PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)
ACTIVITÉS EN T.S. OU POST-BAC

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

Le but du problème qui suit est de démontrer que le polynôme $X = x^4 + ax + b$ avec a et b **réels**, se factorise en produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels (même dans le cas où X n'a pas de racine réelle). Nous chercherons ensuite à expliciter cette factorisation par une méthode spécifique. L'ensemble du problème est inspiré des idées de Gauss (cf. le premier article de ce n° de '*L'Ouvert*' p. 1).

I. Soit f la fonction numérique réelle qui à x associe

$$X = f(x) = x^4 + ax + b.$$

1. Etudier les variations de f et en déduire que X n'a pas de racine réelle lorsque $b > \frac{3}{4}a\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$.

2. Effectuer le produit

$$(x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2)(x^2\sin\varphi + rx\sin 2\varphi + r^2\sin 3\varphi)$$

et en déduire que le polynôme $P(x)$ défini par :

$$P(x) = x^4\sin\varphi - r^3x\sin 4\varphi + r^4\sin 3\varphi$$

est divisible par $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

3. Démontrer que si r et φ sont deux réels vérifiant simultanément

$$(1)\ : r^4\cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0 \text{ et } (2)\ : r^4\sin 4\varphi + ar\sin\varphi = 0$$

alors $X\sin\varphi$ est identique à $P(x)$.

4. En déduire que si l'on prouve l'existence de r et φ tels que (1) et (2) soient vérifiés simultanément, alors :
– ou bien X admet deux racines réelles (éventuellement confondues),
– ou bien X admet le facteur $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

II. Relativement à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la courbe U ensemble des points de coordonnées polaires (r, φ) tels que

$$(1) r^4 \cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0$$

et la courbe T ensemble des points tels que (2) : $r^4 \sin 4\varphi + ar \sin\varphi = 0$. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon R tel que

$$(3)\ R > 1 \text{ et } R > \sqrt{2}(|a| + |b|).$$

Enfin, on désignera par u et t les fonctions de la seule variable réelle φ définies par

$$u(\varphi) = R\cos 4\varphi + \frac{a}{R^2}\cos\varphi + \frac{b}{R^3}$$
$$\text{et } t(\varphi) = R\sin 4\varphi + \frac{a}{R^2}\sin\varphi.$$

1. Etudier les variations de u pour φ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}\right]$. En déduire, à l'aide des inégalités (3) que $u(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}\right]$.
Montrer de même que $u(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur chacun des intervalles $\left[\frac{(4k+1)\pi}{16}; \frac{(4k+3)\pi}{16}\right]$ (cf. fig., arcs de cercle épais).
Vérifier que $t(\varphi)$ ne s'annule jamais sur ces intervalles.

2. Etudier de même les variations de t sur chacun des intervalles $\left[\frac{4k}{16}\pi; \frac{4k+2}{16}\pi\right]$ et en déduire que $t(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur chacun de ces intervalles, alors que $u(\varphi)$ n'y est jamais nul.

3. Conclure que les courbes U et T coupent Γ chacune en huit points placés en position alternée sur le cercle Γ. Comme $\varphi = 0$ donne un point commun à T et à Γ, numérotons les seize points d'intersection de 0 à 15, de sorte que les points de T portent un numéro pair et ceux de U un numéro impair (cf. fig.).

4. Dans cette question $X = x^4 - 9x + 18$.
a) Exprimer $\cos 4\varphi$ et $\sin 4\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. En déduire que les courbes U et T ont pour équation cartésienne respectivement

$$(U) \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 9x + 18 = 0$$
$$(T) \quad y(4x^3 - 4xy^2 - 9) = 0.$$

b) Dessiner les courbes U et T en les ramenant aux représentations graphiques des fonctions

$$y = \pm\sqrt{3x^2 \pm \sqrt{8x^2 + 9x - 18}} \text{ (quatre fonctions, pour } U)$$
$$\text{et } y = 0 \text{ ou } y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{9}{4x}} \text{ (trois fonctions pour } T).$$

5. On revient au cas général $X = x^4 + ax + b$.
En admettant que, comme pour l'exemple ci-dessus, les courbes U et T sont formées de plusieurs branches et que si l'une de celle-ci rentre dans le cercle Γ par l'un des points numérotés, elle en ressort nécessairement par un autre de ces points, démontrer par l'absurde que U et T ont au moins un point d'intersection dans la partie supérieure (respectivement inférieure) du cercle Γ.

III. On se propose de factoriser $X = x^4 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$. On supposera $b \neq 0$. D'après la démonstration ci-dessus il s'agit de trouver r et φ tels que simultanément

$$(1)\ : r^4 \cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0 \text{ et } (2) : r^4 \sin^4\varphi + ar\sin\varphi = 0.$$

1. Quelle conséquence entraîne pour X le fait que $\sin\varphi = 0$?
On n'étudiera dans la suite que les situations où $\sin\varphi \neq 0$.

2. Montrer que pour $\varphi \neq \frac{k\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$ on a

$$r^4 = b\frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi} \text{ et } r = -\frac{b}{a}.\frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi}.$$

En déduire que φ vérifie l'équation

$$a^4 \sin\varphi(\sin 3\varphi)^3 = b^3(\sin 4\varphi)^4.$$

3. Calculer $\sin 3\varphi$ et $\sin 4\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.
Soit $y = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$. Montrer que y vérifie l'équation

$$(3)\quad a^4 y^3 = b^3(y-1)^4(y+1)^2.$$

Pour $y \neq 0$, posons $z = y + \frac{1}{y}$. Montrer que z vérifie l'équation

$$(4)\quad z^3 - 2z^2 - 4z + 8 - \frac{a^4}{b^3} = 0.$$

Nous poserons dans la suite $p = \frac{a^4}{b^3}$.
Montrer que y n'existe que pour z tel que $|z| \geq 2$.

4. Etudier les variations des fonctions θ_1 et θ définies par

$$\theta_1(z) = z^3 - 2z^2 - 4z + 8 \text{ et } \theta(z) = \theta_1(z) - p.$$

En déduire que dans tous les cas, l'équation (4) ne fournit qu'une valeur de z, donc deux valeurs de y solutions de (3).

5. Factoriser sur $\mathbb{R}$ les polynômes

$$X_1 = x^4 - 9x + 18\ ;\ X_2 = x^4 + 5x + 5.$$

Indications pour la solution

I.2. Le produit est égal à

$$x^4\sin\varphi + 2rx^3[\sin 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi] + r^2x^2[\sin\varphi + \sin 3\varphi - 2\cos\varphi\sin 2\varphi]$$
$$+r^3x[\sin 2\varphi - 2\cos\varphi\sin 3\varphi] + r^4\sin 3\varphi$$

et l'on vérifie que les coefficients de x^3 et x^2 sont nuls, et que :

$$\sin 2\varphi - 2\cos\varphi\sin 3\varphi = -\sin 4\varphi.$$

Le produit est donc exactement égal à $P(x)$.
3. $X\sin\varphi = x^4\sin\varphi + ax\sin\varphi + b\sin\varphi$.
Comme $a\sin\varphi = -r^3\sin 4\varphi$ (relation (2))
et $b\sin\varphi = -a\sin\varphi(r\cos\varphi) - r^4\cos 4\varphi\sin\varphi$ (relation (1))
$= r^4\cos\varphi\sin 4\varphi - r^4\cos 4\varphi\sin\varphi = r^4\sin 3\varphi$.
On a bien $X\sin\varphi$ identique à $P(x)$.
4. Conséquence

Ou bien $\sin\varphi = 0$
si $r = 0; b = 0$ alors $X = x^4 + ax = x(x^3 + a)$
si $r \neq 0$ $\varphi = k\pi; \cos\varphi = \pm 1; \cos 4\varphi = 1$
donc X s'annule pour $x = r\cos\varphi = \pm r$.
Ou bien $\sin\varphi \neq 0$ alors $P(x)$, donc aussi X est divisible par $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$ en vertu de I.2.

II.1. La dérivée $u'(\varphi) = -4R\sin 4\varphi - \frac{a}{R^2}\sin\varphi$ est négative pour $\varphi \in [\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}]$ car $\sin 4\varphi > \sqrt{\frac{1}{2}}; |\frac{a}{R^2}\sin\varphi| < |a|$ car $R > 1$ et $4R\sin 4\varphi > 4R\sqrt{\frac{1}{2}} > 4|a|$ car $R > \sqrt{2}(|a| + |b|)$. Par ailleurs

$$u(\frac{\pi}{16}) = R\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{a}{R^2}\cos(\frac{\pi}{16}) + \frac{b}{R^3} > 0$$
$$u(\frac{3\pi}{16}) = -R\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{a}{R^2}\cos(\frac{3\pi}{16}) + \frac{b}{R^3} < 0$$

toujours en tenant compte des hypothèses sur R. Donc $u(\varphi)$ continue, décroissante d'une valeur positive à une valeur négative, s'annule une et une seule fois sur $[\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}]$.
Le même type de raisonnement s'applique pour les autres intervalles et les autres propriétés.

II.5. Supposons que U et T n'aient aucun point commun. Comme le point n° 0 est relié au point n° 8 (tous deux sur l'axe), le n° 1 est relié à un n° n_1 avec $n_1 \leq 7$ le n° 2 est relié à un n° n_2 avec $n_2 < n_1$ donc $n_2 \leq 6$ le n° 3 à un n° $n_3 < n_2$ donc $n_3 \leq 5$.
Alors le n° 4 est relié à un n° x par une courbe de T qui forcément coupe U.

III.5. Pour $X_1 = x^4 - 9x + 18$ on a $p = \frac{9^4}{18^3} = \frac{9}{8}$.
L'équation (4) : $z^3 - 2z^2 - 4z + \frac{55}{8} = 0$ admet la solution $z = \frac{5}{2}$ donc $y = 2$ ou $y = \frac{1}{2}$ qui donnent la factorisation

$$X_1 = x^4 - 9x + 18 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 6).$$

Pour $X_2 = x^4 + 5x + 5$ on a $p = 5$. L'équation (4) : $z^3 - 2z^2 - 4z + 3 = 0$ admet la solution $z = 3$ donc $y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2$ ou $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$

$$X_2 = x^4 + 5x + 5 = (x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5+\sqrt{5}}{2})(x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5-\sqrt{5}}{2})$$

ou

$$X_2 = (x^2 - 2[\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}]x + 2[1 + \cos\frac{\pi}{5}])(x^2 + 2[\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}]x) + 2[1 + \cos\frac{3\pi}{5}]).$$