Excursions et incursions dans l'Analyse Harmonique d'hier et d'aujourd'hui (I)

Olivier GEBUHRER

§ 0. Pour inciter le lecteur à puiser à d'autres sources

Parler aujourd'hui de l'analyse harmonique, de son histoire et de ses prolongements contemporains est évidemment une gageure. La littérature - même la meilleure possible - est si vaste, les bifurcations si nombreuses qu'il est dérisoire a priori de chercher à en donner ne serait-ce qu'un aperçu global, à supposer que l'auteur d'un projet aussi insensé se sente de taille à l'affronter, ce qui n'est pas mon cas.

On trouvera ici quelques itinéraires possibles dans un immense massif en mouvement. Ces itinéraires reflètent le goût de l'auteur et ne prétendent aucunement forcer quelque lecteur que ce soit à s'y cantonner ou même à les suivre.

L'Analyse Harmonique constitue un immense massif en transformation permanente, largement méconnu de nos contemporains, à tel point que le nom même rencontre souvent la stupeur de l'interlocuteur, comme l'auteur l'a souventes fois observé. De cet immense massif, seuls quelques pics ont été explorés en tous sens. Ces explorations ont été si profondes que les mystères laissés en suspens paraissent insondables même avec les moyens d'aujourd'hui. Les promeneurs, peu tentés par les pics inaccessibles, peuvent s'offrir isolément ou en groupe le spectacle de vallées luxuriantes, aux beautés sans limites, sans marche forcée.

§1. De l'analyse de Fourier à la théorie des représentations.

L'affaire commence par un conte de fées. Pour y pénétrer, il faut rappeler les débuts de la théorie de la conduction de la chaleur. J'ai longtemps hésité avant de reproduire le raisonnement heuristique conduisant à l'équation de la chaleur dans une barre cylindrique : ce n'est pas le cœur du propos. Mais pour la complétude toutefois, ce rappel peut être utile.

On considère une barre homogène cylindrique isolée du milieu extérieur. Soit u(x,t) la température à l'instant t de la section droite d'abscisse x de la barre.

L'hypothèse centrale est la suivante : pendant un intervalle de temps infinitésimal, la température des sections droites situées entre deux abscisses voisines ne dépend pas du temps!!

A ce morceau choisi, on ajoute l'inévitable "l'expérience montre " que la quantité de chaleur q passant à travers une barre dont les extrémités sont tenues à deux températures constantes est proportionnelle à la différence des températures, à la surface de la section droite, à l'intervalle de

de temps et inversement proportionnelle à la longueur de la barre qui sépare les sections droites considérées.

Si K désigne la conductivité thermique de la barre ne dépendant que du matériau utilisé, on peut donc écrire :

$q = K\,[u(x + x_0,t_0) - u(x_0,t_0)]\; s\frac{t - t_0}{x}$.

De la sorte Q(x), quantité de chaleur passant à travers la section droite d'abscisse x_0 pendant le temps $t - t_0$ s'écrit : $Q(x) = K\frac{\partial u}{\partial x}\, s\,(t - t_0)$

Entre deux sections droites d'abscisses x_0 et $x_0 + x$, la quantité de chaleur reçue pendant le temps $t - t_0$ est donc $\Delta Q = Q(x_0 + x, t_0) - Q(x_0,t_0)$ (si $t - t_0 <<<1$)

d'où $\Delta Q = K\, s\, (t - t_0)\, \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + x,t_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0)\right]$

On peut encore calculer cette quantité de chaleur par une autre "méthode" : si c est la capacité thermique et ρ la densité (par unité de longueur) du matériau constituant la barre,

$\Delta Q = c\, \rho\, s\, x\, \left[u(x_0, t) - u(x_0,t_0)\right]$

Ceci résulte du "fait" que si $t - t_0 <<< 1$, les températures des sections droites situées entre les abscisses x_0 et $x_0 + x$ peuvent être considérées comme constantes à chaque instant si x est assez petit.

Finalement $K\,(t - t_0)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + x,t_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0)\right] = c\,\rho\,x\left[u(x_0,t) - u(x_0,t_0)\right]$ et par passage à la limite $\frac{K}{c\,\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0)$. C'est l'équation de la chaleur.

N'épiloguons pas, pour le moment sur de tels "justificatifs". Il est tout de même à souligner que de telles prémisses permettent de concevoir que d'excellents esprits trouvent la physique, dans ses fondements, quelque peu étrange. Il existe aujourd'hui des présentations plus sérieuses mais elles exigent davantage de mathématiques[1]. Evidemment, le "raisonnement"précédent est si emberlificoté, si peu naturel, qu'il ne peut rien prétendre expliquer. Aussi bien le conte de fées n'est–il point là.

Considérons l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) où u est une fonction REELLE de deux variables.

Ne discutons pas pour le moment le sens de cette équation et admettons qu'"elle provient de la physique". Nous allons la "résoudre" en empruntant le chemin de J. Fourier dans un Mémoire

---

[1] Tant pis pour les collègues qui continuent de proclamer urbi et orbi, même en DEUG que, pour les expérimentalistes, la règle de trois suffit. Je l'ai entendu. Il est inutile de protester.

resté célèbre[2]. Cherchons d'abord les solutions u qui s'écrivent $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ où φ et ψ sont deux fonctions réelles d'une variable.

On voit de suite que $\psi'(t)\,\varphi(x) = \varphi''(x)\,\psi(t)$. D'où $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$.

Avant de poursuivre, il faut observer que nous ne cherchons pas la forme d'une solution "générale" de l'équation (1) mais une solution qui correspond à des données précisées et connues expérimentalement ; pour le coup, cette remarque a un sens concret.

Par exemple on peut imaginer que les deux sections droites extrêmes sont maintenues à température constante égale à 0 et que la température le long de la barre à l'instant 0 est connue en tout point.

D'où $\begin{cases} u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{où } \ell \text{ est la longueur de la barre} \\ u(x,0) = f(x) & \text{où f est maintenant une fonction donnée.} \end{cases}$

L'équation $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ implique aussitôt que $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ où λ est une constante réelle (si φ et ψ sont réelles). Ceci décompose l'équation de la chaleur en deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\ \varphi(x) \\ \psi'(t) = \lambda\ \psi(t) \end{cases}$$

avec $\varphi(0)\,\psi(t) = \varphi(\ell)\,\psi(t) = 0$ pour tout t et $\varphi(x)\,\psi(0) = f(x)$ pour tout x.

Comme on veut éliminer la solution triviale, on voit que $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$. De sorte qu'en posant $\lambda = -\mu^2$, ce qui n'est possible que si $\lambda < 0$, on trouve $\varphi(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$ et $\varphi(0) = 0$ impose $A = 0$. Donc $\varphi(x) = B\sin\mu x$. Comme $\varphi(\ell) = 0$, $\mu \in \dfrac{\pi}{\ell}\mathbb{Z}$.

Posons $\mu_n = \dfrac{\pi}{\ell}\,n$. Alors l'équation $\psi_n'(t) = -\dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\,\psi_n(t)$ donne $\psi_n(t) = A_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$.

Au bout du compte, avec l'hypothèse supplémentaire $\lambda \le 0$, on trouve des solutions réelles $u_n(t) = A_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\dfrac{\pi}{\ell}nt$.

Si $\lambda > 0$ on trouve $\varphi(x) = A\,\mathrm{ch}\mu x + B\,\mathrm{sh}\mu x$ et $\varphi(0) = 0$ impose à nouveau $A = 0$; or $\varphi(\ell) = 0$ impose aussi $B = 0$ et on ne trouve rien d'autre que la solution triviale.

---

[2] "Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides" lu le 21 décembre 1807 devant l'Académie des Sciences de Paris

Cela n'empêche pas la terre de tourner et on ne se pose pas de questions.
Donc on a trouvé sous certaines conditions des solutions particulières de l'équation (1) satisfaisant ce qu'il est convenu d'appeler les conditions initiales (conditions aux limites convient mieux) $u_n(0,t) = u_n(\ell,t) = 0$ à savoir $u_n(x,t) = A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} t}$.

Evidemment la condition $u(x, 0) = f(x)$ n'a pas été réalisée et n'a jamais été utilisée.

Maintenant J.Fourier déclare que si on pose $u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x,t)$ on obtient la solution "générale" de l'équation (1) et que si l'on cherche la solution particulière vérifiant la condition $u(x,0) = f(x)$, on aura $u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} = f(x)$.

D'où, toujours selon J.Fourier $A_p = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi p x}{\ell} dx$ comme "on le voit" en intégrant terme à terme la série définissant u.

Le continent est découvert. J.Fourier a été précédé par d'Alembert, Bernoulli, Euler mais enfin, à partir du Mémoire de J.Fourier, les choses vont vraiment changer du tout au tout.
L'histoire proprement intellectuelle de l'itinéraire de J.Fourier EN SON TEMPS reste à écrire.
Après tout, ce qui précède est une longue suite d'invraisemblances, de hasards forcés et on ne trouve dans aucun livre la moindre remarque critique, même pas dans le remarquable ouvrage de A.Dahan–Dalmédico[3] qui, il est vrai, se propose davantage un tour d'horizon cursif.
Plus grave est le fait qu'à des détails près, jusqu'en Licence, c'est ainsi que l'histoire est racontée aux enfants et on ne voit pas qu'il y ait à s'étonner qu'après cela ils croient qu'"on fait les enfants par l'oreille".

Chercher des solutions particulières de l'équation (1) sous la forme $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ se conçoit et s'explique. On y reviendra. Que l'on aboutisse ainsi à fabriquer une SUITE (u_n) de solutions particulières raisonnables, modulo des contorsions variées, soit.

Mais écrire $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x,t)$ est extravagant et ce n'est pas un problème de convergence

---

[3] A.Dahan-Dalmédico / J.Peiffer *Une histoire des mathématiques - Routes et dédales* Seuil 1986

comme on l'écrit généralement. Ne parlons pas de la formule $A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$ qui soulève des questions redoutables, et encore moins des doutes sérieux soulevés par l'affirmation selon laquelle toute fonction f se représente sur l'intervalle $[0,\ell]$ par la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$.

Il faut quand même se rendre compte que la solution u est une fonction de deux variables et qu'il n'y a pas de raison sérieuse a priori **pour qu'on puisse espérer trouver cette solution comme somme de fonctions qui s'écrivent comme produit de deux fonctions d'une variable** !

Il y a encore bien plus sérieux. Si l'on veut que l'équation de la chaleur (1) ait un sens, il faut supposer que u est $\mathcal{C}^1$ en t, $\mathcal{C}^2$ en x, et si l'on veut être de mauvaise foi, disons qu'a priori on va chercher une solution $\mathcal{C}^\infty$ des deux variables (cela ne résoud aucune des difficultés mais au moins c'est raisonnable). Or les solutions particulières u_n sont ANALYTIQUES et prétendre reconstituer toute SOLUTION $\mathcal{C}^\infty$ de deux variables comme somme de fonctions analytiques est faire preuve soit d'une intuition géniale soit d'une ignorance absolue des questions mathématiques considérées.

Evidemment, aucun des contemporains de J.Fourier ne pouvait penser en ces termes et si le Mémoire fameux est devenu célèbre, c'est pour de toutes autres raisons que nous examinerons un peu plus loin. Enfin, notons que la question la plus redoutable de toutes a été seulement évoquée : la fonction u(x,0) = f(x) est donnée. Ecrire que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ pour $x\in [0,\ell]$ soulève d'immenses questions dont certaines furent pressenties par les contemporains et par de grands auteurs antérieurs (voir la polémique Euler, d'Alembert, Bernoulli autour de l'équation des cordes vibrantes). Avant d'aller plus loin et après avoir joué le rôle de l'avocat général intraitable jouons celui de l'avocat.

D'abord, en se reportant à l'excellent livre élémentaire (mais un peu ancien) de G. P.Tolstov (coll. Dover) on peut voir que la méthode invraisemblable précédente fournit des solutions raisonnables à une foule d'autres équations "provenant" de la physique.

Par exemple la vibration d'une membrane rectangulaire est régie par l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = c^2 \Delta u$ où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Mais , si l'on s'en tient à l'équation de la chaleur, un observateur perspicace ne manquera pas de noter que si $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$, alors non seulement en faisant t = o dans cette équation on trouve $u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$, mais on voit, au moins formellement qu'EN FAISANT TENDRE t vers 0 on trouve $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = u(x,0)$.

Notons que si on considère $t < 0$, on trouve que le terme $e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$ explose lorsque n augmente indéfiniment, ce qui est au moins l'indice d'un problème sérieux. Toutefois, en persévérant dans la mauvaise foi la plus intégrale, on peut considérer qu'il n'y a pas de "sens physique" à faire tourner les aiguilles d'une montre à rebours et que l'histoire n'est pas un phénomène réversible. Autrement dit, "se non è vero, è bene trovato".

Donnons maintenant une idée d'une situation un peu plus générale que nous empruntons encore à Georgi.P.Tolstov (op.cité). Considérons l'équation aux dérivées partielles $P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial u}{\partial x} + Q\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où P, Q, R sont des fonctions continues de x.

La recherche des solutions de cette équation est sujette à deux types de conditions :

1) Des conditions frontières :

$$\begin{cases} \alpha u(a,t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \text{ , pour tout } t \geq 0 \\ \gamma u(b,t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0 \end{cases}$$

2) Des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

où f, g sont des fonctions continues et où les nombres α, β et γ, δ respectivement ne sont pas simultanément nuls ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$) .

Comme dans l'exemple de l'équation de la chaleur on peut chercher des solutions particulières u de la forme $u(x,t) = \Phi(x)\,\Psi(t)$ satisfaisant les conditions frontières (1).

On obtient $P\,\Phi''\,\Psi + R\,\Phi'\,\Psi + Q\,\Phi\,\Psi = \Phi\,\Psi''$

et par suite $\frac{P\,\Phi'' + R\Phi' + Q\Phi}{\Phi} = \frac{\Psi''}{\Psi} = \lambda \in \mathbb{R}$

On voit donc que les équations différentielles d'une variable du type $P\Phi''+R\Phi'+Q\Phi=\lambda\Phi$ sont amenées à jouer un rôle essentiel.

On suppose maintenant que la fonction P ne s'annule pas sur l'intervalle où l'on cherche une solution : cette condition est naturelle dans un premier temps ; si P possède des zéros sur l'intervalle en question, en chacun de ces zéros l'équation initiale dégénère en une équation d'ordre 1. (N'évoquons même pas ce qui se passe si P s'annule sur un sous intervalle de l'intervalle de définition).
On peut donc supposer $P>0$ sur l'intervalle considéré ; résolvons le système $p=rP$, $p'=rR$ où r est une nouvelle fonction inconnue auxiliaire . On voit que $\frac{p'}{p}=\frac{R}{P}$ et $r=\frac{p}{P}$
En multipliant par r, l'équation initiale $P\Phi''+R\Phi'+Q\Phi=\lambda\Phi$ devient
$rP\Phi''+rR\Phi'+rQ\Phi=\lambda r\Phi$ et en posant $q=rQ$ on a $p\Phi''+p'\Phi'+q\Phi=\lambda r\Phi$
ce qui s'écrit encore $\frac{d}{dx}(p\Phi')+q\Phi=\lambda r\Phi$
Les opérateurs différentiels du second ordre qui interviennent dans ce type de questions sont donc du type suivant :
$L\Phi=\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dx}(p\frac{d\Phi}{dx})+q\Phi\right]$; p et q sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une classe particulière de tels opérateurs L est la suivante :
$L\Phi=\frac{1}{A}\frac{d}{dx}(A\frac{d\Phi}{dx})+B\Phi$ où A est maintenant une fonction $\mathcal{C}^1$, B une fonction continue.

Les opérateurs différentiels du second ordre linéaires de la première forme ont été étudiés par les mathématiciens français Sturm et Liouville dans une série de Mémoires communs. Avant de poursuivre, observons que tout ceci se passe au début du XIXème siècle! Je ne peux que renvoyer le lecteur (la lectrice) au merveilleux ouvrage "Fourier Analysis" du grand mathématicien britannique actuel T.W.KÖRNER (Cambridge University Press) pour des détails significatifs sur les objections rencontrées par Fourier à ses débuts, ainsi qu'à de bien d'autres excursions que celles qui sont proposées ici.

Toutefois que l'on me permette cette note personnelle qui prétend expliquer comment et pourquoi les idées de Fourier étaient dans l'air à défaut d'être mathématiquement satisfaisantes (on a vu plus haut que ce n'est pas principalement un problème de rigueur!). Le début du XIXème siècle est marqué en France par un essor impétueux des technologies industrielles dans leur phase primitive. L'idée que le monde est à la fois simple et compréhensible est une idée

COMMUNE. On peut à bon droit considérer que cette idée est l'un des legs fondamentaux de la Révolution française.

Les équations différentielles d'une variable avaient fait l'objet de travaux antérieurs, bien connus des physiciens et mathématiciens français de ce temps. La linéarité était aussi familière comme idée que celle du mouvement terrestre autour du soleil. Les spécialistes ne la PENSAIENT PAS mais ils étaient convaincus que ce principe gouvernait le monde sensible. Quoi de plus naturel que de chercher à résoudre une équation de plusieurs variables en cherchant à se ramener à des équations d'une variable ? Quoi de plus naturel que de faire la somme des solutions obtenues ? Depuis longtemps, les spécialistes s'étaient rendus compte qu'un phénomène physique astreint à des conditions extérieures connues possède une loi bien définie, calculable ANALYTIQUEMENT, c'est–à–dire par une formule composée de fonctions simples. En d'autres termes, l'idée de l'existence et de l'UNICITÉ de la solution d'un problème physique concret faisait partie du patrimoine intellectuel collectif. Il ne faut pas s'étonner qu'à peine quelques années plus tard Cauchy démontrera des théorèmes de cette nature.

Ayant perdu le sens d'un monde devenu soudain infiniment complexe, en mouvement violent et chaotique, les idées communes de l'époque nous paraissent aujourd'hui stupéfiantes de simplicité et on s'étonne, parfois à bon droit, qu'elles aient pu conduire à l'embryon de résultats extraordinaires.

Revenons maintenant aux opérateurs de Sturm–Liouville. Ces deux grands mathématiciens ne s'y sont pas intéressés par la vertu d'une intuition aussi géniale que démoniaque. Laguerre, Hermite avaient mis en évidence des suites de polynômes aux propriétés toutes spéciales ; ils étaient définis par des relations de récurrence, de sorte qu'on pouvait les calculer à un ordre arbitraire. Des calculs élémentaires montraient qu'on les obtenait comme solutions particulières d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. L'étude de leurs zéros incita Sturm et Liouville à étudier des équations différentielles linéaires du type indiqué.

Il apparaît que résoudre un problème du type suivant :

$$\begin{cases} L\Phi = \frac{d}{dx}(p\frac{d\phi}{dx}) + q\Phi = \lambda r\Phi \\ \alpha\Phi(a) + \beta\Phi'(a) = 0 \end{cases}$$

conduit à une suite (λ_n) de valeurs réelles pour lesquelles on peut trouver une solution Φ_n non nulle .

Il est maintenant raisonnable de s'attendre à voir s'établir une étonnante similitude entre le problème de la réduction d'un opérateur linéaire en dimension finie et le problème précédent. Cette question sera traitée plus en détail dans la deuxième partie de l'article mais à ce stade faisons deux observations :

Exemple 1 : L'opérateur $L = \frac{d}{dx}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ cherchons les solutions u_λ de l'équation $\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Pour que ce problème ait un sens a priori il faut supposer que les solutions u_λ sont dérivables (on ne suppose pas que u soit $\mathcal{C}^1$). Cette seule hypothèse de dérivabilité des solutions conduit aussitôt à observer que ces solutions sont en fait $\mathcal{C}^1$ car $\frac{d}{dx} u = \lambda u$ et λu est continue.

Par récurrence, il s'ensuit que les solutions cherchées sont $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elles existent. L'avocat général qui cherche des arguments frappants pour démolir l'extravagante simplicité de la méthode de J.Fourier est maintenant sur le grill pour l'opérateur L qui est, il est vrai, linéaire du premier ordre.

Or la surprise , comme chacun le sait ne s'arrête pas là. De $Lu = \lambda u$ et $u(0) = 1$ on déduit que $u'(0) = \lambda$ et par récurrence $u^{(n)}(0)$ qui a maintenant un sens vaut : $u^{(n)}(0) = \lambda^n$.

Regardons alors la série de Taylor de u :

son terme général s'écrit $\frac{\lambda^n x^n}{n!}$ et par suite définit une série entière normalement convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Sa somme $E_\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n x^n}{n!}$ satisfait $E_\lambda(0) = 1$ et $LE_\lambda = \lambda E_\lambda$ et c'est l'unique solution du problème posé, qui est donc non seulement $\mathcal{C}^\infty$ mais analytique sur $\mathbb{R}$. Terrifiante observation pour l'avocat général.

Poussons l'analyse un peu plus loin. Posons $\Phi_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Nous vérifions que $L\Phi_n = \Phi_{n-1}$, $L\Phi_0 = 0$. Les fonctions Φ_n sont donc reliées à L.

Si maintenant nous prenons une fonction f (sur laquelle nous ne précisons pas d'hypothèse) et que nous formons la série de Taylor de f ASSOCIEE à l'opérateur L, nous pouvons écrire $\sum_{n\geq 0} \Phi_n(x) L^n f(y) = A_x f(y)$ où L^n n'est autre que LoLo.....oL (n facteurs) et A_x est un opérateur linéaire formel pour le moment.

Réécrivons la formule précédente en explicitant L et Φ_n :

$A_x f(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} (\frac{d}{dx})^n f(y) = f(x+y)$. Autrement dit, la connaissance des fonctions Φ_n associées à l'opérateur différentiel L permet de RECONSTITUER l'opération de groupe additif de $\mathbb{R}$. Nous n'en dirons pas plus pour l'instant.

Exemple 2 : Un opérateur intégral.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur [0,1].

On pose $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$.

V est donc un opérateur linéaire de E dans E. Observons immédiatement qu'il n'est pas surjectif puisque Vf est $\mathcal{C}^1(]0,1[)$ si $f \in E$.

Résolvons pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation $Vf = \lambda f$.

Nous voyons aussitôt que les solutions f de cette équation sont $\mathcal{C}^\infty(]0,1[)$ et nous avons $\lambda f'(x) = f(x)$ pour $x \in]0,1[$. De la sorte $f(x) = Ke^{\frac{1}{\lambda}x}$ pour $x \in]0,1[$. Or $Vf(0) = 0 = \lambda f(0)$.

Si $\lambda \neq 0$ ceci impose $K = 0$ et il n'y a pas d'autre solution à l'équation $Vf = \lambda f$ que la fonction nulle pour $\lambda \neq 0$.

Pour $\lambda = 0$, la situation est évidemment identique car $\int_0^x f(t)dt = 0$ pour $x \in [0,1]$ implique $f = 0$.

On voit donc sur ce deuxième exemple, qu'il est difficile de simplifier, que les problèmes de Sturm–Liouville obéissent à des règles très profondes ; il n'y a pas d'espoir a priori de généraliser naïvement la théorie de la réduction des opérateurs linéaires en dimension finie à la dimension infinie.

Le lecteur averti reconnaîtra aussitôt que les deux exemples précédents sont voisins.

L'exemple 2 traite de façon camouflée de l'opérateur $L = \frac{d}{dx}$; seule change la condition initiale incorporée dans la définition de V.

Dans l'exemple 2 on résoud le problème $\begin{cases} L = \frac{d}{dx} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

alors que dans l'exemple 1 on résoud le problème $\begin{cases} L = \frac{d}{dx} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Nous quittons dorénavant temporairement cette grande chaîne du massif de l'Analyse Harmonique contemporaine pour nous intéresser à l'analyse de Fourier proprement dite.

Dans l'exemple de la barre cylindrique, nous avons vu l'apparition du développement d'une fonction "arbitraire" en série de sinus. Le lecteur (la lectrice) croira sur parole qu'en changeant les conditions aux limites, les cosinus entrent en scène et la question devient :

peut–on représenter une fonction "arbitraire" comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f(x)\, e^{inx}$?

peut–on représenter une fonction "arbitraire" comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f(x)\, e^{inx}$?

Ce problème a occupé les mathématiciens du monde entier pendant un siècle et demi ; comme on va le voir, il y a matière.

Commençons d'abord par faire connaissance avec les fonctions $\chi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

D'abord $\chi_n(x + y) = \chi_n(x)\, \chi_n(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Rappelons que l'on peut munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'équivalence en posant $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est encore muni d'une structure de groupe additif par passage au quotient de la loi de groupe sur $\mathbb{R}$. Le nouveau groupe obtenu s'appelle le tore à une dimension et se note $\mathbb{T}$ (ce n'est pas un sous groupe de $\mathbb{R}$!!).

On vient de voir que les fonctions χ_n sont des homomorphismes de $\mathbb{T}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^x = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$. Ce sont évidemment des fonctions continues. Y'en–a–t–il d'autres ? La réponse est négative mais ce n'est pas si trivial à démontrer. C'est trivial si on cherche des fonctions $\mathcal{C}^1$ qui satisfont à l'équation $\chi\ (x+y) = \chi(x)\chi(y)$; $\chi(0) = 1$.

Par dérivation par rapport à x (χ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) on trouve $\chi'(x+y) = \chi'(x)\chi(y)$.

Prenons alors $x = 0$; il vient $\chi'(y) = \chi'(0)\chi(y)$. Si $\chi'(0) = 0$, l'unique solution est la fonction constante **1**. Si $\chi'(0) \neq 0$, on a $\chi(x) = ce^{\chi'(0)x}$ et $c = 1$ car $\chi(0) = 1$.

Donc $\chi(x) = e^{\chi'(0)x}$ et $\chi'(0)$ est nécessairement imaginaire pur si $\chi(x) \in \mathbb{C}^x$.

Puis on termine en observant que $\chi'(0) \in i\mathbb{Z}$ si on veut que χ soit une fonction définie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. ($\chi(x)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

Les fonctions $\{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ sont appelées les caractères du groupe $\mathbb{T}$. On voit qu'elles sont indexées par le sous–groupe discret $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$.

§ 2. **Vers la compréhension du problème de la série de Fourier**

Soit $F(x) = \sum_{|n|\le N} a_n\ \chi_n(x) = \sum_{|n|\le N} a_n e^{inx}$ où N est un entier positif fixé. F est trivialement continue, même $\mathcal{C}^\infty$, il n' y a pas de problème à la compréhension de $\sum_{|n|\le N}$.

Les fonctions de ce type s'appellent les polynômes trigonométriques.

Calculons $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx$ (recette de Fourier).

On trouve aussitôt $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx = a_p$ pour $|p| \leq N$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx = 0$ si $|p| > N$.

Par suite, un polynôme trigonométrique est somme de sa série de Fourier. Cette observation triviale conduit à une question dont la réponse ne l'est pas. Toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est–elle limite de polynômes trigonomériques ? Limite? En quel sens ? Après bien des efforts, le milieu du XIXème siècle avec les travaux de Cauchy, de Riemann, de Weierstrass avaient conduit à identifier la convergence uniforme. Mais même cette question est redoutable.

Les polynômes trigonométriques approximent–ils les fonctions continues uniformément sur le tore ? Et si oui, peut–on affirmer la convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue vers cette fonction ?

Soit maintenant une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$, c'est–à–dire une fonction 2π–périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculons $\hat{f}^{(p)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)\, e^{-inx}\, dx$. Par intégration par parties, on voit aussitôt que $\hat{f}^{(p)}(n) = (-in)^p \hat{f}(n)$. Or $|\hat{f}^{(p)}(n)| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}} |f^{(p)}(x)| = M_p$. De sorte que $\hat{f}(n) = O(|n|^{-p})$ lorsque $|n| \to \infty$ pour tout entier $p \geq 0$. Il en résulte la proposition suivante.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$; **alors la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{T}$ vers une fonction** $S(f)$ **continue sur $\mathbb{T}$, telle que** $\widehat{S(f)}(n) = \hat{f}^{(p)}$ **pour** $n \in \mathbb{Z}$

Démonstration

Posons $S_N(f)(x) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n) e^{-inx}$; si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, $\hat{f}(n) = O(|n|^{-2})$ lorsque $|n| \to \infty$ d'après ce qui précède et par suite la série de fonctions $S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ vers une fonction continue $S(f)$. On peut alors écrire $S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-inx}$ pour $x \in \mathbb{T}$ et calculer $\widehat{S(f)}(p)$ par interversion de limite et d'intégrale. On voit de suite que $\widehat{S(f)}(p) = \hat{f}(p)$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

Avec cette proposition, on est sorti du cadre des polynômes trigonométriques, mais que dire de $S(f)$? Peut–on seulement affirmer qu'elle est $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$? Dériver terme à terme ne donne rien. Par contre , si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors $S(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ d'après la remarque préliminaire à la proposition

($|\hat{f}(n)| = O(|n|^{-p})$;$|n| \to \infty$ pour TOUT entier $p \geq 0$). On peut encore moins affirmer que $S(f) = f$ même si f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$. Et s'il s'avère que tel n'est pas le cas, toute la construction de Fourier est réellement une extravagance (un point pour l'avocat général).

L'histoire qui conduit le mathématicien allemand Lejeune–Dirichlet, issu d'une famille vraisemblablement française émigrée, à son célèbre Mémoire reste à écrire et ce qui suit ne prétend nullement en être un substitut.

Remarquons que si f est ANALYTIQUE dans le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ alors

$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où les a_n sont les coefficients de Taylor de f en 0.

Posant $z = \rho e^{i\theta}$, nous avons $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} a_n \rho^n e^{in\theta}$ et en changeant de notations,

si $F_\rho(\theta) = f(\rho e^{i\theta})$ pour $\rho < 1$, nous avons $F_\rho(\theta) = \sum_{n\geq 0} a_n (\frac{\rho}{r})^n r^n e^{in\theta}$; $\rho < r < 1$ de sorte que

$$F_\rho(\theta) = \sum_{n\geq 0} \hat{F}_r(n) (\tfrac{\rho}{r})^n e^{in\theta} \text{ où } \hat{F}_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

et de plus $F_r(\theta) = \lim_{\rho \to r-} F_\rho(\theta) = \sum_{n\geq 0} \hat{F}_r(n) e^{in\theta}$.

Cette fois , tout est légitime : la fonction $(\rho,\theta) \to f(\rho e^{i\theta})$ est continue sur $[0, r] \times \mathbb{T}$ et le lecteur se convainct aisément à l'aide de la proposition précédente qu'il y a bien convergence normale de la série de Fourier de F_r sur le tore.

Tout est donc limpide pour les FONCTIONS ANALYTIQUES (second point pour l'avocat général).

Nous quittons maintenant l'ordre historique strict. Soit f une fonction CONTINUE sur $\mathbb{T}$.

On définit $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ ($n \in \mathbb{Z}$), formule de Fourier, et $|\hat{f}(n)| \leq \| f \|_\infty$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\| f \|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$.

C'est bien loin de suffire à permettre d'affirmer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ converge. MAIS ON PEUT TENTER DE S'INSPIRER DE L'EXEMPLE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Rien n'empêche a priori de considérer la série suivante $F_f(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$ pour $r < 1$;

on observe de suite que cette série se décompose en

$F_f^1(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)\, r^n\, e^{in\theta}$ et $F_f^2(r,\theta) = \sum_{n<0} \hat{f}(n)\, r^{-n}\, e^{in\theta}$

De sorte que F_f^1 représente un prolongement analytique à l'intérieur du disque unité d'un "objet" sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont

$$\hat{\gamma_1}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) \text{ si } n \geq o \\ o \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

et F_f^2 représente un prolongement antiholomorphe à l'intérieur du disque unité d'un"objet" sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont $\hat{\gamma_2}(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq o \\ \hat{f}(n) \text{ si } n < 0 \end{cases}$

Nous avons apparemment remplacé un problème d'apparence simple en un problème plus compliqué car pour le moment nous ne SAVONS RIEN DES espèces animales vivant sur le cercle représentées par γ_1 et γ_2. RIEN ne permet de dire que γ_1 (resp.γ_2) sont des fonctions.
En tout cas F_f est bien définie et converge normalement dans tout disque fermé de rayon < 1, centré en O. On peut "calculer" F_f autrement .

$F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, e^{in(\theta-t)} f(t)dt$. On pose alors $P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, e^{in\theta}$; $r < 1$

$$P_r(\theta) = \frac{1}{1 - r\, e^{i\theta}} + r\, e^{-i\theta} \frac{1}{1 - r\, e^{-i\theta}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

De la sorte $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t)dt$, où P_r est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, POSITIVE et

telle que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = \hat{P}_r(0) = 1$!

Les connaisseurs ont bien sûr compris que P_r n'est autre que le "noyau" de Poisson découvert par Poisson (contemporain de Cauchy) qui cherchait à obtenir l'analogue de la formule intégrale de Cauchy pour les parties REELLES des fonctions analytiques dans le disque.

On peut encore écrire $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) f(\theta - t)dt$.

Sur cette écriture on voit que F_f apparaît comme la moyenne pondérée par P_r des translatés de f par les points du tore !

Nous avons donc obtenu la formule suivante : $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t) f(\theta - t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$

Bien entendu si $r \to 1$ $(r<1)$, le passage à la limite terme à terme permet d'imaginer que $F_f(r,\theta)$ tend à ressembler à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{in\theta}$

D'un autre côté $\lim P_r(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta \not\equiv 0\ (2\pi) \\ +\infty \text{ si } \theta \equiv 0\ (2\pi) \end{cases}$

Qu'est–ce que tout cela peut bien signifier ?

Ni Cauchy, ni Poisson n'ont réellement songé à ce qui précède : l'influence des fonctions analytiques étaient encore dominante dans l'esprit du temps et les fonctions continues restaient mystérieuses ; elles venaient tout juste d'être comprises dans une définition mathématique prenant du CHAMP PAR RAPPORT A L'EMPIRISME. Certainement, L.A. Cauchy pensait que la série de Fourier d'une fonction continue converge vers la fonction.

Restons encore pour un instant dans le cadre des fonctions analytiques. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction analytique dans $D(0,1)$.

Il est facile de voir que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n(f)|^2\, r^{2n}$ pour tout $r<1$.

Maintenant soit f une fonction continue sur le tore ; on peut la "prolonger" dans le disque unité de la façon précédente : $F_f(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$.

Et de plus on peut écrire $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(r,\theta)|^2\, d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n}$ $(r<1)$. On ne peut rien faire à première vue du terme de gauche mais on peut observer que $|F(r,\theta)| \leq \| f \|_\infty$ car $\int P_r(\theta,t)\, dt = 1$ et $P_r(u) \geq 0$! De la sorte, on obtient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n} \leq \| f \|_\infty^2$ pour tout $r < 1$.

Par suite si $P_N^2(r;f) = \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n}$, on a $\operatorname{Sup}_{r<1} P_n^2(r;f) = \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \| f \|_\infty^2$

et par conséquent on vient d'obtenir le théorème suivant :

Théorème (Riemann)
Soit f une fonction continue sur le tore ; si $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne la suite de ses coefficients de Fourier, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2 < +\infty$ et en particulier, $\lim_{n\to\infty}|\hat{f}(n)| = 0$.

Ce résultat (le comportement de $\hat{f}(n)$ lorsque $|n| \to\infty$) a été historiquement obtenu par B. Riemann par une toute autre méthode.

Evidemment c'est bien meilleur que l'inégalité triviale du début $|\hat{f}(n)| \le \| f \|_\infty$ puisque maintenant $(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2)^{1/2} \le \| f\|_\infty$.

(Rien n'empêcherait a priori de songer à étendre ce qui précède aux fonctions BORNEES sur le tore ; le lecteur est invité à réfléchir à ce qui empêche cette extension, naturellement fausse).
On ne sait toujours rien sur la série de Fourier et sa convergence éventuelle pour les fonctions continues mais on peut suspecter que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$ est liée à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$. On peut même conjecturer que $\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$ pour f continue.

Continuons d'investiguer cette conjecture naturelle.
Regardons l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 <+\infty\ \}$ où les $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des suites à valeurs complexes.
En posant $\| (a_n)\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\right)^{1/2}$ on définit à peu près trivialement une NORME sur l'espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{Z})$ et il est aisé de s'assurer que, pour cette norme, $\ell^2(\mathbb{Z})$ est complet. Mais il n'en est rien pour l'espace vectoriel $C(\mathbb{T})$ muni de la norme $\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$! Pourtant la conjecture précédente nous dit que l'application $f \to (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ de $C(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie linéaire ; la seule conséquence à en tirer est que CETTE ISOMETRIE N'EST PAS SURJECTIVE.
Notons enfin que la conjecture en question, aussi naturelle qu'elle puisse paraître (elle est trivialement vraie pour un polynôme trigonométrique), donne beaucoup plus que tout ce qui précède car alors si $\hat{f}(n) = 0$ pour $n\in\mathbb{Z}$, $f = 0$! Or on a vu plus haut que si $f \in C^2(\mathbb{T})$ la série de

Fourier converge uniformément vers une fonction CONTINUE S(f) telle que $\widehat{S(f)}(n) = \hat{f}(n)$; $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, S(f) = f !! (Ce n'est pas si mal si on considère que l'examen brutal de la série de Fourier de f ne dit rien a priori sur le caractère différentiable de sa somme !!).
Mais si f est un polynôme trigonométrique, la conjecture est une trivialité et si f est un polynôme trigonométrique alors $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt$ converge trivialement vers f lorsque $r \to 1$.

Tout nous pousse donc à étudier plus précisément $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt$.

Or $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(\theta-t)\,dt$. De sorte que $F(r,\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\big[f(\theta-t) - f(\theta)\big]\,dt$ en utilisant le fait que $\int P_r(u)\,du = 1$. Sous cette forme on voit que si $f(\theta - t) - f(\theta)$ est petit en valeur absolue, on pourra conclure des choses.
Nous avons alors

$$|F(r,\theta) - f(\theta)| \le \frac{1}{2\pi}\Big\{ \int_{|\theta-t|<\alpha} P_r(t)|f(\theta-t) - f(\theta)|dt + \int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)|f(\theta-t) - f(\theta)|\,dt \Big\}.$$

La seconde intégrale est la plus préoccupante car f ne peut rien nous dire.
On commence par des banalités :

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)\big[f(\theta-t) - f(\theta)\big]\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)\,dt \times 2\,\|f\|_\infty$$ où $P_r(u) \ge 0$ joue à nouveau un rôle fondamental.

$$\text{Or } \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\alpha} P_r(\theta-t)\,dt .$$

$$\text{Or } Pr(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2} \text{ si } |\theta - t| \ge \alpha .$$

$$\text{De la sorte } \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)\,dt \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2} \text{ pour tout } r < 1.$$

Finalement, $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\ge\alpha} P_r(t)\,dt = 0$ quelque soit $\alpha > 0$.

Maintenant le lecteur (la lectrice) est convaincu(e) que $\lim_{r\to 1} |F(r,\theta) - f(\theta)| = 0$ pour tout θ si f est continue et cela peut être prouvé et énoncé sous la forme du théorème suivant :

Théorème :

Pour toute fonction continue f sur le tore, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_N(f))_{n\in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{N\to\infty} \| P_N(f) - f\|_\infty = 0$

C'est l'analogue du théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par des polynômes.

C'est alors que l'on rencontre l'avocat général et l'avocat du procès Fourier dans une discussion franche et animée.

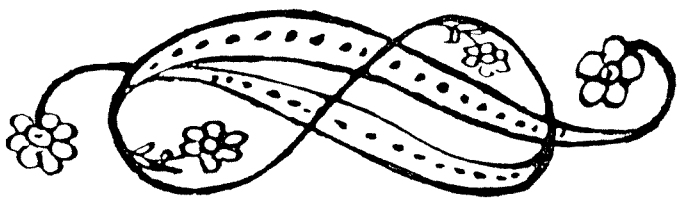
L'avocat général : Vous venez de prouver que toute fonction continue est analytique! Car les polynômes trigonométriques sont des fonctions analytiques!

L'avocat : Il n'en est rien! Vous en êtes resté au théorème de Weierstrass! Nous ne prouvons pas que la suite de fonctions analytiques associées aux polynômes trigonométriques converge uniformément dans le disque unité! mais seulement sur la frontière !

L'avocat général : Soit. De toute façon, vous ne savez toujours rien dire de la convergence de la série de Fourier vers la fonction même si celle–ci est continue !

.....

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE



Motif décoratif alsacien