, est égal à $f_{n,k}$.*

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

> Vous pouvez constater un changement dans les tarifs d'abonnement. Ceci est dû au fait qu'à partir de janvier 1996 l'université ne bénéficiera plus de la franchise postale.
>
> Par ailleurs, les frais de composition et d'impression ont augmenté et nos tarifs sont restés inchangés depuis septembre 1993.