L'ÉQUATION DE DEGRÉ 4 ET LE TÉTRAÈDRE RÉGULIER

Marcel KRIER
Maître de conférences à l'U.F.R. de Mathématique de Strasbourg

Voici une petite particularité géométrique.

1.– Lien entre le triangle équilatéral et l'équation du troisième degré

Considérons une équation du troisième degré à coefficients réels, mise sous forme canonique c'est-à-dire sans termes en x^2 :

$$(1) \qquad X^3 + pX + q = O.$$

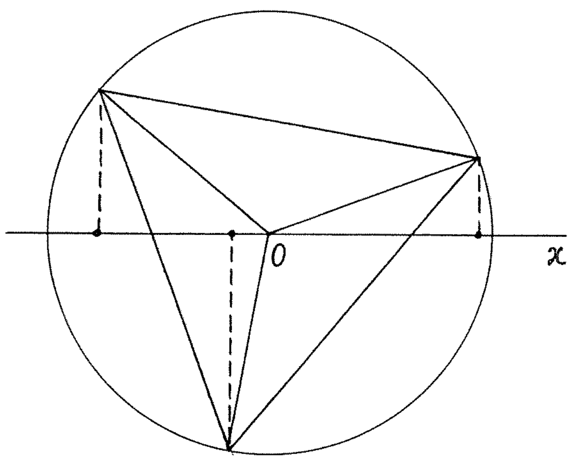
On sait que, quand cette équation a trois racines réelles, p est strictement négatif car le polynôme dérivé a deux racines réelles. Une méthode de résolution numérique consiste alors à se ramener au cas de l'équation

$$(2) \qquad 4Y^3 - 3Y - \cos a = 0 \text{ (où } \cos a \text{ est connu)}$$

dont les racines sont $Y_k = \cos \frac{a+2k\pi}{3}$, $k = 1, 2, 3$.
On se ramène de (1) à (2) en posant $X = \sqrt{\frac{-4p}{3}}Y$, puis $\cos a = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}$.

Question : montrer que la condition $-1 \leq \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}} \leq 1$ exprime justement que (1) a ses trois racines réelles.

Cette méthode de résolution peut s'interpréter ainsi : considérons dans le plan un axe Ox avec un vecteur unitaire $\vec{i}$. Il existe un triangle équilatéral ABC de centre O tel que les racines de (1) soient les mesures algébriques sur Ox des projections orthogonales des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sur cet axe. Il est facile de voir que ce triangle est unique, à la symétrie près autour de Ox. Un petit calcul montre que $OA^2 = OB^2 = OC^2 = -4p/3$. La dimension du triangle ne dépend que de la valeur de p.



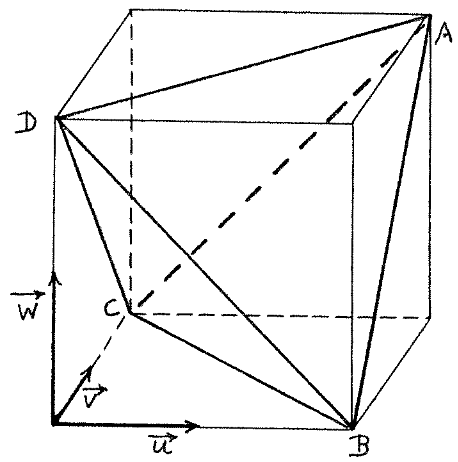
2.– L'équation de degré 4

Peut-on trouver quelque chose d'analogue pour l'équation du quatrième degré? Parmi les diverses généralisations que l'on peut envisager, l'une consiste à se demander si, étant donnée une équation de degré 4 avec toutes ses racines réelles et un axe Ox dans l'espace, sur lequel les quatre racines ont été placées, il existe un tétraèdre régulier tel que les projections orthogonales sur Ox des quatre sommets soient ces quatre racines. Nous allons montrer que c'est effectivement le cas.

3.– Projections des sommets d'un tétraèdre régulier

Considérons dans l'espace euclidien de dimension 3 un axe Ox de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ et un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre O. Soient $a = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OC}$, $d = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OD}$. Comme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$ on voit que $a + b + c + d = 0$. Inversement, a, b, c et d étant connus, comment retrouver le tétraèdre? La géométrie peut nous donner une idée (en fait, la théorie des groupes) : étant donné un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre O, les quatre sommets et leurs symétriques par rapport à O sont les sommets d'un cube. Or, il semble plus agréable d'aller rechercher un cube qu'un tétraèdre.
Si on désigne par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs unitaires sur les arêtes du cube et par 2 le côté du cube, on a

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}.$$



En posant $Y_1 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{u}$, $Y_2 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{v}$, $Y_3 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{w}$, on a

(3) $a = Y_1 + Y_2 + Y_3,\ b = Y_1 - Y_2 - Y_3,\ c = -Y_1 + Y_2 - Y_3,\ d = -Y_1 - Y_2 + Y_3$

d'où Y_1, Y_2 et Y_3 en fonction de a, b, c et d (n'oublions pas que $a + b + c + d = 0$).

(4) $\quad Y_1 = \frac{1}{4}(a + b - c - d),\ Y_2 = \frac{1}{4}(a - b + c + d),\ Y_3 = \frac{1}{4}(a - b - c + d).$

Remarquons que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2). \tag{5}$$

Ces quelques formules suffisent à notre analyse, nous pouvons passer à la synthèse qui s'effectuera en deux étapes 4.– et 5.–

4.– Quadruplets de nombres réels

Considérons quatre nombres réels a, b, c, d tels que

$$a + b + c + d = O \text{ et } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Introduisons les trois nombres Y_j par les formules (4). On a $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1$, donc Y_1, Y_2 et Y_3 s'interprètent comme les cosinus directeurs d'un vecteur $\overrightarrow{i}$ dans un repère orthonormé $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En renversant cette phrase, on peut dire qu'étant donné un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$ dans l'espace, il y a au moins un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ formant une base orthonormée, de sorte que Y_1, Y_2, Y_3 soient les mesures algébriques des projections orthogonales de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{i}$. A partir d'un tel triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, considérons les points $ABCD$ définis par

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w} \;;\; \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}.$$

Ces points, avec leurs symétriques par rapport à O sont les sommets d'un cube, d'arête 2 et le tétraèdre régulier $ABCD$, de centre O, a les projections de ses sommets sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ en les quatre points a, b, c et d respectivement. L'arête du tétraèdre vaut $2\sqrt{2}$.

5.– Énoncé en termes d'équation

Soit une équation de degré 4 ayant quatre racines réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sans terme de degré 3 (par translation sur les racines, on s'y ramène facilement)

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0. \tag{6}$$

On a certainement $p < 0$ puisque le polynôme dérivé a trois racines réelles. Les relations entre coefficients et racines donnent d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = O, \; \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = p,$$
$$\beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta + \alpha\beta\gamma = -q, \text{ et } \alpha\beta\gamma\delta = r$$

d'où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = -2p$.
En posant $\alpha = a\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\beta = b\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\gamma = c\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\delta = d\sqrt{\frac{-p}{2}}$ on a $a + b + c + d = 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ et par argument d'homothétie on peut donc énoncer :
les quatre racines de (6) sont les mesures algébriques des projections orthogonales sur un axe des sommets d'un tétraèdre régulier d'arête $= 2\sqrt{-p}$.
Question subsidiaire : examiner le cas $p = 0$.

6.– La résolution de l'équation de degré 4

Il serait dommage de s'arrêter alors que nous sommes à deux doigts de pouvoir résoudre algébriquement cette équation (5).
Reprenons les formules (4) appliquées à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$Z_1 = \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta),\ Z_2 = \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma - \delta),\ Z_3 = \frac{1}{4}(\alpha - \beta - \gamma + \delta).$$

On voit que les Z_j^2 sont les solutions d'une équation de degré 3 assez facile à établir.
Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 &= -p/2 \\ Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_3^2 Z_1^2 &= p^2 - 4r \\ Z_1 Z_2 Z_3 &= -\frac{1}{8}q. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs aboutir à cette même méthode de résolution (ramener la résolution de l'équation (6) à celle d'une équation de degré 3) grâce à l'identité remarquable

$$\begin{aligned} &(X - u - v - w)(X - u + v + w)(X + u - v + w)(X + u + v - w) \\ &= X^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)X^2 - 8uvwX + u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2). \end{aligned}$$

C'est une méthode qui remonte à Euler.

"Tétraèdre fractal 30 × 34,5."
Extrait du livre : *Espaces gravés*
de Patrice Jeener
paru chez Cédic/Nathan en 1986.
Ce graveur est souvent présent aux
"Journées Nationales de l'A.P.M.E.P.".