

## **LE THEOREME DE THALES : COMMENT EST-IL ENSEIGNE EN EUROPE ? (\*)**

**Hélène DERUAZ et Nicole KOGEJ**

Le groupe "Europe" travaille à l'IREM de Lyon et réunit des collègues enseignant pour la plupart en collège ou lycée internationaux. Nous accueillons de nombreux élèves étrangers, en particulier européens, c'est pourquoi nous nous intéressons à l'étude comparée de l'enseignement des mathématiques dans différents pays.

Le cas du théorème de Thalès montre une diversité assez grande dans les approches, les énoncés et les types d'exercices, et peut expliquer certaines difficultés d'adaptation spécifiques rencontrées par nos élèves étrangers.

L'analyse qui suit concerne quatre pays d'Europe (Allemagne, Grande-Bretagne, Italie et Espagne) et a été menée à partir de manuels de mathématiques, mais aussi enrichie par des commentaires ou des réflexions de certains de nos élèves.

Nous avons choisi d'y faire figurer des énoncés d'exercices qui nous ont paru assez représentatifs des exercices proposés dans ces manuels, ou qui sont peut-être moins posés en France sous cette forme, ce qui peut nous permettre de faire évoluer nos "stocks" d'exercices traditionnels.

En annexe, un extrait du "Lexique de Mathématiques" de Nicole Kogej, regroupant le vocabulaire relatif à ce chapitre (ce lexique est publié chez Aléas éditeur, 15 quai Lassagne 69001 Lyon au prix de 35.- F, port non compris).

### **GRANDE-BRETAGNE**

L'expression "Théorème de Thalès" est inconnue des élèves anglais, pendant tout le "tronc commun" d'enseignement qui conduit au diplôme du G.C.S.E. (General Curriculum of Secondary Education, présenté vers l'âge de 15 ans, à un niveau équivalent à notre fin de Seconde en France)

On étudie par contre les notions d'homothétie ("enlargement"), et celles de triangles et de figures semblables.

---

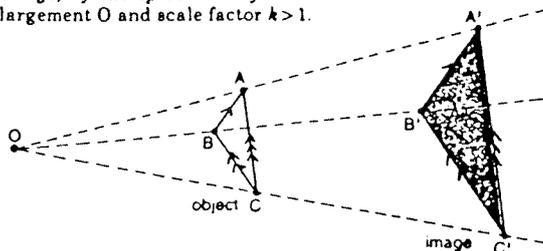
(\*) Cet article est extrait de la brochure inter-IREM "Autour de Thalès" (1995), diffusée par l'IREM de Lyon, Université Lyon I, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex.

© L'OUVERT 81 (1985)

**Enlargement** is a transformation, i.e. a change. In an enlargement the size of the object usually changes and the **scale factor** of the enlargement describes the size of the change. The shape of the object is always unchanged in an enlargement. So the object and its image are similar.

Matching angles in the object and image are equal, corresponding lengths are in proportion.

For example, in this diagram triangle ABC (the object) has been enlarged to triangle A'B'C' (the image) by the *spider or ray method*. It uses a centre of enlargement O and scale factor  $k > 1$ .



Matching lengths have been changed in the same way, i.e. by the scale factor  $k$ .

**Lengths from centre / Lengths on shape**

$OA' = kOA$	$A'B' = kAB$
$OB' = kOB$	$B'C' = kBC$
$OC' = kOC$	$C'A' = kCA$

Since  $k > 1$ , all the *image lengths* are greater than the matching *object lengths*.

Matching sides of the image and object are parallel.

A'B' is parallel to AB. B'C' is parallel to BC. C'A' is parallel to CA.

Sont examinés successivement les cas où le rapport  $k$  est un entier positif, puis une fraction entre 0 et 1, puis négatif. On apprend à déterminer le centre d'homothétie connaissant 2 points et leurs images, ainsi que le rapport entre les aires et les volumes pour des figures homothétiques de l'espace.

L'étude des "triangles semblables" constitue ensuite un cas particulier important : "Lorsqu'une droite parallèle à l'un des côtés coupe un triangle, alors un triangle semblable apparaît. On peut le vérifier sans connaître les mesures des côtés des triangles (...) en utilisant les propriétés des angles." Les trois cas de similitude des triangles sont énumérés. Aucune allusion n'est faite à la notion de projection, et la réciproque permettant de montrer que deux droites sont parallèles n'est pas mentionnée. Signalons aussi que le "théorème des milieux" dans un triangle n'a pas de statut spécial, il n'est pas cité comme cas particulier.

### Exercices :

1 - Exercice d'examen (G.C.S.E., juin 1993)

In the diagram, SR is parallel to PQ.

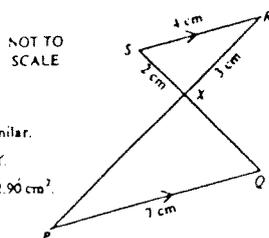
SR = 4 cm, SX = 2 cm, RX = 3 cm and PQ = 7 cm.

(i) Explain why the triangles RSX and PQX are similar.

(ii) Calculate the length of PX and the length of QX.

(iii) It is also given that the area of triangle RSX is  $2.96 \text{ cm}^2$ .

Calculate the area of triangle PQX.  
correct to two significant figures



5 - Placer les points A(1,4), B(1,1), et C(3,1) ; puis compléter cette multiplication de matrices :  
Placer les 3 nouveaux points obtenus A', B', C'. Que dire du triangle A' B' C' ?

Une homothétie est une transformation, c'est-à-dire un changement. Dans une homothétie, la dimension de l'objet change, en général, et le rapport d'homothétie décrit la dimension du changement. La forme de l'objet est toujours conservée dans une homothétie. Ainsi l'objet et son image sont semblables. Les angles correspondants sur l'objet et sur l'image sont égaux, les longueurs correspondantes sont proportionnelles.

Par exemple, sur cette figure, le triangle ABC (l'objet) a été agrandi en un triangle A'B'C' par la méthode de l'araignée ou des rayons. Le centre d'homothétie est O, et le rapport  $k > 1$ .

Les longueurs ont toutes été multipliées par le même facteur  $k$ .

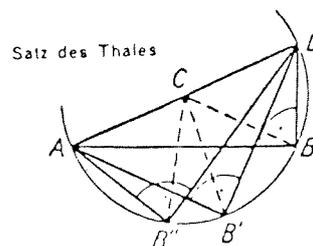
Longueurs depuis le centre sur les figures

Comme  $k > 1$ , toutes les longueurs images sont plus grandes que les longueurs de l'objet.

Les côtés correspondants de l'image et de l'objet sont parallèles.

## ALLEMAGNE

En Allemagne, le "théorème de Thalès" existe, mais c'est un tout autre théorème qu'en France ! Il s'agit du théorème sur les triangles rectangles dont l'hypoténuse est diamètre d'un cercle : "Jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter".

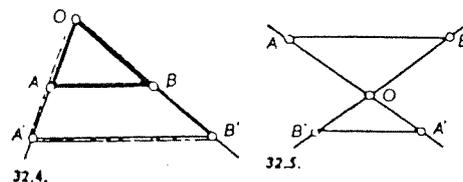


Ce qui correspond à notre "théorème de Thalès" se nomme en allemand "die Strahlensätze" ("théorème des faisceaux de droites concourantes"). Il est étudié en 9ème année (équivalent de notre 3ème), préparé par le théorème des milieux dans un triangle, et par des exercices de partage de segments en n parties égales.

**S 1** Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf einer Gerade wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf irgend einer andern (Fig. 32.4 und 5).

$$\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}; \quad \overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$$

S 1 gilt auch, wenn man Geraden durch Strahlen ersetzt.



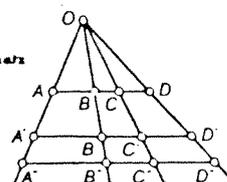
S1 Si un faisceau de droites concourantes est coupé par deux parallèles, alors le rapport des longueurs des segments formés sur l'une des droites est égal au rapport des longueurs des segments correspondants sur n'importe quelle autre droite du faisceau :  $OA:OA' = OB:OB'$  ;  $OA:AA' = OB:BB'$

S1 s'applique aussi en remplaçant "droites concourantes" par "demi-droites de même origine"

S2 (deuxième théorème) : énoncé analogue, mais concernant les segments parallèles [AB] et [A'B'] :

$$AB:A'B' = OA:OA' = OB:OB'$$

33.4. Zum 3. Strahlensatz



S3 (troisième théorème) : variante avec plus de deux droites ou demi-droites concourantes en O :  $AB:BC = A'B':B'C'$ .

La réciproque est indiquée, avec une mise en garde sur les hypothèses nécessaires à bien vérifier.

Sont ensuite développées de très nombreuses applications : théorème dans l'espace, partage de segments et divisions harmoniques, utilisations du théorème en technologie et pour diverses mesures concrètes (compas d'agrandissement/réduction, pantographe, échelles de cartes , etc...), forme vectorielle du théorème, et enfin l'étude des composées d'homothéties, et du groupe des homothéties/translations ; cependant les manuels semblent beaucoup plus ambitieux que ne peuvent l'être les professeurs allemands avec 3 heures par semaine ...!

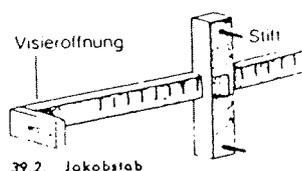
### Exercices :

1 - Déterminer x par le calcul, et faire une figure correspondante, pour chacune des équations

2 - On donne 3 segments de longueurs a, b et c. Construire un segment de longueur :

3 - Un petit pois de 6mm de diamètre cache complètement la pleine lune, lorsqu'on le tient à 66 cm des yeux. Quel est le rapport entre le rayon de la Lune et celui de la Terre, sachant que la distance entre la Terre et la Lune vaut 60 fois le rayon terrestre ?

4 - Un vieil instrument, le *bâton de Jacob* (voir figure), était utilisé au Moyen-Age pour mesurer des hauteurs et des distances. Fabriquer un modèle, et expliquer son utilisation. Donner des exemples de mesures et de calculs.



5- Montrer vectorellement que dans un parallélogramme ABCD, si le point E partage le côté AB dans un rapport k:1 ( k est un réel positif), alors DE partage la diagonale AC dans le rapport (k+1):1

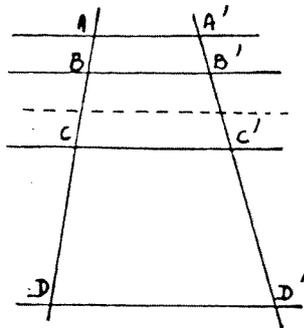
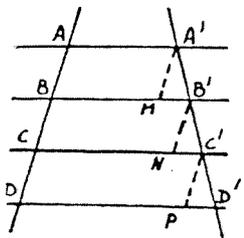
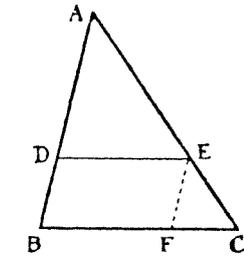
## ESPAGNE

**Teorema de Tales.**—Toda recta paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al opuesto.

Hipótesis:  $DE \parallel BC$  (fig. 158).

$$\text{Tesis: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B}; \quad \hat{E} = \hat{C}. \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}. \end{array} \right.$$

Demostración:



### Enoncé 1-

#### Théorème de Thalès :

Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine un autre triangle semblable à celui-ci .

### Enoncé 2-

#### Teorema de Tales :

I-Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas de forma tal que determinan en una de ellas segmentos iguales, los segmentos determinados en la otra son también iguales.

II-Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados en ambas, son proporcionales

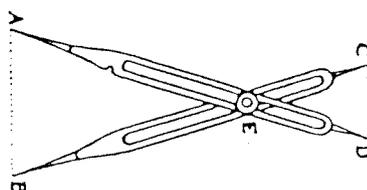
#### Théorème de Thalès :

I-Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles de telle sorte qu'elles déterminent sur l'une d'elles des segments de même mesure alors les segments homologues sur l'autre sont aussi égaux .

II-Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles, les segments correspondants déterminés sur chacune d'elles sont proportionnels.

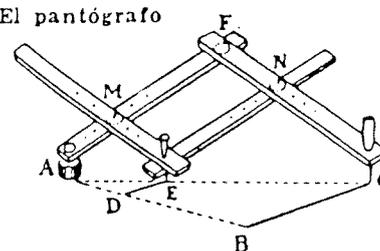
Là aussi, bien que le mot ne soit pas explicitement prononcé, la projection est présente :

- dans le cas du premier énoncé, un travail important sur la notion de segments proportionnels et sur les propriétés des proportions fait suite à :“notre :la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière” pour en arriver “à la projection d'une échelle non régulière”. Le triangle apparaît alors comme un cas particulier. La réciproque est citée et évoquée comme un nouvel outil pour démontrer que deux droites sont parallèles .(“Notre théorème des milieux” est présenté comme un simple exemple du cas particulier triangle cité plus haut ). Viennent alors les triangles semblables, l'énoncé du théorème de Thalès et les cas de similitude des triangles (les mêmes que pour l'Italie !) Les triangles semblables conduisent alors à démontrer le théorème suivant et sa réciproque :“si un faisceau de droites concourantes coupe deux droites parallèles alors il détermine sur elles des segments proportionnels”. Dans les applications, le compas de réduction et le pantographe sont cités.



El compas de reducción

El pantógrafo



- dans le cas du deuxième énoncé, le théorème est le point de départ, puis sont évoqués les partages de segments en parties égales puis en parties proportionnelles “Notre énoncé du théorème de Thalès, façon 3°”, apparaît alors, après les cas de similitude des triangles, mais sans évoquer de réciproque.

Exercices :

1 - Calculer la mesure des côtés du petit triangle formé en prolongeant les deux côtés non parallèles d'un trapèze dont les bases mesurent b et b' et les côtés non parallèles m et n .

2 - Un point C situé entre A et B divise le segment [AB] de 45 cm dans le rapport AC/CB = 2/3. Calculer CA et CB et la distance de C au milieu O de [AB] .

3 - M est un point de la droite (AB) mais extérieur au segment [AB] et tel que MA/MB = 9/5 ,sa distance à O, milieu de [AB], est 35 cm. Trouver AB, MB et MA

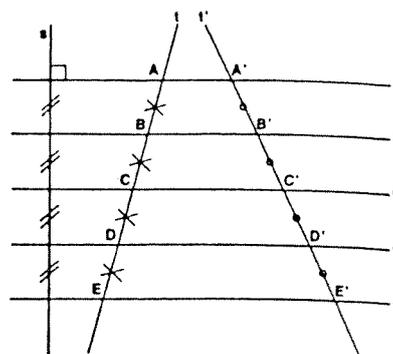
4 - Dans un losange ABCD tracer une parallèle à la diagonale [AC] qui coupe (AB) en E et (BC) en F. Par ces points tracer les parallèles à (BD); celles-ci coupent (AD) en H et (CD) en G. Démontrer que AH x CD = AD x CG .

5 - Démontrer que les droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle à partir du point d'intersection de ses médianes divisent chaque côté en trois parties égales .

**ITALIE**

Il teorema di Talete : I segmenti staccati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

Le théorème de Thalès : Les segments déterminés par un réseau de droites parallèles sur deux sécantes à ces droites sont directement proportionnels.



Le rette a, b, c, d, e sono tra loro parallele ed equidistanti.

$AC = 2AB$	così come pure	$A'C' = 2A'B'$ ;
$AE = 4AB$	così come pure	$A'E' = 4A'B'$ ;
$AD = \frac{3}{2} AC$	così come pure	$A'D' = \frac{3}{2} A'C'$ ;
ecc.		

Le relazioni precedentemente scritte possono venir poste sotto la forma di proporzioni:

$$AC : AB = A'C' : A'B', \quad AE : AB = A'E' : A'B', \quad AD : AC = A'D' : A'C', \text{ ecc.}$$

Même si le mot projection n'est pas prononcé, c'est bien l'idée de : “la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière” qui l'introduit (avec ses corollaires : “notre réciproque du théorème des milieux”, suivi de “notre théorème des milieux” - seul le mot corollaire est employé -)

L'application au triangle se fait alors aussitôt après le théorème de Thalès énoncé ci-dessus, mais sans évoquer de réciproque.

Suivent les triangles semblables et les cas de similitude:

- 1 - deux angles respectivement égaux
- 2 - deux angles égaux compris entre deux côtés respectivement proportionnels
- 3 - les trois côtés respectivement proportionnels.

### Exercices :

- 1 - Démontrer que dans un triangle quelconque les milieux des trois côtés et le pied de l'une des trois hauteurs sont les sommets d'un trapèze isocèle .
- 2 - Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA] d'un triangle quelconque. Montrer que les points C et P sont équidistants de la droite (QR) .
- 3 - Montrer que deux des quatre triangles obtenus à l'intérieur d'un trapèze, après le tracé de ses diagonales, sont semblables .
- 4 - Démontrer que le point d'intersection P des diagonales d'un trapèze est situé au milieu du segment passant par P, parallèle aux bases et dont les extrémités sont sur les côtés non parallèles du trapèze .
- 5 - Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D et de grande base [AB] . Soit E le point de [AB] tel que  $AE = DC$ , soit M le milieu de [BC]. Montrer que les triangles AMD et EMB sont isocèles .

PERCORSI DI MATEMATICA : ALGEBRA-GEOMETRIA-INFORMATICA, par  
L.Tonolini et M.Certo chez Minerva Italica, tome 1.

---

Les articles de Marc Guinot (n° 78 et 79 de 'L'Ouvert' ) ont suscité un vif intérêt de la part de nombreux lecteurs. C'est pourquoi nous signalons ses livres parus chez Aléas Editeur, 15 quai Lassagne – 69001 LYON.

*Le paradoxe de Banach-Tarski*  
et une série de trois livres "arithmétique pour amateur" :

*Pythagore, Euclide et toute la clique.*

"Ce livre s'adresse avant tout à des amateurs éclairés (c'est-à-dire ayant fait une ou deux années d'études mathématiques après le baccalauréat). Il ne s'agit que d'une initiation à la théorie des nombres au cours de laquelle nous abordons (mais avec tous les détails souhaitables et sans rien admettre qui ne soit assuré) quelques-unes des grandes questions qui ont agité et qui agitent encore les arithméticiens : les nombres premiers et leur diversité, les divers aspects de la notion de divisibilité, les sommes de carrés, le problème de Fermat et celui de Waring et jusqu'au théorème plus récent de Mordell-Weil."

*Les "resveries" de Fermat.*

"Ce serait une erreur de réduire l'œuvre arithmétique de Fermat au "grand théorème", et nous axerons nos propos, dans cet ouvrage, autour de trois thèmes : le petit théorème de Fermat, les sommes de deux carrés et la descente infinie."

*"Ce diable d'homme" d'Euler.*

"Si la théorie des nombres n'occupe qu'une petite partie de l'œuvre gigantesque d'Euler, celui-ci ne cessa jamais de s'y intéresser, de 1730 à sa mort... revenant sans cesse sur ses sujets de prédilection : somme de carrés, divisibilité des nombres entiers, équations diophantiennes, fractions continues, équation de Pell, théorie des partitions, développement eulérien de la "fonction zêta", etc... A l'exception de tout ce qui concerne les intégrales elliptiques (d'un niveau un peu trop élevé...), des fractions continues et de l'équation de Pell, cet ouvrage aborde la plupart des questions précédentes."

Français	Anglais	Allemand	Espagnol	Italien
angles alternes internes	interior alternate angles	Wechselwinkel (m)	ángulos alternos internos	angoli interni alterni
angles correspondants	corresponding angles	Stufenwinkel (m)	ángulos correspondientes	angoli corrispondenti
cas de similitude des triangles	rules for two triangles to be similar	Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken	casos de semejanza de los triángulos	criteri di similitudine dei triangoli
centre (m) d'homothétie	centre of enlargement	Streckungszentrum (n)	centro de homotecia	centro di omotecia
concourant	concurrent; converging	zusammenlaufend; schneidend	concurrente; convergente; secante	convergente
correspondant	corresponding	korrespondierend	correspondiente	corrispondente
couper (se)	to cut; to meet	schneiden (sich)	cutarse; encontrarse	segars; incontrarsi; intersecarsi
couper au milieu	to bisect	halbieren	bisecar	dimezzare
determiner	to determine	bestimmen	determinar	individuare
égal	equal	gleich	igual	uguale
faisceau (m) de droites concourantes	set of straight lines which meet at the same point	Strahlenbündel	haz de rectas convergentes	fascio di rette convergenti
homologue	corresponding; transformed	korrespondierend	homólogo	omologo
homothétie (f)	enlargement similarity; dilatation	Streckung (f)	homotecia	omotetia (f)
intersection (f)	intersection	Schnittstelle (f); Durchschnitt (m)	intersección	intersezione (f)
joindre	to join; to connect	verbinden	unir; juntar	congiungere
milieu (m)	mid point	Mittelpunkt (m)	punto medio	punto medio
opposé	opposite	gegenüberliegend	opuesto	opposto
pantographe (m)	pantograph	Pantograph (m)	pantógrafo	pantografo (m)
parallèle à	parallel to	parallel zu	paralelo a	paralelo a
rapport (m) d'homothétie	scale factor of an enlargement	Streckungsfaktor	razón de homotecia	rapporto di omotetia
réseau de droites parallèles (m)	set of parallel straight lines	Menge (f) von parallele Gerade	conjunto de rectas paralelas	fascio (m) di rette parallele; fascio improprio
sécante (f)	secant; transversal	Sekante (f); schneidende Gerade (f)	secante; transversal	secante (f); trasversale (f)
triangles congruents (égaux)	congruent triangles	kongruente Dreiecke	triángulos congruentes (iguales)	triangoli uguali
triangles semblables	similar triangles	ähnliche Dreiecke (n)	triángulos semejantes	triangoli simili