LA PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE GAUSS DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Professeur au Lycée Couffignal de Strasbourg

Tout étudiant de mathématiques connaît ou est censé connaître le théorème fondamental de l'algèbre, éventuellement sous la dénomination de théorème de d'Alembert-Gauss :

"*Tout polynôme non constant à coefficients réels ou complexes admet au moins une racine dans le corps* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes.*" Cette propriété fait de $\mathbb{C}$ un **corps algébriquement clos**.

Le terme **fondamental** vient de Gauss qui l'utilise dans un texte de 1849 (1) et cette dénomination lui est restée, concurremment avec celle de théorème de d'Alembert en France. Pourquoi fondamental?

1) Sur lui repose une grande partie de l'algèbre classique : résolution des équations algébriques, décomposition des polynômes en facteurs irréductibles, existence de valeurs propres pour des endomorphismes d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, théorie des fonctions algébriques ou rationnelles.

2) Fondamental aussi en ce qu'il représente un sujet permanent de réflexion sur la structure de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ qui fait qu'il a été l'occasion d'une multitude de démonstrations : d'Alembert, Euler, Lagrange, Argand, Cauchy, Laplace et qu'il continue à en susciter. Par exemple en 1979, M. W. Hirsch et St. Smale ont donné une démonstration constructive qui met en place un algorithme, lequel partant d'un $c = z_0$ quelconque, aboutit à une racine d'un polynôme donné $f(z)$ au moyen d'une suite (z_n). Un point central de cette réflexion se trouve dans le fait quasi paradoxal que **ces démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre utilise, en dernier recours, des moyens non algébriques**, c'est-à-dire des moyens liés à l'analyse.

• Ou bien (d'Alembert, Argand, Cauchy ...) l'on diminue le module de $f(z)$ et l'on utilise l'existence d'un minimum nul pour ce module.

• Ou bien (Euler, Lagrange, Laplace ...) l'on ramène le problème à l'existence de racines carrées pour tout nombre complexe, et l'on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle (2).

---

(1) "Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen Gauss Werke 3, p. 73.

(2) Jusqu'à Bolzano (1817) ce théorème était considéré comme quasi évident, reposant simplement sur l'argument visuel de l'intersection de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses.

Aujourd'hui, les démonstrations les plus en faveur dans l'enseignement universitaire sont celles qui utilisent les puissants théorèmes de la théorie des fonctions de variable complexe. Mais ce faisant, elles font peut-être perdre à ce théorème son caractère essentiel, fondamental pour l'algèbre, banalisant un résultat perçu comme évident par les étudiants, alors que le nombre même des démonstrations (plusieurs dizaines) réparties sur deux siècles et demi, montre assez son caractère problématique et stimulant pour le progrès des mathématiques. On en trouvera une énumération descriptive (jusqu'au début du 20ᵉ siècle) dans le Tome I2 de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, sous la plume de Netto et Le Vavasseur (p. 180 à 205) qui ajoutent ceci :

"*Les démonstrations de ce théorème sont nombreuses. Elles diffèrent d'ailleurs* **essentiellement** *suivant le point de vue auquel on se place, suivant la doctrine que l'on professe sur les fondements de l'Arithmétique. Suivant ce point de vue telle démonstration est rigoureuse ou ne l'est pas ; au point de vue arithmétique de L. Kronecker le théorème tel qu'on vient de l'énoncer n'est même pas exact (...). Au point de vue intuitif au contraire, ou lorsque l'on admet comme évident* **a priori** *qu'à chaque segment de droite correspond nécessairement un nombre déterminé, le théorème fondamental est, au moins relativement, assez facile à démontrer.*

Suivant que l'on suppose connue, ou non, la notion **analytique** *du continu, suivant aussi que l'on estime, ou non, que toute démonstration doit fournir, pour être légitime, un procédé permettant de calculer au moyen des coefficients de $f(z)$ et avec telle approximation que l'on veut les racines (dont l'existence résulte alors, en dernière analyse, de ce procédé même) l'objet même de la démonstration du théorème fondamental sera changé.*"

Je vous propose dans l'article qui suit de revenir aux origines de cette réflexion en étudiant ce théorème à travers l'une de ses premières démonstrations, celle que Gauss a trouvée à l'âge de vingt ans et proposée comme dissertation doctorale à Helmstädt en 1799. Pourquoi celle-ci plutôt qu'une autre? Parce qu'elle est la première à poser le problème de façon claire et précise, explicitant tout ce qui aurapavant était admis de façon plus ou moins implicite, et dissipant le halo de mystère qui entourait et obscurcissait encore passablement les **nombres imaginaires** de cette époque, "*véritables ombres d'une ombre*" comme Gauss les qualifiera. Examinons successivement la figure et la personnalité de Gauss, puis la notion d'imaginaire au 18ᵉ siècle et les enjeux d'une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, avant de passer à l'étude effective de la démonstration de Gauss.

La figure de Gauss

Il est significatif que le premier chapitre des leçons que consacre Félix Klein au développement des mathématiques du 19ᵉ siècle (3) soit entièrement consacré à Gauss, et cela sur plus de soixante pages. Il s'en explique ainsi :

(3) Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Band 1.

"*Gauss se situe à l'entrée du* 19^e^ *siècle, pas seulement selon la chronologie ; il représente également le point de départ des multiples développements nouveaux de la science de cette époque. La considération de la grande personnalité de Gauss convient d'autant mieux à l'introduction du présent sujet que s'offre à nous, en cet homme, une remarquable et très heureuse jonction de l'esprit des deux époques au carrefour desquelles il se situe.*" Gauss effectivement peut apparaître comme un homme du 18e siècle dans ses aspects extérieurs, dans l'impression qu'il peut donner à ses contemporains :

– échanges sur des questions scientifiques sous la forme d'une abondante correspondance avec quelques hommes choisis, peu nombreux,
– écriture en latin d'une grande partie de ses œuvres,
– travail aussi bien en mathématiques, en physique, en astronomie, en géodésie.

Mais Gauss est aussi une grande figure du 19e siècle
– par ses thèmes de recherche et ses idées très novatrices,
– par la rigueur et la précision de ses textes scientifiques.

Cela est déjà particulièrement sensible dans la démonstration que nous allons étudier. Cette démonstration a été le sujet de la dissertation doctorale que Gauss a présentée à Helmstädt en 1799 sous la responsabilité de J. F. Pfaff (1765-1825) lequel a porté l'appréciation suivante sur le mémoire de Gauss :

"*Je ne puis juger que très favorablement ce travail car il est une preuve convaincante des aptitudes remarquables et des connaissances approfondies de son auteur, ce qui fait qu'après la publication prochaine de cette étude, le candidat comptera au nombre de ceux dont le grade fera honneur à notre faculté.*"

La notion d'imaginaire au 18e siècle et les enjeux de la démonstration du théorème fondamental.

Pour bien comprendre l'enjeu théorique du théorème fondamental de l'algèbre au 18e siècle, il est important de restituer son **sens primitif** au mot "*imaginaire*", sens à la fois plus large et plus mystérieux que le terme **nombre complexe** d'aujourd'hui (terme d'ailleurs introduit par Gauss). Le terme "*imaginaire*" est utilisé pour la première fois par Descartes en 1637 dans sa "*Géométrie*" :

"*Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine.*"

Et Girard, à qui nous devons la première formulation du théorème fondamental dans "*L'invention nouvelle en l'Algèbre*" (1629) :

"*Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre (...). On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles ? Je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions et pour son utilité.*"

Le terme *impossible* sera longtemps synonyme d'imaginaire. Ainsi dans le dictionnaire de mathématiques de Klügel (4) (1836) : "*On appelle grandeur impossible ou imaginaire toute expression pour laquelle on ne peut pas trouver une grandeur réelle comme valeur, par exemple Arc cos x pour $x > 1$*".

Pourtant quelques années auparavant en 1830, un jeune mathématicien du nom de Galois donnait une signification beaucoup plus moderne et précise au terme *imaginaire* dans un court texte intitulé "*Sur la théorie des nombres*" (5). Présentons les idées de Galois sur un exemple simplifié, celui des entiers modulo 3 c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ que nous désignerons par E. Dans cet ensemble, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution comme le montre aisément le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2
x^2+1	1	2	2

Introduisons alors avec Galois un nombre imaginaire i tel que $i^2 \equiv 2$ [modulo 3], autrement dit une solution **imaginaire** de l'équation : $x \in E, x^2 + 1 = 0$.

"*Il faut* – explique Galois – *regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires (...) dont l'emploi dans le calcul sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire $\sqrt{-1}$ dans l'analyse ordinaire.*"

L'adjonction de i à notre ensemble E définit un nouvel ensemble $\mathbb{F}$ formé des éléments $a + ib$ où a et b parcourent E, dont la table de multiplication, limitée aux éléments non nuls est la suivante (6) :

$\bullet$	1	2	i	$2i$	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$
1	1	2	i	$2i$	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$
2	2	1	$2i$	i	$2+2i$	$1+2i$	$2+i$	$1+i$
i	i	$2i$	2	1	$2+i$	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$
$2i$	$2i$	i	1	2	$1+2i$	$1+i$	$2+2i$	$2+i$
$1+i$	$1+i$	$2+2i$	$2+i$	$1+2i$	$2i$	1	2	i
$2+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$	$1+i$	1	i	$2i$	2
$1+2i$	$1+2i$	$2+i$	$1+i$	$2+2i$	2	$2i$	i	1
$2+2i$	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$	$2+i$	i	2	1	$2i$

(4) Mathematisches Wörterbuch V, p. 555.
(5) Galois "Ecrits et Mémoires mathématiques", p. 114.
(6) $\mathbb{F}$ est un corps de Galois à neuf éléments, dont les éléments non nuls forment un groupe cyclique engendré par $1 + i$.

Le lecteur peut s'amuser à démontrer qu'avec cette adjonction de l'élément imaginaire i, l'équation $x \in \mathbb{F}, ax^2 + bx + c = 0$ a **toujours** une solution lorsque a, b, c appartiennent à E. De la même manière que l'équation $x \in \mathbb{C}, ax^2+bx+c = 0$ a **toujours** une solution, lorsque a, b, c appartiennent à $\mathbb{R}$. Mais là où les choses changent totalement c'est dans la comparaison des équations :

$$\begin{array}{cc} x \in \mathbb{F}, ax^2 + bx + c = 0 & \quad x \in \mathbb{C}, ax^2 + bx + c = 0 \\ (a, b, c) \in \mathbb{F}^3 & \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3. \end{array}$$

L'équation de gauche n'a pas toujours de solution. Par exemple, l'équation $x \in \mathbb{F}$, $x^2 = 1+i$ n'a pas de solution comme le montre l'examen des termes de la diagonale du tableau ci-dessus. On pourrait introduire un nouvel imaginaire I qui définirait une nouvelle extension $\mathbb{G}$ mais dans laquelle nous trouverions encore et toujours des équations du second degré sans racines. Au contraire, l'équation de droite a toujours des solutions. L'adjonction de $\sqrt{-1}$ clôt définitivement la situation en ce qui concerne la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Ceci nous le savons parce que nous disposons d'une démonstration du théorème fondamental, mais les savants du 18ᵉ siècle, eux, ne le savaient pas. La résolution des équations polynôme de degré au plus quatre avait mis en évidence que toutes les racines éventuelles pouvaient s'écrire sous la forme $A + B\sqrt{-1}$ avec A et B réels. Mais comme on ne savait pas résoudre en général les équations de degré supérieur à quatre par radicaux, on pouvait, on devait se poser la question : les racines de telles équations peuvent-elles aussi toujours s'écrire sous cette forme $A+B\sqrt{-1}$ ou bien fallait-il envisager encore d'autres types d'imaginaires, comme dans l'équation de gauche ci-dessus?

On le voit, il y a une certaine ambiguïté dans la formulation de la question : s'agissait-il de prouver l'existence d'imaginaires, solutions d'une équation polynôme donnée quelconque, à coefficients réels, ou s'agissait-il simplement de prouver une certaine forme (en l'occurence $A+B\sqrt{-1}$) pour des racines dont l'existence n'est pas mise en doute? Dans sa dissertation, Gauss commencera d'emblée par critiquer cette ambiguïté :

"*Certains auteurs* – écrit-il – *prennent en quelque sorte comme Axiome que toute équation admet effectivement des racines qui, à défaut d'être possibles, seront* **impossibles**. *Ce qu'ils veulent signifier par grandeurs possibles ou impossibles ils ne l'ont pas suffisamment ni clairement explicité. Si l'expression* "**grandeurs possibles**" *doit signifier la même chose que "réelles", "impossible" la même chose qu'"imaginaires" alors cette proposition ne peut en aucune façon être admise comme Axiome, mais exige nécessairement une démonstration. Cependant ces expressions ne semblent pas être prises dans ce sens; l'axiome doit plutôt être compris dans le sens suivant :* "**Quoique nous ne soyons pas encore sûrs qu'il y a nécessairement m grandeurs réelles ou imaginaires qui satisfont à une quelconque équation donnée de degré m, nous voulons néanmoins admettre cela dans la suite; car s'il devait arriver qu'on ne puisse pas trouver autant de grandeurs réelles ou complexes, l'issue nous reste**

pourtant ouverte de dire que les autres sont impossibles". *Préconise-t-on d'utiliser une telle expression au lieu de dire simplement que l'équation n'a pas dans ce cas là autant de racines, je n'ai rien là contre; mais si l'on en use comme si elles étaient effectives, et si l'on dit par exemple que la somme de toutes les racines de l'équation*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = 0 \text{ est } = -A$$

bien qu'il s'en trouve parmi elles des "**impossibles**" *(ce qui signifie en fin de compte : quoiqu'il en manque quelques unes) je ne peux approuver cela. Car des racines impossibles acceptées dans ce sens là sont comme des racines, et alors le théorème ne peut en aucune façon être admis sans démonstration; bien plus, on peut à ce propos se demander, s'il ne peut exister des équations qui n'auraient pas même des racines impossibles*".

Un second enjeu, plus pratique, allait stimuler les recherches des mathématiciens et modifier la position d'approche pour la résolution du problème. Le développement du calcul intégral posait en effet la question de l'intégration d'une fraction rationnelle et donc la question de la décomposition de celle-ci en éléments simples du type $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ ou $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ où x^2+px+q est irréductible sur $\mathbb{R}$.
D'où la nouvelle formulation du problème : peut-on décomposer tout polynôme réel en facteurs soit réels linéaires $X-a$ et/ou quadratiques x^2+px+q, soit linéaires complexes? Il faut savoir qu'au 18e siècle la réponse à cette question était loin d'être unanime.

Dans un mémoire paru en 1702, Leibniz conjectura que cette factorisation n'était pas toujours possible. Comme argument, il donne l'exemple de la décomposition de

$$\begin{aligned} X^4 + a^4 &= (X^2 - a^2\sqrt{-1})(X^2 + a^2\sqrt{-1}) \\ &= (X + a\sqrt{\sqrt{-1}})(X - a\sqrt{\sqrt{-1}})(X + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(X - a\sqrt{-\sqrt{-1}}) \end{aligned}$$

dont le dernier produit ne donnera jamais un facteur réel, quels que soient les deux facteurs que l'on regroupe. Leibniz ne semble pas être parvenu à l'idée que $\sqrt{\sqrt{-1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{-1}$, car alors on a avec

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{-1}} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1}) \text{ et } \sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\sqrt{-1}) \\ X^4 + a^4 &= (X^2 + a\sqrt{2}X + a^2)(X^2 - a\sqrt{2}X + a^2) \end{aligned}$$

Dans une lettre à Nicolas Bernoulli datée du 1-11-1742, Euler formule un théorème de factorisation des polynômes réels exactement dans la forme que Leibniz tenait pour fausse. Contredisant Bernoulli qui proposait le contre exemple :

$$X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$$

Euler démontre que ce polynôme se décompose en produit de deux polynômes réels :

$$[X^2-(2+a)X+1+\sqrt{7}+a][X^2-(2-a)X+1+\sqrt{7}-a] \text{ où } a=\sqrt{4+2\sqrt{7}}.$$

Quelques jours plus tard, le 15-12-1742, dans une lettre à Goldbach, Euler renouvelle la formulation de son théorème en ajoutant qu'il n'a pas pu jusqu'à présent le démonter complètement, mais seulement "*à peu près*" comme certains théorèmes de Fermat. Dans cette lettre il mentionne également que l'on peut regrouper les racines imaginaires d'un polynôme réel en paires, de façon qu'en multipliant les facteurs linéaires correspondant on trouve des facteurs réels de second degré. Goldbach reste sceptique face à ces affirmations et propose un nouveau contre exemple : $X^4+72X-20$ qu'Euler factorise aussitôt.

Concluons cette première partie, en faisant le point sur la situation où se trouvait la communauté mathématique au moment où le jeune Gauss commençait ses réflexions. Peu à peu, à force de calculer formellement avec $\sqrt{-1}$, les mathématiciens se sont familiarisés avec les nombres imaginaires au point de les adopter dans la famille des autres nombres : entiers, rationnels, réels. Ne rencontrant jamais dans leurs résolutions d'équations d'autres expressions que celles qui sont réductibles à des composés de réels avec $\sqrt{-1}$ ils en vinrent à la conviction que tous les imaginaires pourraient toujours s'écrire ainsi. Enfin des problèmes théoriques et pratiques comme l'intégration des fractions rationnelles nécessitaient une réponse urgente à la question : peut-on toujours ramener cette intégration à celle de fractions élémentaires par la décomposition du dénominateur en produit de facteurs réels du premier ou du second degré? C'est sous cette forme que Gauss va attaquer le problème, en intitulant sa dissertation :
"*Nouvelle démonstration du théorème : toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.*"

Texte de vingt-cinq pages, les deux tiers sont consacrés à la critique des démonstrations de ses illustres prédessesseurs : Euler, d'Alembert, Lagrange, ce qui manifeste à la fois une connaissance parfaite de la science de son temps et une vision très claire et assurée de ce qu'elle doit être (7). Nous nous limiterons ici à la démonstration propre de Gauss, dont voici les articulations principales.

La démonstration de Gauss

Dans un premier temps, Gauss ramène le problème à la démonstration du théorème suivant :

Théorème : Soit $X=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Lx+M$. S'il existe r et φ tels que simultanément

$$\begin{array}{lll} (1) & r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi+\ldots+Lr\cos\varphi+M & =U=0 \\ (2) & r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+\ldots+Lr\sin\varphi & =T=0 \end{array}$$

(7) Il n'existe pas de traduction française du texte de Gauss (rappelons qu'il écrivait en latin). Je tiens à la disposition du lecteur curieux ma propre traduction française non publiée, réalisée à partir de la version allemande de E. Netto.

alors on a la propriété (p) : X est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$ ou par $x-r\cos\varphi$ selon que $r\sin\varphi$ est différent de 0 ou non.

On dira que c'est tout simplement les parties réelles et imaginaires de X qui sont annulées séparément dans les relations (1) et (2). Mais Gauss veut éviter tout recours aux imaginaires et déduit la proposition (p) des égalités (1) et (2) au moyen du lemme suivant dont nous laissons la vérification au lecteur :

Lemme : Pour tout entier naturel m non nul

$$\sin\varphi.x^m - \sin m\varphi.r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi.r^m \text{est divisible par} x^2 - 2\cos\varphi rx + r^2.$$

Pour déduire (p) de (1) et (2), il suffit alors d'appliquer le lemme aux valeurs successives $m, m-1, m-2, \ldots$, en multipliant successivement par les coefficients $A, B, C, \ldots$ du polynôme X de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\sin\varphi.rx^m & -\sin m\varphi.r^m x & +\sin(m-1)\varphi.r^{m+1} \\
A\sin\varphi.rx^{m-1} & -A\sin(m-1)\varphi.r^{m-1}.x & +A\sin(m-2)\varphi.r^m \\
B\sin\varphi.rx^{m-2} & -B\sin(m-2)\varphi.r^{m-2}.x & +B\sin(m-3)\varphi.r^{m-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
K\sin\varphi.rx^2 & -K\sin 2\varphi.r^2x & +K\sin\varphi r^3 \\
L\sin\varphi.rx & -L\sin\varphi.rx & \\
M\sin\varphi.r & & -M\sin\varphi.r
\end{array}$$

dont chaque ligne est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$.
Additionnons colonnes par colonnes toutes ces expressions, nous obtenons
– pour la première colonne $Xr\sin\varphi$,
– pour la seconde zéro, en vertu de (2),
– pour la troisième zéro par combinaison linéaire de (2) $\times\cos\varphi-$ (1) $\times\sin\varphi$.
En conséquence :
– ou bien $r\sin\varphi\neq 0$ alors X est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$,
– ou bien $r\sin\varphi=0$ donc soit $r=0$ alors $M=0$ à cause de (1) donc X est divisible par x et par $x-r\cos\varphi$, soit $\sin\varphi=0$ alors $\cos\varphi=\pm1$ et $\cos m\varphi=(\cos\varphi)^m$, donc X s'annule pour la valeur $r.\cos\varphi$ et est divisible par $x-r.\cos\varphi$.

Reste à démontrer l'existence de r et φ tels que l'on ait les égalités (1) et (2). Cette démonstration va se faire en quatre étapes.

1. Les égalités $T=0$ et $U=0$ définissent chacune une courbe algébrique possédant au total, et de façon alternée, $4m$ branches infinies correspondant aux valeurs $\varphi=\frac{p\pi}{2m}$, $0\leq p\leq 4m-1$.

En considérant r et φ comme coordonnées polaires, les premiers membres de (1) et (2) définissent deux surfaces

$$(r,\varphi)\longmapsto z=U(r,\varphi) \text{ et } (r,\varphi)\longmapsto z=T(r,\varphi).$$

Ces surfaces sont coupées par le plan de base $z=0$ selon des courbes $U(r,\varphi)=0$ et $T=(r,\varphi)=0$.

a) Il est facile de vérifier que ces intersections ne sont pas vides. Par exemple pour $U(r,\varphi) = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + M$ on peut prendre r suffisamment grand pour que $r^m \cos m\varphi$ dépasse en valeur absolue la somme de tous les autres termes, et alors pour une valeur convenable de φ, ce terme peut être rendu aussi bien positif que négatif. Remarquons que la courbe $T = 0$ contient de toute façon l'axe des abscisses puisque $\sin\varphi$ est en facteur.

b) Ces courbes sont algébriques car en posant $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^n\cos n\varphi$ et $r^n \sin n\varphi$ sont des polynômes en (x, y).

c) Ces courbes ont des branches infinies définies respectivement par

$$\cos m\varphi = o \text{ ou } \varphi = \frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m} \text{ et } \sin m\varphi = o \text{ ou } \varphi = \frac{k\pi}{m}$$

soit au total $4m$ branches pour $\varphi = \frac{p\pi}{2m}$ avec $0 \leq p \leq 4m-1$.

2. Il existe un cercle (Γ) contenant $2m$ points de $T = 0$ et $2m$ points de $U = 0$; chacun des points de la seconde famille est situé entre deux points de la première.

Soit $S = |A| + |B| + \ldots + |M|$ et (Γ) le cercle de rayon R, $R > \sup(S\sqrt{2}, 1)$. Notons $(2k+1)$ le point de (Γ) correspondant à $\varphi = \frac{2k+1}{m} \times \frac{\pi}{4}$ pour $0 \leq k \leq 4m-1$ et étudions la valeur de T sur Γ. On a :

$$T = R^{m-1}[R\sin(m\varphi) + A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \ldots + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi].$$

Au point (1) on a $T = R^{m-1}[R\sqrt{\frac{1}{2}} + E]$ avec $|E| < S < R\sqrt{\frac{1}{2}}$. T reste donc positif sur tout l'intervalle [(1) - (3)] car $\sin(m\varphi) > \sqrt{\frac{1}{2}}$. De même T reste négatif sur tout l'intervalle [(5) - (7)] car $\sin(m\varphi) < -\sqrt{\frac{1}{2}}$. T s'annule par conséquent entre (3) et (5), et pour des raisons analogues entre (7) et (9),... entre $(8m-1)$ et (1). On démontrerait de la même manière que U s'annule entre (1) et (3), (5) et (7) ..., $(8m-3)$ et $(8m-1)$. Par ailleurs, l'étude du signe des dérivées $\frac{dU}{d\varphi}$ et $\frac{dT}{d\varphi}$ permet d'affirmer que chaque intervalle ne contient qu'un seul point où U (respectivement T) s'annule.

Numérotons alors les points d'intersection : nombre pair pour (T) , nombre impair pour (U), au total $2 \times 2m$ points notés

$$T_0, U_1, T_2, U_2, \ldots, T_{2m-1}, U_{2m}.$$

3. Tout point pair est relié à un point pair par une branche de (T) et tout point impair est relié à un point impair par une branche de (U), ces branches étant situées à l'intérieur de (Γ).

Les arguments donnés par Gauss sont de nature topologique, mais restent ici purement d'intuition géométrique : "*on sait par la géométrie supérieure que toute* *courbe algébrique (ou toute partie d'une courbe algébrique, s'il arrive que celle-ci soit composée de plusieurs branches mises ensemble) ou bien revient sur elle-même, ou bien s'en va à l'infini des deux côtés et que par conséquent, si une branche d'une courbe algébrique pénètre dans un espace délimité, nécessairement elle doit de nouveau ressortir de cet espace*". Ces arguments ne semblent d'ailleurs pas le satisfaire complètement, car dans une longue note (note 12), il explique que "*si quelqu'un le demande, il entreprendra à une autre occasion de fournir une démonstration qui ne puisse être soumise à aucun doute*" et que "*cette conclusion s'appuie sur les principes de la géométrie de position (8) lesquels ne sont pas moins susceptibles de démonstration que les principes de la géométrie des grandeurs*".

4. Conclusion : la courbe (U) coupe nécessairement la courbe (T), à l'intérieur de (Γ).

Supposons en effet que les deux courbes ne se coupent pas. Or le point O est relié au point $2m$.
Le point 1 sera relié à un point $n < 2m$,
le point 2 à un point $n' < n$
le point 3 à un point $n'' < n'$.
On arrivera nécessairement à la situation où un point h est relié à $(h+2)$.
Alors la courbe issue de $(h+1)$ ne peut que couper l'une des branches déjà utilisées qui relient les couples précédents.

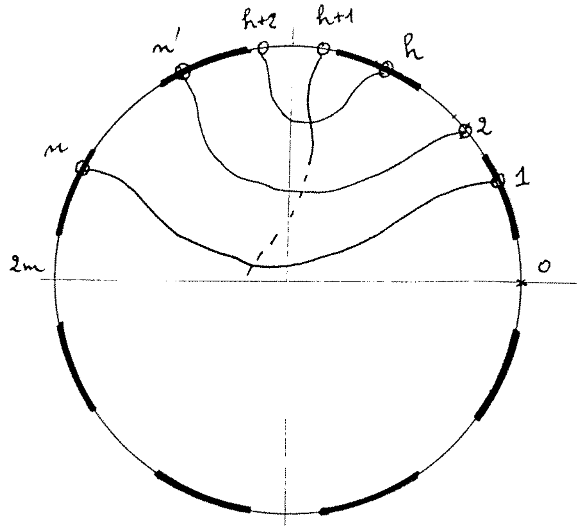

Figure 1

Nous avons illustré la démarche de Gauss par l'exemple de l'équation

$$X^7 + 28X^4 - 480 = 0.$$

Alors

$$U = x^7 - 21x^5y^2 + 28x^4 + 35x^3y^4 - 7xy^6 + 28y^4 - 168x^2y^2 - 480 = 0 \text{ (fig.2)}$$
$$\text{et } T = y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y + 112x^3y - 112xy^3 = 0 \text{ (fig.3)}$$

L'intersection est matérialisée sur la figure de couverture et visualise les sept racines : trois racines réelles

$$x_1 = 1,9228841 \ ; \ x_2 = -2,4580892 \ ; \ x_3 = -2,5778036$$

et deux couples de racines complexes conjuguées

$$x_4, x_5 = 1,6843159 \pm 2,6637914i \text{ et } x_6, x_7 = -0,1278113 \pm 1,9874234i.$$

(8) ce que nous appelons aujourd'hui topologie (ndlr).

Gauss n'a pas illustré sa démonstration par cette équation. L'exemple est néanmoins de lui, pris dans un autre texte (9) qui correspond à une autre démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Ce sera la quatrième qu'il donnera de ce théorème. C'est dire que le sujet lui tenait à cœur. La seconde partie de ce texte donne alors un algorithme de résolution sur $\mathbb{C}$ des équations de la forme $x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$ avec en particulier la résolution de l'exemple ci-dessus

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0.$$

Mais ceci est une autre histoire. Le problème donné dans la rubrique "Problèmes pour nos élèves" reprend les principales idées de Gauss adaptées à un cas simple et donne une méthode de factorisation du polynôme $x^4 + ax + b$ pour a, b réels quelconques (voir la rubrique "Problèmes pour nos élèves").

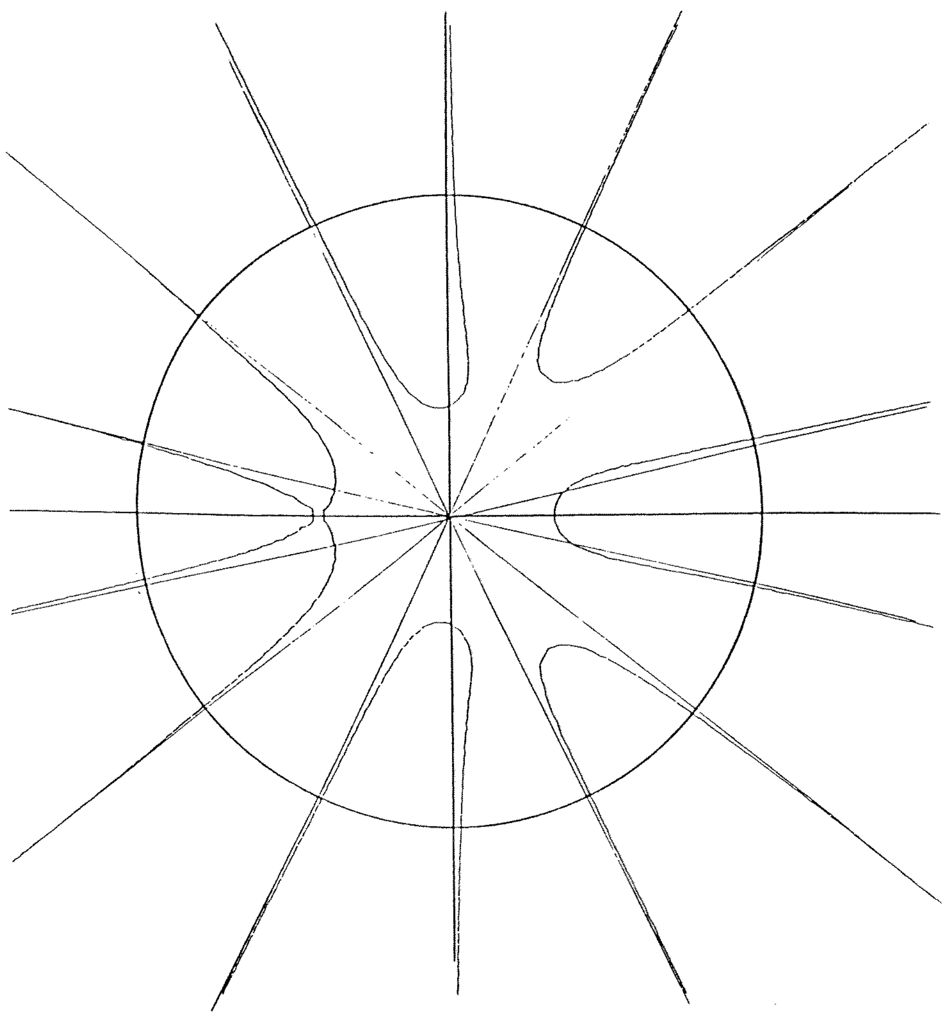

Figure 2

(9) Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen 1649 Gauss Werke Band III, p. 72 à 102.

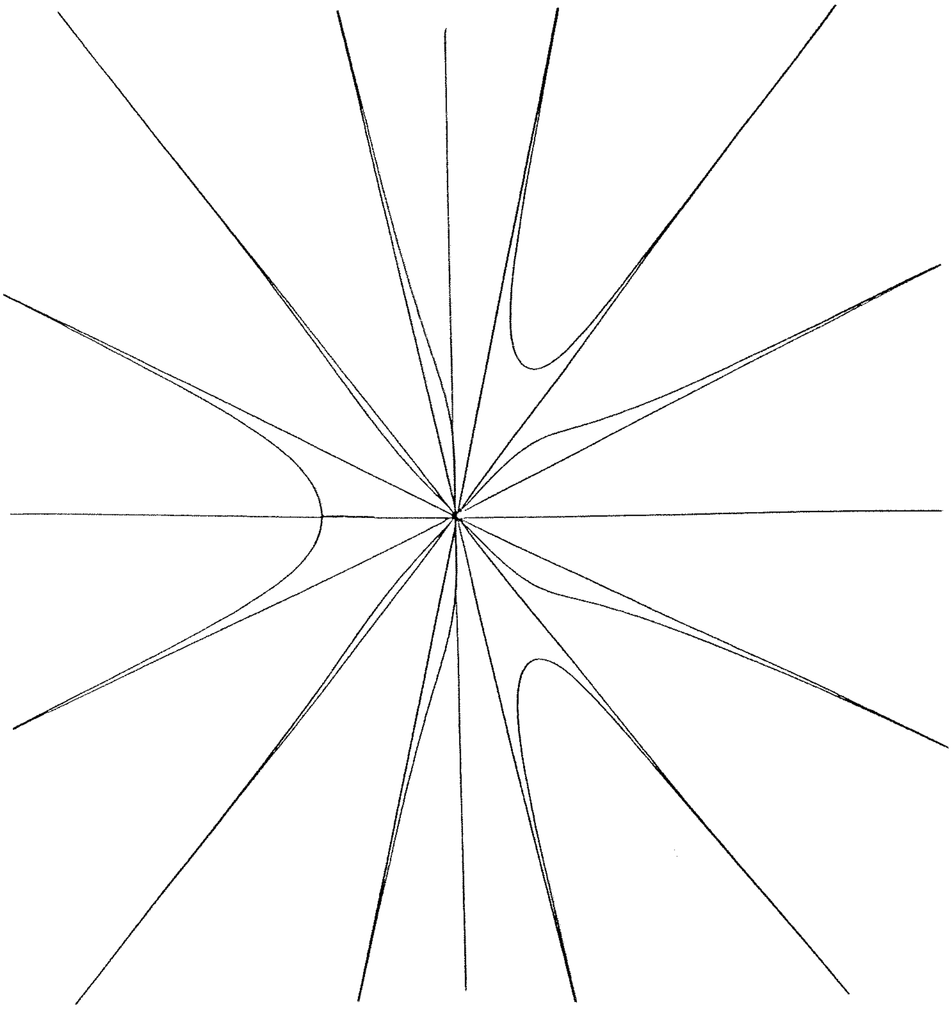

Figure 3

La liste des publications disponibles de l'I.R.E.M. de Strasbourg peut être obtenue sur simple demande à la bibliothèque (adresse au dos de la revue).
N'hésitez pas à la demander!