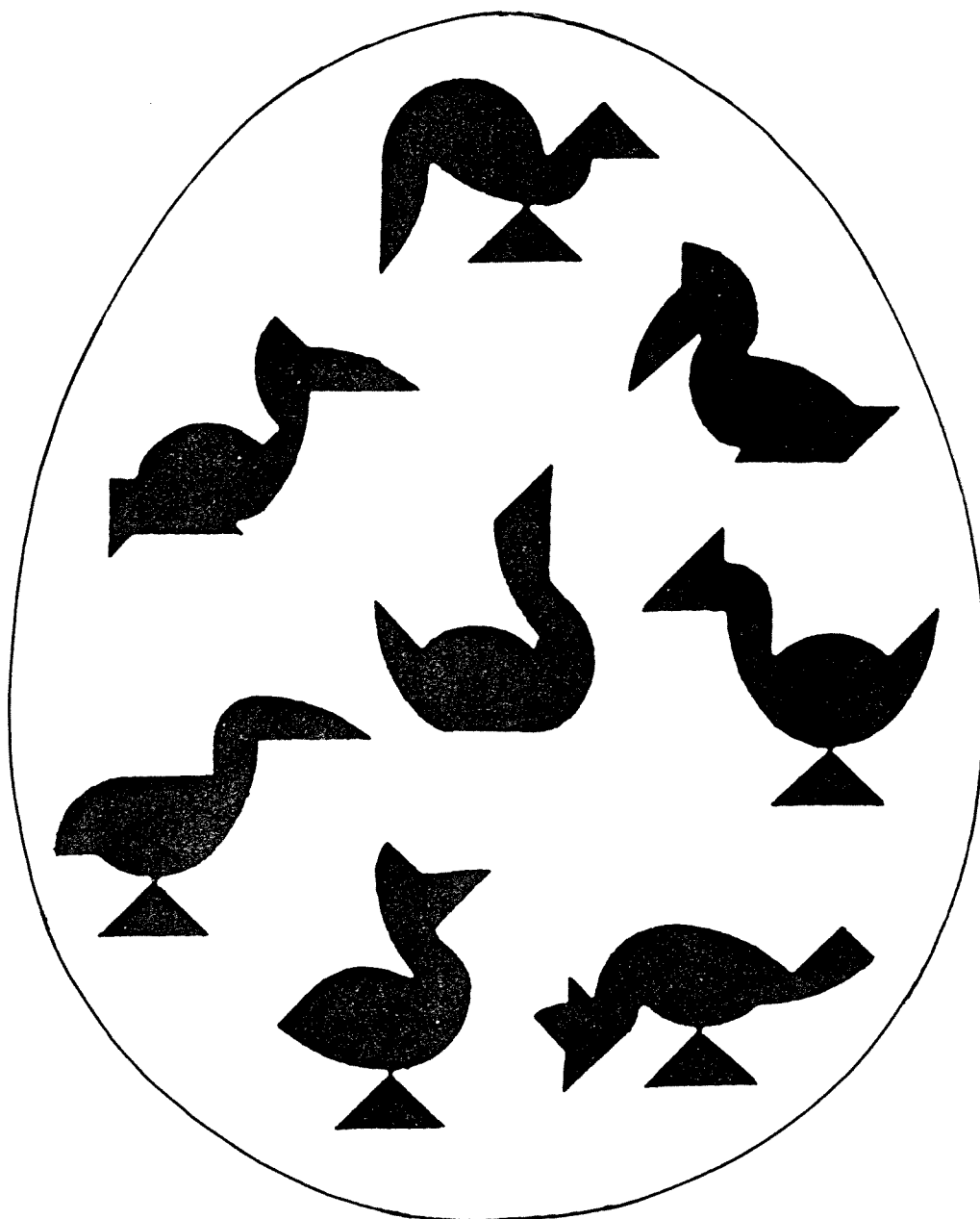


---

# L'OUVERT

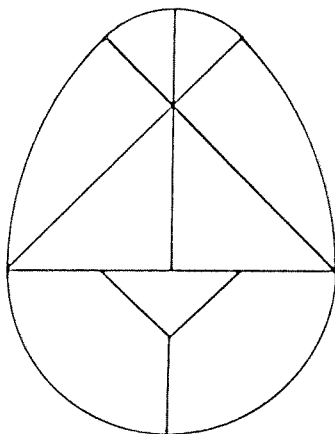
---

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG  
n° 80 - SEPTEMBRE 1995 I.S.S.N. 0290 - 0068



### NOTRE COUVERTURE :

Dans la brochure APMEP n° 63 sur les activités mathématiques en premier cycle, Jean Fromentin, qui a animé la rencontre APMEP de mai 1995 sur les collèges (voir l'article de Richard Cabassut), propose l'activité de l'œuf magique.



Les oiseaux sortent de l'œuf, tout comme les Shaddocks (voir p. 54). Rien de surprenant, donc, qu'une fois brisé, cet œuf donne naissance à toute une famille d'oiseaux. Aussi vous ne manquerez pas d'utiliser votre temps libre pour réaliser les oiseaux de la couverture.

## LA PÉDAGOGIE DE LA RÉUSSITE

“Former des citoyens”, concevoir une “pédagogie de la réussite”, voilà des expressions à la mode, des mots “porteurs”, pour l’enseignement de la prochaine année scolaire. Nous pourrions penser que ces principes se sont toujours trouvés parmi les déterminations des enseignants mais, d’année en année, les messages varient. Je me souviens d’une époque où les filières venaient d’être supprimées, les secondes devenaient hétérogènes et indéterminées et le leitmotiv était : “occupez-vous des élèves moyens ou en difficulté; les bons s’en sortent de toute façon tout seuls”. Le problème des classes hétérogènes commençait à émerger et on pouvait penser qu’on nous demandait d’appliquer une pédagogie de la médiocrité. C’était l’époque aussi où il m’arrivait de recevoir des parents dont le fils (plus souvent que la fille, d’ailleurs) se trouvait soudain en échec alors que jusqu’alors il avait bien réussi sans travailler : il n’avait pas compris “tout seul” (voir ci-dessus pour l’expression) qu’il fallait travailler quand les notions devenaient plus compliquées et c’était un choc de ne plus pouvoir fanfaronner parce qu’on réussit sans efforts.

Peu à peu, la gestion des classes hétérogènes de 35 élèves est devenue un sujet de préoccupation, de débats et de recherche pour les enseignants. En même temps la conception de l’enseignement des mathématiques évoluait et cela fournit une solution assez enthousiasmante au problème : celle de proposer aux élèves des activités ou des problèmes présentés sous forme de “travaux-pratiques” avec une feuille qui détaillait les étapes de la recherche. Ainsi chacun travaillait à son rythme : les meilleurs n’avaient qu’à répondre aux questions a, b, c pour arriver au bout, avec un petit contrôle du professeur et la satisfaction d’avoir su tout faire; les moins bons ne se trouvaient plus face à une falaise grâce aux mêmes questions a, b, c et à une aide plus personnelle du professeur. L’effet pervers de cette méthode fut de ne plus solliciter suffisamment l’imagination, l’invention et de faire perdre de vue que les “a, b, c” forment un bloc qu’il faudrait savoir mettre en place tout seul.

Depuis quelques années, sous la pression des parents d’ailleurs, les classes tendent à ne plus être trop hétérogènes. Sous couvert d’un futur européen les langues ont pris le devant de la sélection et les bons élèves sont incités à travailler davantage. Très bien. Mais qu’advient-il des autres? Comment gérer maintenant l’homogénéité des classes faibles. Comme vous pouvez le lire dans l’article sur l’enseignement en collège (voir l’article p. 41) les élèves n’aiment pas se trouver coincés dans une classe de consolidation et si nous ne proposons à ces élèves que des exercices d’application directe l’écart se creuse de plus en plus entre les classes.

Serait-il possible, dans le cadre de cette expérimentation généralisée en sixième, de donner à ces élèves à la fois le temps de la consolidation et celui de la recherche, de la réflexion, de la découverte? Mais que je me fasse bien comprendre : en donner plus à certains ne signifie pas pour moi qu'on va en enlever aux autres, et ne donner que trois heures de mathématiques à un élève de sixième ne peut conduire qu'à la médiocrité dans ce domaine, même pour les bons. Serait-il possible dans ces classes "faibles" de valoriser la réussite sur l'acquisition de connaissances de base tout en évaluant le niveau en sixième, en instaurant par exemple deux rubriques comme l'écrit et l'oral en langue. Nous savons bien qu'une classe fonctionne mal lorsque les meilleures notes sont au niveau de 12, mais nous savons aussi qu'en demander moins et mettre 15 est un leurre qui reporte l'échec à plus tard. Mais il faut donner des moyens en heures ou en personnel pour espérer faire en sorte que les "faibles" rejoignent les "moyens" et, qui sait, parfois les "bons". Et pour que ces classes ne deviennent pas des filières on pourrait peut-être les restreindre à deux niveaux comme "sixième" et "quatrième" et conduire les élèves de ces classes à se mesurer à d'autres en "cinquième" et "troisième", ou à redoubler dans une bonne classe.

La réussite de l'enseignement peut se faire dans la diversité des parcours. Restons optimistes en espérant concilier un enseignement de masse et une pédagogie de la réussite.

O. SCHLADENHAUFEN.

## SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 80 – SEPTEMBRE 1995

◇ <i>Notre couverture</i> : .....	I
◇ <i>Editorial</i> : .....	II
◇ <i>Résultant et symbole de Legendre</i> , par J.-Y. MÉRINDOL .....	1
◇ <i>Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements</i> , par J. DAUTREVAUX .....	22
◇ <i>Les roulettes d'ellipses II</i> , par E. EHRHART .....	37
◇ <i>L'enseignement au collège</i> , par R. CABASSUT .....	41
◇ <i>Dans nos groupes I.R.E.M.</i> , par C. UNDRAINER-BACH .....	45
◇ <i>Le Rallye Mathématique d'Alsace 1995 (corrigés)</i> .....	53
◇ <i>A vos stylos, par 'L'Ouvert'</i> .....	62

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG CEDEX  
Tél : 88-41-64-40  
Fax : 88-41-64-49  
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*  
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,  
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.  
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).  
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent  
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 30.- F

# RÉSULTANT ET SYMBOLE DE LEGENDRE

Jean-Yves MÉRINDOL

Professeur de Mathématique à l'U.F.R. de Mathématique de Strasbourg

L'article qui suit est un exercice de style un peu paradoxal puisqu'il va en fait du compliqué au simple. L'enseignement scolaire et universitaire insiste depuis des décennies, et avec de très bonnes raisons, sur ce qui est **linéaire**. De l'élémentaire – la règle de trois – aux premières années d'université – les espaces vectoriels – beaucoup de temps est accordé à ces notions. Et on s'aperçoit que l'algèbre linéaire constitue de fait le cœur des programmes d'algèbre du CAPES ou de l'Agrégation.

Mais ceci a une conséquence curieuse. Des structures beaucoup plus naturelles sont mal explorées. C'est le cas des entiers, dont l'étude est reléguée à des rappels marginaux sur les PGCD – PPCM. Sans même parler de corps de nombres, l'arithmétique élémentaire n'est que rarement abordée.

On va, de façon légèrement obsessionnelle, montrer que pourtant bien des constructions devenues familières, grâce à l'habitude, sur les espaces vectoriels, se transfèrent sans grande peine en notions intéressantes, bien qu'élémentaires, sur  $\mathbb{Z}$  et ses quotients. Le fil directeur va être l'explication en parallèle des propriétés principales de  $\mathbb{Z}$  et de  $\mathbf{k}[X]$ . Ces deux anneaux sont les anneaux d'entiers de leur corps des fractions respectifs :  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbf{k}(x)$ . Les lecteurs les plus savants auront reconnu les exemples de base des "*corps globaux*". L'analogie des propriétés arithmétiques des extensions finies de  $\mathbb{Q}$  – les extensions de nombres – et les propriétés géométriques des extensions de  $\mathbf{k}(x)$  – les corps de fonctions des courbes algébriques – est un principe systématiquement utilisé dès le 19<sup>ème</sup> siècle mais dont la fécondité est remarquable et certainement riche d'encore bien des surprises.

On va voir dans la suite que, même à un niveau volontairement très élémentaire, on peut se persuader de cette fécondité.

Voici un exemple de résultat qui peut être surprenant mais qui devient naturel avec la démarche présentée ici.

Soit  $n$  un entier impair, supérieur ou égal à 3. On constate facilement qu'il existe, à rotation près,  $\frac{n-1}{2}$  polygones réguliers à  $n$  côtés inscrits dans un cercle de rayon 1. On autorise les polygones étoilés et aussi ceux qui ne sont pas convexes. Notons

$\ell_1^2(n), \dots, \ell_{\frac{n-1}{2}}^2(n)$  les  $\frac{n-1}{2}$  carrés des longueurs des côtés de ces polygones. Soit  $m$  un

second entier impair et intéressons nous au réel  $\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{t=1}^{\frac{m-1}{2}} (\ell_s^2(n) - \ell_t^2(m))$ .

Alors on peut prouver que ce produit vaut 0 (lorsque  $n$  et  $m$  ne sont pas premiers entre eux – ceci est facile) et  $\pm 1$  sinon – ce qui est moins clair. Reste à comprendre la signification du signe. Lorsque  $m$  est premier, on peut montrer que l'on trouve  $+1$  exactement lorsque  $n$  est un carré modulo  $m$ . Ainsi ce produit est ce qu'on appelle le symbole de Legendre – lorsque  $m$  est premier – ou plus généralement – pour  $m$  impair quelconque – le symbole de Jacobi (voir III pour les définitions). Ce résultat est dû à G. Eisenstein dans l'une de ses preuves de la loi de réciprocité quadratique.

**Sources** : Je ne connais pas de références développant systématiquement le point de vue qui suit. Mais deux séries d'articles m'ont influencé. Tout d'abord ceux de Pierre Cartier dans l'"*Enseignement mathématique*" 16 (1970) où il s'intéresse aux définitions de la signature en pensant aux résultats de Zolotareff. Ensuite ceux de Gotthold Eisenstein, notamment celui paru au Journal de Crelle 29 (1845) p.177–184, reproduit dans "*Mathematische Werke I*", p.291–298, Chelsea Pub. 1989.

## I. Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $k[X]$ .

### 1. Idéaux et éléments inversibles.

L'une des conséquences des travaux, notamment en arithmétique et en géométrie du 19<sup>ème</sup> siècle est l'introduction des notions de base de l'algèbre commutative, par exemple celles d'anneau et d'idéal. Ce qu'on va en utiliser ici est extrêmement sommaire.

Si  $A$  est un anneau commutatif avec un élément unité, et  $a$  un élément de  $A$ , l'idéal  $(a) = \{ab/b \in A\}$  est dit **principal**. Deux éléments  $a_1$  et  $a_2$  de  $A$  définissent le même idéal principal si et seulement si ils sont **associés** c'est à dire qu'il existe un élément inversible  $\alpha \in A^\times$  tel que  $a_1 = \alpha a_2$ . On vient au passage de noter  $A^\times$  l'ensemble des éléments **inversibles**, et pas seulement non nuls, de  $A$ . On utilisera parfois la notation  $A^*$  pour désigner les éléments non nuls de  $A$  :  $A^* = A - \{0\}$ .

L'ensemble quotient  $A - \{0\} / A^\times$ , qui s'identifie aux idéaux principaux non nuls de  $A$  sera noté dans la suite  $\text{Div}_+(A)$ .

C'est un semi-groupe : il existe sur  $\text{Div}_+(A)$  une loi de composition interne

$(a) + (b) = (ab) = \{\alpha\beta / \alpha \in (a); \beta \in (b)\}$  (attention : ne pas confondre avec la somme usuelle des sous-ensembles de  $A$ ).

Dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , les éléments inversibles sont  $\{\pm 1\}$  et le semi-groupe  $\text{Div}_+(\mathbb{Z})$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{N}$  muni de la multiplication. Pour  $\mathbf{k}[X]$ , les éléments inversibles forment le groupe  $\mathbf{k}^*$  et il est usuel d'identifier  $\text{Div}_+(\mathbf{k}[X])$  aux polynômes "unitaires", c'est à dire à ceux dont le coefficient dominant est +1.

Il est temps de rappeler que ces deux anneaux  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbf{k}[X]$  sont **principaux**, c'est à dire que tous les idéaux sont du type rencontrés précédemment. Ceci résulte de la possibilité d'effectuer dans ces anneaux une **division euclidienne**.

## 2. Division euclidienne.

### 2.1. Les polynômes.

Si A et B sont deux polynômes avec B non nul, il existe deux polynômes R et Q appelés respectivement **reste** et **quotient** tels que  $A=BQ+R$  avec R "*plus simple*" que B. Si l'on utilise la convention commode que le degré du polynôme nul est  $-\infty$ , donc strictement inférieur au degré de tout autre polynôme, on exige comme condition sur R que  $\text{deg}R < \text{deg}B$ . Ceci entraîne aussi l'unicité de Q et R. Notons une certaine compatibilité de cette division avec l'action des inversibles de  $\mathbf{k}[X]$ . Par exemple, si l'on divise  $\lambda A$  par B (pour  $\lambda \in \mathbf{k}[X]^\times$ ) on trouve comme quotient  $\lambda Q$  et comme reste  $\lambda R$ .

### 2.2. Les entiers.

Le cas des entiers est en apparence plus simple et il est traité dès le primaire. Ce n'est pas tout à fait vrai puisqu'alors on "*divise*" en général des entiers positifs. Si a et b sont deux entiers relatifs, il existe deux entiers r et q tels que  $a=bq+r$ . Si l'on exige que  $0 \leq r < |b|$ , on a alors l'unicité. Mais on vient de perdre alors la compatibilité, au sens de 2-1, à l'action des inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}$ .

Contrairement à ce que l'on croit souvent, la forme précédente de la division euclidienne n'est ni la seule, ni la meilleure. On peut par exemple exiger que  $-\frac{|b|}{2} \leq r < \frac{|b|}{2}$ . On se rapproche de la compatibilité par multiplication de a par  $-1$  mais un problème subsiste lorsque b est pair puisqu'on n'a alors pas unicité. Lorsque b est impair tout va bien. Pourquoi ce problème dans le cas de  $\mathbb{Z}$  alors que la situation est plus simple pour  $\mathbf{k}[X]$ ? La raison en est la suivante. Soit  $\lambda$  inversible dans l'un de ces anneaux. Alors pour tout B dans  $\mathbf{k}[X]$ ,  $1-\lambda$  n'est jamais diviseur de 0 dans le quotient  $\mathbf{k}[X]/(\mathbf{B})$ . En revanche  $1-(-1)=2$  est diviseur de 0 dans  $\mathbb{Z}/(\mathbf{b})$  si et seulement si b est pair.

Mais en fait, l'unicité dans la division euclidienne n'est pas indispensable pour ce que nous allons en faire. On se convainc de ceci en vérifiant que l'existence suffit à prouver qu'un anneau avec division euclidienne est principal, ou à décrire l'algorithme d'Euclide de recherche du PGCD. On pourra donc pour  $\mathbb{Z}$  utiliser cette variante de la division



euclidienne  $a=bq+r$  avec  $|r| \leq \frac{|b|}{2}$ . Elle est d'ailleurs plus efficace pour les calculs de PGCD.

**2.3.** Il faut remarquer l'usage que l'on vient de faire de la relation d'ordre naturelle sur  $\mathbb{Z}$ , à propos de la division euclidienne. La relation d'ordre naturelle sur  $\mathbb{N}$  est aussi utilisée pour  $k[X]$  puisqu'alors on compare les degrés des polynômes.

### 3. La structure des espaces quotients.

Le quotient d'un anneau par un idéal est encore un anneau. Mais nous allons utiliser une structure plus faible et malgré tout suffisante pour nos constructions.

#### 3.1. $k[X]/(\mathbf{B})$ .

Ces quotients sont évidemment des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie. On rencontre même ainsi tous les espaces de ce type, à isomorphisme près. On peut donc utiliser sur ce quotient toutes les ressources de l'algèbre linéaire : endomorphismes, déterminants, ...

Mais on vient de faire implicitement un choix un peu curieux qui mérite quelques commentaires. En effet, on n'a gardé de l'anneau  $k[X]$  que deux opérations : la multiplication par  $k^*=k[X]^\times$ , et l'addition.

On a compris que la première de ces structures est dans le droit fil de nos préoccupations mais la seconde est embarrassante si l'on veut passer à  $\mathbb{Z}$  puisque la structure d'anneau sur  $\mathbb{Z}/(\mathbf{b})$  se déduit de la structure de groupe additif sur ce quotient. On ne peut donc garder la structure additive sur  $\mathbb{Z}/(\mathbf{b})$  sauf à tout garder de la structure d'anneau, ce qui rigidifie bien trop la situation. Pour mieux comprendre ce point, il est nécessaire d'évoquer un peu la géométrie projective.

L'action de  $k^*=k[X]^\times$  sur  $k[X]$  passe au quotient par  $(\mathbf{B})$  et donne une action par homothéties sur l'espace vectoriel quotient. Le quotient de cet espace vectoriel par  $k^*$  est par définition l'espace projectif associé. Les automorphismes de l'espace vectoriel  $k[X]/(\mathbf{B})$  passent eux aussi au quotient (on utilise ici seulement le fait que pour  $u$  linéaire  $u(\lambda v)=\lambda u(v)$  si  $\lambda \in k^*$ , l'addition ne jouant aucun rôle) et définissent le **groupe projectif linéaire** des homographies bijectives de l'espace projectif. Ce qu'on appelle le théorème fondamental de la géométrie projective est le fait que les bijections d'un espace projectif dans lui-même qui respectent les alignements sont, à partir de la dimension 2, à un automorphisme de  $k$  près, exactement ces homographies bijectives. Mais c'est un autre résultat, apparenté à celui-ci, qui va nous servir. Il faut pour cela utiliser un peu de géométrie algébrique.

L'espace projectif a une structure de "*k*-variété algébrique". Pour le néophyte, peu importe le sens précis de ceci. Ce qui compte c'est le résultat suivant : les bijections d'un espace projectif dans lui-même respectant cette structure de "*k*-variété algébrique" forment un groupe qui est exactement le groupe projectif linéaire. Autrement dit, il n'y a pas vraiment besoin de l'addition pour définir le groupe projectif linéaire. Reste à savoir passer du groupe projectif linéaire au groupe linéaire lui-même. Ceci n'est pas très difficile – on doit faire ce qu'on appelle une extension centrale – mais puisque la construction exacte ne nous sera ici d'aucune utilité, on la passe sous silence.

Le célèbre "*programme d'Erlangen*" dû à Félix Klein, définit la géométrie comme l'étude du groupe des "*automorphismes*" d'un espace. Par exemple, de ce point de vue, dans le cas des espaces vectoriels, le plus important n'est pas la notion d'espace vectoriel en elle-même, mais les groupes linéaires. Et l'on vient de voir que ce groupe linéaire peut se définir en oubliant la structure additive. Le prix à payer en est d'introduire le formalisme de la géométrie algébrique. Il est temps de passer à  $\mathbb{Z}$ , où ce formalisme sophistiqué est fort heureusement inutile.

### 3.2. $\mathbb{Z}/(\mathbf{b})$

Ce qui précède suggère de ne s'intéresser qu'à une chose : l'action de la multiplication par  $(-1)$  sur ce quotient. Il est de bon sens de croire que sur un ensemble fini, il n'y a pas lieu de se préoccuper de savoir quelle est la structure algébrique analogue à une "*k*-variété algébrique". Nous sommes heureusement dans une situation assez élémentaire pour que ce bon sens nous suffise.

Ainsi l'on est conduit à considérer que l'analogue d'un espace vectoriel est un ensemble fini  $E$  muni d'une involution  $\sigma: E \rightarrow E$ . On va dans la suite essentiellement s'intéresser à  $\mathbb{Z}/(\mathbf{b})$  muni de l'involution qui est la multiplication par  $(-1)$ . Lorsque  $\mathbf{b}$  est impair, cette involution n'a qu'un point fixe :  $0$ . Ce que l'on va utiliser comme analogue d'un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel est un ensemble fini  $E$  (qui sera dans les exemples  $\mathbb{Z}/(\mathbf{b}) - \{0\}$  avec  $\mathbf{b}$  impair) muni d'une involution  $\sigma$  **sans points fixes**. Le groupe des automorphismes de  $(E, \sigma)$  sera par définition l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$  **commutant** à  $\sigma$ . L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est l'ensemble des applications, bijectives ou non, de  $E$  dans  $E$ , commutant à  $\sigma$ .

## II. Signature et déterminant.

1. Que le déterminant et la signature soient parents est bien connu. Ceci se retrouve d'ailleurs dès les définitions. Mais une solution alternative aux définitions classiques s'offre à nous pour définir la signature en utilisant le contexte introduit en I-3-2.

Prenons donc un ensemble  $E$  de cardinal pair muni d'une involution  $\sigma$  sans point fixe.

**Définition 1** : Une "base" de cet espace E est un sous ensemble B de E tel que E soit l'union disjointe de B et  $\sigma(B)$ .

**Mise en garde** : ceci n'a bien sûr rien à voir avec la notion de base au sens des  $\mathbb{Z}$ -modules. Rappelons encore une fois que l'on ignore délibérément la structure additive sur E si il en existe par hasard une. Par ailleurs, l'ensemble B n'est pas ordonné, contrairement aux bases des espaces vectoriels.

**Définition 2** : Soient  $(E, \sigma)$  et  $(F, \tau)$  deux ensembles finis munis chacun d'une involution sans points fixes.

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application telle que  $f \circ \sigma = \tau \circ f$ .

On choisit une "base" B de E et une "base" C de F.

Si f n'est pas une bijection, posons  $\epsilon_{B,C}(f) = 0$ .

Si f est une bijection, posons  $\epsilon_{B,C}(f) = (-1)^{I_{(B,C)}(f)}$ , où  $I_{(B,C)}(f)$  est le cardinal de  $\{b \in B / f(b) \notin C\}$ .

On dira que  $\epsilon_{B,C}(f)$  est la signature de f, dans les bases B et C.

On peut démontrer une formule sur le comportement de  $\epsilon_{B,C}$  par changement de base, analogue à celle concernant le déterminant. On se contentera pour la suite du résultat suivant :

**Proposition 1** : Soit  $(E, \sigma)$  un ensemble fini muni d'une involution  $\sigma$  sans point fixe. Soit  $f: E \rightarrow E$  commutant à  $\sigma$ . alors la parité de  $I_{B,B}(f)$  ne dépend pas du choix de la "base" B de E.

**Preuve** (indication) : Soit B' une autre "base" de E. On dira que B' est contiguë à B s'il existe un  $b \in B$  tel que  $B' = (B - \{b\}) \cup \{\sigma(b)\}$ .

Il suffit de prouver la propriété voulue sur deux "bases" contiguës puis de raisonner de "proche en proche". On laisse au lecteur le soin de le faire, ou de s'en convaincre par un exemple. On note dans la suite  $\epsilon(f)$  pour  $\epsilon_{B,B}(f)$ .

**Proposition 2** :  $\epsilon(f)$  est égal à la signature de  $\tau$ .

**Preuve** : On a utilisé la convention commode que la signature d'une application non bijective de E dans E est 0.

Si f est une bijection, la décomposition de f en cycles disjoints est de forme particulière à cause de l'égalité  $\sigma \circ f = f \circ \sigma$ . On peut énumérer les cycles ainsi :

$C_1, C_2, \dots, C_p, D_1, D_2, \dots, D_q, \overline{D_1}, \overline{D_2}, \dots, \overline{D_q}$  où les  $C_i$  sont invariants par  $\sigma$  alors que  $\sigma$  échange  $D_j$  et  $\overline{D_j}$ .

En particulier chaque  $C_i$  est de longueur paire et peut s'écrire :

$$(a_1^i, \dots, a_{n_i}^i, a_{n_i+1}^i, \dots, a_{2n_i}^i) \text{ où } a_{n_i+p}^i = \sigma(a_p^i) \quad 1 \leq p \leq n_i.$$

Choisissons comme base  $B$  celle qui contient le support de  $D_i$  et les  $n_i$  premiers éléments de  $a_1^i, \dots, a_{n_i}^i$  du support de  $C_i$ .

Il est alors clair que chaque  $D_j$  et chaque  $\overline{D_j}$  contribue pour 0 à  $I_{B,B}(f)$ . Par contre  $C_i$  contribue exactement pour 1 à  $I_{B,B}(f)$  (l'élément  $a_{n_i}^i$  de  $B$  devenant  $a_{n_i+1}^i$  de  $\sigma(F)$ ).

Alors  $\varepsilon(f) = (-1)^p = \text{sgn}(C_1) \times \dots \times \text{sgn}(C_p)$  [car chaque  $C_i$  est de longueur paire, donc de signature  $(-1)$ ].

$$\varepsilon(f) = \text{sgn}(C_1) \times \dots \times \text{sgn}(C_p) \times \text{sgn}(D_1) \times \text{sgn}(\overline{D_1}) \times \dots \times \text{sgn}(D_q) \times \text{sgn}(\overline{D_q}) \quad [\text{la longueur de } D_j \text{ vaut celle de } \overline{D_j}, \text{ donc ces deux cycles ont même signature}]. \text{ D'où } \varepsilon(f) = \text{sgn}(f).$$

On va noter désormais  $S_\sigma(E)$  le groupe (pour la composition) des automorphismes de  $E$  qui commutent à  $\sigma$ .

**Proposition 3** : l'application  $\varepsilon : S_\sigma(E) \rightarrow \{\pm 1\} = \mathbb{Z}^\times$  est un morphisme de groupe.

**Preuve** : Prenons deux éléments  $\tau_1$  et  $\tau_2$  dans  $S_\sigma(E)$ . Il est facile de vérifier que, si  $B$  est une "base" alors  $f \in (\tau_1 \tau_2 B) \cap \sigma B$  si et seulement si :

- soit  $f \in (\tau_2 B) \cap (\sigma B)$  et  $f \notin (\tau_1 B) \cap (\sigma B)$
- soit  $f \in (\tau_1 B) \cap (\sigma B)$  et  $f \notin (\tau_2 B) \cap (\sigma B)$

De là on tire que  $l(\tau_1 \tau_2) + l(\tau_1) + l(\tau_2)$  est pair et donc que  $\varepsilon$  est un morphisme de groupes.

**Remarques** :

1. Si  $A$  est un ensemble fini quelconque, et  $\tau : A \rightarrow A$  une bijection, on peut considérer la bijection associée

$$\tau \times \tau : A \times A \rightarrow A \times A.$$

Soit  $S = A \times A - \Delta$  (où  $\Delta$  est la diagonale du produit).

Cet ensemble est muni d'une involution sans point fixe :  $\sigma$  échange simplement les deux facteurs. On se ramène ainsi à la théorie précédente puisque  $\tau \times \tau$  commute à  $\sigma$ . On retrouve ainsi une des définitions usuelles de la signature comme parité du nombre d'inversions d'une permutation.

Il est rassurant de constater que la signature de la bijection  $\tau$  est égale à la signature de  $\tau \times \tau$  restreint à  $S$ . On peut le montrer en vérifiant d'abord que la signature de  $\tau \times \tau$  sur  $A \times A$  est toujours  $+1$ , puis en remarquant que  $A \times A$  est

l'union disjointe de  $S$  et de  $\Delta$  et que la restriction de  $\tau \times \tau$  à  $\Delta$  s'identifie à l'action de  $\tau$  sur  $A$ .

2. Si  $E$  a  $n$  éléments, avec  $n$  impair, et est muni d'une involution  $\sigma$  ayant un point fixe  $0$ , le nombre d'éléments d'une "base" de  $E - \{0\}$  est  $\frac{n-1}{2}$ . Ce nombre est l'analogue de la dimension, pour  $E$  ou  $E - \{0\}$ . On peut d'ailleurs vérifier que  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ , ce qui est à rapprocher du fait que le déterminant de la multiplication par  $\lambda$  dans un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est  $(\lambda)^n$ .

### III. Résultant de Sylvester et symbole de Legendre–Jacobi.

#### 3.1. Le cas des polynômes.

Voici l'une des définitions les plus usuelles du résultant de deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degrés respectifs  $p$  et  $q$ . Si  $n$  est un entier, on note  $\mathbf{k}[X]_n$  l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à  $n$ . Cet espace vectoriel a une base "canonique" :  $X^n, X^{n-1}, \dots, 1$  (attention à l'ordre!).

Soit  $\varphi : \mathbf{k}[X]_{q-1} \times \mathbf{k}[X]_{p-1} \rightarrow \mathbf{k}[X]_{p+q-1}$  l'application linéaire définie par  $\varphi(U, V) = UP + VQ$ .

Bien que  $\varphi$  ne soit pas un endomorphisme, on peut malgré tout s'intéresser à son déterminant. On utilise pour cela les bases de  $\mathbf{k}[X]_n$  ( $n=q-1, p-1$  et  $p+q-1$ ) que l'on vient de signaler ci-dessus, ce qui nous donne aussi une base du produit  $\mathbf{k}[X]_{q-1} \times \mathbf{k}[X]_{p-1}$ .

**Définition 1** : Le résultant noté  $\text{Res}(P, Q)$  est le déterminant de la matrice de  $\varphi$  dans les bases introduites ci-dessus.

Grâce au théorème de Bézout,  $\text{Res}(P, Q) \neq 0$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux. Remarquons aussi que si les coefficients de  $P$  et  $Q$  sont dans un sous-anneau  $A$  de  $\mathbf{k}$ , alors  $\text{Res}(P, Q)$  appartient à  $A$ . On utilisera ceci plus loin dans le cas  $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \mathbf{k}$ . Il est plus agréable, et naturel, d'utiliser une variante de cette définition. En effet on a, pour tout polynôme  $N$  de degré  $n$ , un isomorphisme naturel entre  $\mathbf{k}[X]/(N)$  et  $\mathbf{k}[X]_{n-1}$ .

**Définition 2** :  $\text{Res}(P, Q)$  est le déterminant de l'application  $\psi$ .

$$\psi : \mathbf{k}[X]/(Q) \times \mathbf{k}[X]/(P) \rightarrow \mathbf{k}[X]/(PQ)$$

où  $\psi$  est l'application linéaire induite par  $(U, V) \rightarrow UP + VQ$ .

Les bases utilisées maintenant pour définir le déterminant de  $\psi$  sont celles obtenues par image dans les quotients, de  $\{X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1\}$  (pour le "bon"  $n$ ). Autrement dit, on munit chaque quotient de la forme volume provenant de celle de  $\mathbf{k}[X]$  définie par  $\{\dots, X^n, \dots, X, 1\}$ .

Remarquons aussi que l'application  $\psi$  est très classique. Il s'agit de celle utilisée dans le "*lemme des restes chinois*". De façon précise ce lemme énonce que si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, alors  $\psi$  est un isomorphisme de groupes additifs (on a aussi un isomorphisme d'anneaux, mais qui n'est pas donné par  $\psi$ ).

**Proposition** (loi de réciprocité) :  $\text{Res}(P,Q)=(-1)^{\deg P \cdot \deg Q} \cdot \text{Res}(Q,P)$ .

La preuve est évidente (compter combien on échange de colonnes).

Cette définition permet, lorsque  $P$  est unitaire, d'obtenir une caractérisation agréable du résultant.

**Proposition 1** : Si  $P$  est unitaire, le résultant de  $P$  et  $Q$ ,  $\text{Res}(P,Q)$  est égal au déterminant de l'endomorphisme de  $\mathbf{k}[X]/(P)$  induit par la multiplication par  $Q$ .

**Preuve** : On a une application naturelle obtenue par multiplication par  $P$  :

$$\mathbf{k}[X]/(Q) \xrightarrow{\times P} \mathbf{k}[X]/(PQ)$$

Le quotient de  $\mathbf{k}[X]/(Q)$  par l'image  $P \times \mathbf{k}[X]/(Q)$  s'identifie naturellement à  $\mathbf{k}[X]/(P)$ .

Considérons  $\theta : \mathbf{k}[X]/(Q) \times \mathbf{k}[X]/(P) \rightarrow \mathbf{k}[X]/(PQ)$  définie par  $\theta(U,V)=UP+V$ . Il est facile de vérifier que, dans les bases "*canoniques*",  $\theta$  a une matrice qui est triangulaire inférieure et dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 (on utilise ici que  $P$  est unitaire). Ainsi  $\det(\theta)=1$  et  $\theta$  est bijectif.

$$\text{Posons } \psi_0 = \psi \circ \theta^{-1} : \mathbf{k}[X]/(PQ) \rightarrow \mathbf{k}[X]/(PQ)$$

$$\text{Explicitement, si } U \in \mathbf{k}[X]/(Q) \text{ et } V \in \mathbf{k}[X]/(P) \text{ alors } \psi(UP+V)=UP+VQ.$$

Cette formule montre que  $\psi_0$  se restreint en l'identité sur l'image de  $\mathbf{k}[X]/(Q) \xrightarrow{\times P} \mathbf{k}[X]/(PQ)$  et donne la multiplication par  $Q$  sur le quotient  $\mathbf{k}[X]/(P)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \det(\psi_0) &= \det(\text{multiplication par } Q \text{ dans } \mathbf{k}[X]/(P)) \\ &= \det(\psi_0 \circ \theta^{-1}) = \det \psi_0 \cdot \det(\theta)^{-1} = \text{Res}(P,Q). \end{aligned}$$

**Corollaire** :

$$\begin{aligned} \text{Res}(P_1 P_2, Q) &= \text{Res}(P_1, Q) \cdot \text{Res}(P_2, Q). \\ \text{Res}(P, Q_1 Q_2) &= \text{Res}(P, Q_1) \cdot \text{Res}(P, Q_2). \end{aligned}$$

**Preuve** : la première assertion résulte de la seconde grâce à la loi de réciprocité. La seconde est claire si  $P$  est unitaire grâce au résultat de la proposition 1. Si  $P=a\tilde{P}$  avec  $\tilde{P}$  unitaire, il est évident que pour tout  $R$ ,  $\text{res}(P,R)=a^{\deg R}\text{Res}(\tilde{P},R)$ . Ceci permet de terminer la preuve du corollaire.

### 3.2. Le cas des entiers.

On souhaite ici montrer que le symbole de Legendre–Jacobi est l'analogue, dans le cas des entiers, du résultant.

Rappelons d'abord sa définition la plus classique. Commençons par le symbole de Legendre. Soit  $q$  un **premier** positif de  $\mathbb{Z}$  autre que 2. On s'intéresse, pour  $n$  un entier que ne divise pas  $q$ , à savoir si  $n$  est, ou n'est pas, un carré modulo  $q$ . On définit ainsi  $\left(\frac{n}{q}\right)$ :

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ est un carré modulo } q \\ -1 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré modulo } q \end{cases}$$

Il est souvent commode, lorsque  $n$  est divisible par  $q$ , de poser  $\left(\frac{n}{q}\right)=0$ .

Dans cette définition,  $n$  et  $q$  jouent des rôles extrêmement dissymétriques. Le célèbre résultat qui suit n'en est que plus frappant.

**Théorème** (loi de réciprocité) : Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers strictement supérieurs à 2.  
Alors  $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$

Ce résultat a été deviné par Legendre puis pleinement établi par Gauss qui a su en donner de multiples preuves. On renvoie à l'ouvrage de Bachmann cité en référence pour donner un historique des diverses méthodes utilisées au 19<sup>ème</sup> siècle pour prouver ce résultat.

On peut étendre la définition du symbole de Legendre de la façon suivante. Soient  $n$  et  $m$  deux entiers, avec  $m$  strictement positif. On suppose que  $m=p_1 \dots p_k$  est la décomposition de  $m$  en produits de facteurs premiers, éventuellement répétés, alors on pose, pour  $m$  **impair**,  $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right) \dots \left(\frac{n}{p_k}\right)$ . C'est le symbole de Jacobi.

Il est plus délicat de définir  $\left(\frac{n}{m}\right)$  pour  $m$  pair. On peut néanmoins le faire, mais comme ceci n'aura pas d'importance ici, on renvoie à l'un des ouvrages cités. On peut aussi

définir  $\binom{n}{m}$  pour  $m$  négatif mais il y a dans la littérature plusieurs conventions de signes contradictoires qui sont utilisées.

La loi de réciprocité quadratique s'étend aux symboles de Jacobi.

**Théorème** : Soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs impairs.  
 Alors  $\binom{n}{m} = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}} \binom{m}{n}$

On peut aussi énoncer une loi de réciprocité un peu plus compliquée, si  $n$  ou  $m$  est pair.

Un résultat très simple, dû à L. Euler, est à signaler :

**Proposition** (L. Euler) : Si  $q$  est un entier impair premier,  
 $\binom{n}{q} = n^{\frac{q-1}{2}} [q]$

**Preuve** : Si  $n \equiv 0 [q]$ , le résultat est trivial. Sinon soit  $x \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  la classe de  $n$ , modulo  $q$ . Le groupe multiplicatif a  $q-1$  éléments et d'après le résultat élémentaire de Lagrange,  $x^{q-1} = 1$ .

En particulier si  $n$  est un carré modulo  $q$ ,  $x = y^2$  et  $x^{\frac{q-1}{2}} = y^{q-1} = 1 = \binom{n}{q}$ .

Mais le polynôme  $X^{\frac{q-1}{2}} - 1$  a au plus  $\frac{q-1}{2}$  racines dans le corps  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . On vient de voir qu'il avait comme racines les  $\frac{q-1}{2}$  classes de carrés (il y a bien  $\frac{q-1}{2}$  telles classes, comme le montre le fait que le noyau de l'automorphisme  $\theta$  de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  qui à  $y$  associe  $y^2$  est composé des deux éléments  $\{\pm 1\}$ ). Il n'a donc aucune autre racine et si  $n$  n'est pas un carré modulo  $q$ ,  $(n^{\frac{q-1}{2}})^2 \equiv 1$  entraîne que  $n^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$ . Ceci prouve le résultat d'Euler.

**Corollaire** : Si  $n_1, n_2$  et  $m$  sont des entiers impairs positifs,  
 $\binom{n_1 n_2}{m} = \binom{n_1}{m} \binom{n_2}{m}$   
 $\binom{m}{n_1 n_2} = \binom{m}{n_1} \binom{m}{n_2}$

**Preuve** : La seconde formule résulte de la définition même du symbole de Jacobi. Pour prouver la première formule, on utilise d'abord la définition pour se ramener au symbole de Legendre puis on utilise le résultat de L. Euler.

Ainsi, si  $q$  impair premier est fixé, le symbole de Legendre est un morphisme du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  vers  $\{\pm 1\} = \mathbb{Z}^\times$ . C'est en fait le seul morphisme non constant



entre ces groupes. Pour démontrer ceci on peut évoquer le fait bien connu que le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  est un groupe cyclique, ce qui entraîne qu'il admet un seul sous groupe d'indice 2.

**Corollaire 1** (Zolotareff) : Soit  $q$  un nombre premier impair positif. Soit  $n$  un entier. Le symbole de Legendre  $\left(\frac{n}{q}\right)$  est égal à la signature de l'application de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  dans lui-même induite par la multiplication par  $n$ .

**Preuve** : Si  $n$  est divisé par  $q$ , cette application n'est pas une bijection. La signature vaut alors 0, tout comme le symbole de Legendre.

Sinon on a une application naturelle de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  vers  $\{\pm 1\}$  qui à la classe  $x$  de  $n$  associe la signature de la multiplication par  $n$ .

L'associativité de la multiplication montre que cette application est un morphisme de groupes. Reste à voir qu'il n'est pas trivial afin de montrer qu'il s'agit bien du symbole de Legendre. On laisse au lecteur le soin de la vérifier en s'intéressant par exemple au cas où  $x$  est un générateur de groupe cyclique  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  (alors la permutation induite par  $x$  est le cycle  $(x, x^2, \dots, x^{q-1})$  qui ayant  $q-1$  éléments a comme signature  $(-1)^{q-1} = -1$ ).

On constate que l'on vient de retrouver l'exact analogue de la proposition 1 précédente qui, elle, portait sur les résultants de polynômes.

Avant de continuer, il est agréable de remarquer qu'en utilisant le formalisme du II sur la signature, et en remarquant que la multiplication par  $n$  dans  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  commute à la multiplication par  $-1$ , on obtient le résultat suivant :

**Corollaire 2** (C.F. Gauss) : Soit  $q$  un nombre premier impair positif. Soit  $n$  un entier non divisible par  $q$ . Considérons les  $\frac{q-1}{2}$  entiers  $\left\{n, 2n, \dots, \frac{q-1}{2}n\right\}$ . Faisons la division euclidienne de ces entiers par  $q$  comme en II.2. On trouve alors  $\frac{q-1}{2}$  restes tous compris entre  $-\left(\frac{q-1}{2}\right)$  et  $+\left(\frac{q-1}{2}\right)$ . Alors  $\left(\frac{n}{q}\right)$  vaut  $(-1)^s$  où  $s$  est le nombre de restes négatifs.

Il est maintenant tentant d'essayer de définir le symbole de Jacobi comme l'est le résultant. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers impairs. L'idée naïve est de s'intéresser à l'application  $\phi : \mathbb{Z}/(q) \times \mathbb{Z}/(p) \rightarrow \mathbb{Z}/(pq)$  définie par  $\phi(u,v) = up + vq$  (Bézout). Il s'agirait donc de donner un sens à la signature de  $\phi$  qui est, lorsque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, une bijection entre deux ensembles différents.

Pour pouvoir le faire de façon naïve, il faudrait décrire une "base" naturelle de l'ensemble produit  $(\mathbb{Z}/(q))^* \times (\mathbb{Z}/(p))^*$ . On a bien sûr une "base" naturelle de chacun des facteurs, il s'agit de celle qui est constituée de l'image des  $\frac{q-1}{2}$  (resp.  $\frac{p-1}{2}$ ) premiers entiers positifs. Mais il n'est pas si évident d'obtenir une base du produit. Notons que celui-ci est bien sûr de cardinal  $(p-1)(q-1)$  et qu'une base du produit devrait avoir  $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$  éléments. On n'est en fait plus dans la situation proche de celle des espaces vectoriels (ou la dimension d'un produit vaut la somme des dimensions des facteurs). On est plus proche du produit tensoriel des espaces vectoriels. Mais on aimerait alors avoir plutôt une dimension valant  $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$  et le produit usuel des ensembles ne convient pas.

On se convainc assez vite que l'analogue du produit (ou si l'on préfère de la somme directe) des espaces vectoriels est l'union disjointe. Il se trouve que nous n'utiliserons pas dans la suite cette construction et nous laissons le soin au lecteur de la développer si il le souhaite. Notons seulement que l'algèbre des fonctions sur l'union disjointe de deux ensembles finis est bien la somme directe de chacune des algèbres de fonctions sur chacun de ces ensembles, ce qui justifie ce point de vue.

On va plutôt dans la prochaine partie utiliser l'analogue du produit tensoriel. Soient donc  $E$  et  $F$  deux ensembles finis munis d'involutions sans points fixes notées toutes les deux par  $x \rightarrow -x$ .

Le groupe  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$  agit alors sur le produit  $E \times F$  (c'est l'action usuelle du groupe de Klein) en envoyant  $(x, y)$  sur  $(\pm x, \pm y)$ .

On peut définir trois quotients naturels :

$$\begin{aligned} E^{\times^d} F &= E \times F / (x, y) \sim (x, -y) && \text{(droite)} \\ E^{\times^g} F &= E \times F / (x, y) \sim (-x, y) && \text{(gauche)} \\ \text{et } E^{\times^c} F &= E \times F / (x, y) \sim (-x, -y) && \text{(centre)} \end{aligned}$$

Chacun de ces quotients est muni d'une involution sans point fixe correspondant à l'"autre" action de  $\mathbb{Z}/(2)$ . Par exemple pour les deux premiers produits  $\times^d$  et  $\times^g$ , il s'agit de l'involution qui associe à la classe de  $(x, y)$  la classe de  $(-x, -y)$ .

Il est alors facile de vérifier que si  $E$  est muni d'une base  $B$  et  $F$  d'une base  $C$ , les produits  $E^{\times^d} F$ ,  $E^{\times^g} F$  et  $E^{\times^c} F$  sont tous munis d'une base qui est l'image dans ces quotients de  $B \times C$ .

**Exercice :**

1. constater que  $\dim(E \times^d F) = \dim(E \times^g F) = \dim(E \times^c F) = \dim E \cdot \dim F$ .
2. Soit  $e$  (resp.  $f$ ) une permutation de  $E$  (resp.  $F$ ) commutant à l'involution. Définir alors des permutations  $e \times^d f$ ,  $e \times^g f$  et  $e \times^c f$  commutant aux involutions sur les quotients. Vérifiez que la signature de ces permutations est  $\text{sgn}(e)^{\dim F} \times \text{sgn}(f)^{\dim E}$ .

Nous pouvons revenir aux entiers et utiliser dans la partie suivante les formalismes qui viennent d'être introduits.

**IV. Diverses autres définitions du symbole de Legendre–Jacobi.**

On va maintenant utiliser les parties II et III afin de retrouver diverses formules donnant le symbole de Jacobi.

Les démonstrations seront souvent seulement rapidement évoquées et les détails – pas toujours évidents – laissés en exercice.

Dans toute la suite  $p$  et  $q$  représentent deux entiers positifs impairs supérieurs ou égaux à trois. On ne suppose **pas** que ces entiers soient premiers.

**4.1. Zolotareff.**

**Proposition 1** : la signature de l'application de  $\mathbb{Z}/(q)$  dans lui-même induite par la multiplication par  $p$  est égale au symbole de Jacobi  $\left(\frac{p}{q}\right)$ .

**Indication de la preuve** : Si  $q$  est premier, ce résultat a été prouvé en III. Sinon, on décompose  $q$  en produit de facteurs premiers :  $q = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r}$ .

Alors  $\mathbb{Z}/(q)$  est isomorphe comme anneau au produit  $\mathbb{Z}/(q_1^{\alpha_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(q_r^{\alpha_r})$ .

On laisse au lecteur le soin de montrer que la signature de la multiplication par  $p$  dans  $\mathbb{Z}/(q_i^{\alpha_i})$  est bien  $\left(\frac{p}{q_i}\right)^{\alpha_i}$ , ce qui termine la preuve de la proposition.

**4.2. Kronecker.**

Le théorème des restes chinois nous apprend que, lorsque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, il existe un isomorphisme  $\theta$  d'anneaux – en fait unique – entre  $\mathbb{Z}/(q) \times \mathbb{Z}/(p)$  et  $\mathbb{Z}/(pq)$ . On a un autre isomorphisme, mais cette fois seulement de groupes, entre  $\mathbb{Z}/(q) \times \mathbb{Z}/(p)$  et  $\mathbb{Z}/(pq)$  défini par  $\varphi(u, v) = up + vq$ .

Dans ces deux isomorphismes, le sous-ensemble  $(\mathbb{Z}/(q))^* \times (\mathbb{Z}/(p))^*$  s'envoie sur la même partie de  $\mathbb{Z}/(pq)$ . On va la noter  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$ . Par exemple si p et q sont premiers tous les deux,  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$  est simplement  $(\mathbb{Z}/(pq))^*$ . Mais en général  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$  dépend non seulement de pq mais aussi du choix de p et de q. Cet ensemble a toujours  $(p-1)(q-1)$  éléments.

Mais on a sur  $(\mathbb{Z}/(q))^* \times (\mathbb{Z}/(p))^*$  et, par transport sur  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$ , une action de groupe de  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$  donnée par les involutions sur chaque facteur.

On peut donc utiliser la construction signalée à la fin du III et définir par exemple  $(\mathbb{Z}/(q))^* \times^d (\mathbb{Z}/(p))^*$ . Posons  $t = \theta(1, -1)$ . C'est un élément de  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$  et la multiplication par t est une involution sans points fixes de  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$ . Définissons enfin  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**d}$  comme le **quotient** de  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$  par la multiplication par t.

D'après les constructions mêmes, l'application de Bézout  $\phi$ , passe au quotient et donne une bijection que l'on va noter  $\phi^d$  entre

$$(\mathbb{Z}/(q))^* \times^d (\mathbb{Z}/(p))^* \text{ et } (\mathbb{Z}/(pq))^{**d}.$$

Ces deux ensembles sont encore munis d'une involution sans points fixes qui est simplement la multiplication par  $(-1)$  et  $\phi^d$  commute à ces involutions. Le premier ensemble est muni d'une base naturelle qui est donnée par les couples, ou plutôt leurs classes,  $(u, v)$  avec  $0 < u \leq \frac{q-1}{2}$ ,  $0 < v \leq \frac{p-1}{2}$ .

Notons enfin que, puisque dans le "produit"

$$(\mathbb{Z}/(q))^* \times^d (\mathbb{Z}/(p))^* \quad (u, v) = (u, -v),$$

$$\phi^d(u, v) = up + vq = up - vq \text{ dans } (\mathbb{Z}/(pq))^{**d}.$$

On est maintenant dans une situation où le résultat suivant devient assez naturel.

**Théorème** (L. Kronecker) : Considérons l'ensemble S des entiers de la forme  $up - vq$  où  $u \in \left\{1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$  et  $v \in \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$ . Soit s le nombre des entiers de S qui sont négatifs. Alors  $(-1)^s = \left(\frac{p}{q}\right)$

**Indication de la preuve** : Il s'agit essentiellement d'interpréter ce signe  $(-1)^s$  en utilisant les notions que l'on vient d'introduire. Ce qu'il faut d'abord clairement faire, c'est décrire

une "base naturelle" de l'ensemble  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**d}$  provenant essentiellement de la base  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}^*$ .

Il s'agit donc de décrire des représentants des classes du quotient  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}/\{\pm 1, \pm 1\}$ . Mais  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**}$  ou une "base naturelle" pour l'action de  $\{\pm 1\}$  constituée des  $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$  éléments non divisibles par p ou par q entre 1 et  $\frac{pq-1}{2}$ .

On constate, ce qui est rassurant dans l'analogie avec les résultants, que l'on utilise de façon essentielle les entiers **positifs**, c'est à dire indirectement l'ordre sur  $\mathbb{Z}$ .

Reste maintenant à passer au quotient par t. Le plus simple est de constater que les couples d'éléments  $(x, -x)$  de  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**d}$  sont en bijection avec les éléments de l'image  $\varphi^d\left(\left\{1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}\right\} \times \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}\right)$ . Les éléments de cette image se relèvent en les entiers  $up - vq$   $\left(u \in \left\{1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}, v \in \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}\right)$ , entiers tous compris entre  $-\frac{pq-1}{2}$  et  $+\frac{pq-1}{2}$ .

Ceci conduit à prendre comme "base naturelle" de  $(\mathbb{Z}/(pq))^{**d}$ , les  $\frac{(p-1)}{2} \times \frac{(q-1)}{2}$  valeurs absolues de ces entiers  $|up - vq|$ .

**Exemple** : p=5, q=7

up-vq prend les valeurs -9, -4, -2, 1, 3, 8.

La base naturelle choisie est 1, 2, 3, 4, 8, 9.

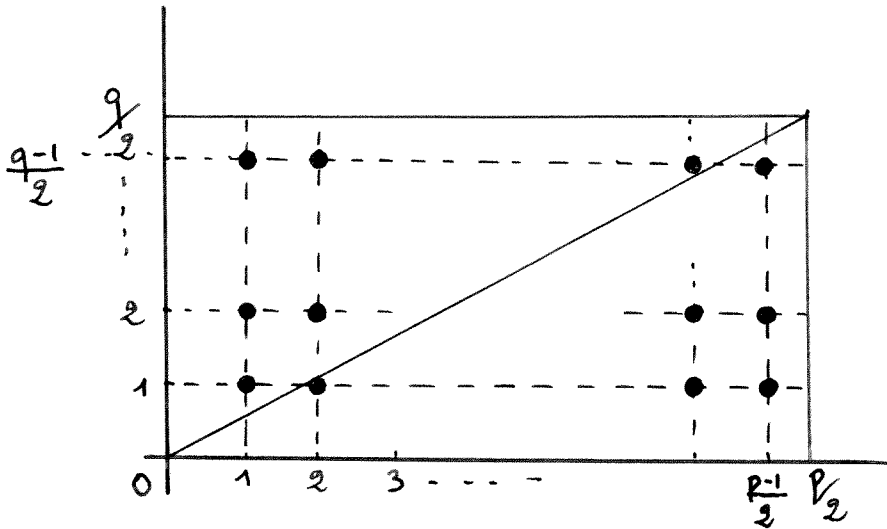
Notons que  $t=-6$  ( $-6 \equiv 1[7]$  et  $-6 \equiv -1[5]$ ) et que  $6t=1$ ,  $11t=4$ ,  $12t=-2$ ,  $13t=8$ ,  $16t=-9$  et  $17t=3$ . Donc les six autres éléments non divisibles par 5 ou par 7 entre

1 et  $\frac{pq-1}{2} = 17$  sont bien dans l'orbite de la base naturelle pour l'action de  $\{\pm 1, \pm t\}$ .

Alors  $(-1)^s$  est la "signature" de  $\varphi^d$  calculée dans les bases que l'on vient d'introduire. Ce qui rend plausible, sans le prouver, le résultat annoncé.

**Problème** : prouver ce résultat en s'inspirant de la preuve de la proposition 1 de III.1. Il faudra ici partir du résultat du à Zolotareff et arriver au résultat du théorème, c'est à dire renverser la preuve donnée en III.1.

**Interprétation géométrique** : Soient p et q premiers entre eux. Considérons le rectangle dessiné ci-dessous (de diagonale d'extrémité l'origine et le point  $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ ).



Le nombre de points entiers dans ce rectangle (à coordonnées strictement positives) est  $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$ . La grande diagonale du rectangle le partage en deux triangles de mêmes surfaces. Mais ces deux triangles ne contiennent pas exactement le même nombre de points entiers.

Notons  $T(p,q)$  le nombre de points entiers dans le triangle inférieur. Puisque la diagonale a comme équation  $up-vq=0$ ,  $T(p,q)$  est le nombre de solutions entières de :

$$up-vq < 0 \quad 0 < u \leq \frac{p-1}{2} \quad 0 < v \leq \frac{q-1}{2}$$

Donc d'après le théorème qui précède,  $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{T(p,q)}$ . Ce résultat a été aussi établi par G. Eisenstein (1844).

**Interprétation combinatoire** : gardons encore  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

Considérons les  $\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}$  nombres distincts suivants, classés dans cet ordre :

$$q, 2q, \dots, \frac{p-1}{2} q, p, 2p, \dots, \frac{q-1}{2} p.$$

Cette suite doit être permutée pour être réécrite dans l'ordre croissant. La signature de la permutation nécessaire est  $\left(\frac{p}{q}\right)$ . En effet, pour calculer cette signature, il suffit de calculer le nombre d'inversions à effectuer. Mais puisque la sous-suite  $q, 2q, \dots, \frac{p-1}{2} q$  est croissante, ainsi que l'autre sous-suite  $p, 2p, \dots, \frac{q-1}{2} p$ , il suffit de compter combien il y a de signes négatifs dans les différences  $up-vq$ ,  $\left(u \in \left\{1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}\right\} \text{ et } v \in \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}\right)$ . On retrouve ainsi l'énoncé du théorème précédent.

**Exercice** : déduire de l'énoncé du théorème ou de l'une ou l'autre des interprétations des preuves immédiates de la loi de réciprocité quadratique.

**Remarque** : L'interprétation combinatoire est, en un certain sens, encore plus proche de la définition usuelle du résultant que l'énoncé du théorème de Kronecker. On a en effet ici une bijection entre deux ensembles différents comportant chacun  $\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}$  éléments et  $\binom{p}{q}$  est la signature de cette bijection. On a pu donner un sens à cette signature en utilisant l'ordre naturel sur  $\mathbf{N}$ . On retrouve bien là la définition usuelle du résultant qui utilise la somme directe  $k[X]/(Q) \oplus k[X]/(P)$  (remplacée dans ce contexte par l'union disjointe  $\mathbb{Z}/(q) \cup \mathbb{Z}/(p)$  plutôt que par le produit tensoriel  $k[X]/(Q) \otimes k[X]/(p)$  (dont l'analogue ici est  $\mathbb{Z}/(q) \times \mathbb{Z}/(p)$ ). Il est rassurant de noter que le résultant peut aussi se définir sur  $k[X]/(Q) \otimes k[X]/(P) \approx k[X, Y]/(Q(X), P(Y))$  comme le déterminant de l'endomorphisme induit par multiplication par  $X-Y$ . Le lecteur souhaitant pousser les analogies aussi loin que possible est invité à méditer cette remarque.

## V. Le symbole de Jacobi comme résultant.

Une parenté aussi forte laisse penser que le symbole de Jacobi peut même se calculer comme un résultant. C'est ce que l'on va montrer ici en se laissant guider par le travail fait en III.

Il est classique que la signature peut se voir comme un déterminant. Il suffit d'introduire les matrices de permutation. De façon explicite, si  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  est une application, on définit la matrice  $M(\sigma) = (a_{ij})$  ou  $a_{ij} = 0$  sauf si  $i = \sigma(j)$ , auquel cas  $a_{ij} = 1$ . alors la définition même du déterminant (par exemple comme forme  $n$ -linéaire alternée) montre que  $\det M(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ .

Le problème est d'associer à tout entier impair  $n$  positif un polynôme  $P_n$  tel que si  $m$  est impair,  $\binom{n}{m}$  soit le résultant des deux polynômes  $P_n$  et  $P_m$ . La loi de réciprocité quadratique montre que le degré de  $P_n$  doit être  $\frac{n-1}{2}$ .

Le polynôme le plus naturellement lié à  $\mathbb{Z}/(n)$  est celui qui vient de la division du cercle en  $n$  parties égales, c'est à dire celui qui permet le calcul des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité. Il s'agit de  $X^n - 1$ . On sait que les racines complexes de ce polynôme forment un groupe  $\mu_n$  (multiplicatif) cyclique d'ordre  $n$ , donc isomorphe (lorsqu'on choisit une racine primitive, c'est à dire un générateur) à  $(\mathbb{Z}/(n), +)$

Le sous ensemble  $(\mathbb{Z}/(n))-\{0\}$  est alors associé au polynôme  $\frac{X^n-1}{X-1} = X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+1 = H_n(X)$ . La multiplication par  $(-1)$  dans  $(\mathbb{Z}/(n))-\{0\}$  donne le passage à l'inverse multiplicatif dans  $\mu_n : z \rightarrow \frac{1}{z}$ . On constate que le polynôme  $H_n(X)$  se comporte bien dans cette opération :  $X^{n-1}H_n\left(\frac{1}{X}\right)=H_n(X)$ .

Les considérations du III., notamment celles de la fin introduisant les produits  $\times^d$ ,  $\times^g$  et  $\times^c$ , montrent que l'on doit s'intéresser au quotient de  $\mathbb{Z}/(n)-\{0\}$  par la multiplication par  $(-1)$ , donc à ce qui est invariant par cette action.

En terme de polynômes, on est donc naturellement amené à s'intéresser au polynômes en  $Y=X+\frac{1}{X}$ .

**Définition** : On définit  $Q_n(Y)$  comme le polynôme de  $\mathbb{Z}[Y]$  vérifiant :

$$Q_n\left(X+\frac{1}{X}\right) = X^{\frac{n-1}{2}} + X^{\frac{n-3}{2}} + \dots + X^{-\frac{n-3}{2}} + X^{-\frac{n-1}{2}} = X^{-\frac{n-1}{2}} H_n(X)$$

Ce polynôme est clairement de degré  $\frac{n-1}{2}$ . Le résultat suivant devient naturel :

**Théorème** : Si  $n$  et  $m$  sont deux entiers impairs positifs,

$$\binom{n}{m} = \text{Res}(Q_m, Q_n) = \text{Res}(Q_n(-X), Q_m(-X))$$

**Preuve** (indication) : Il est facile de montrer que  $Q_n$  et  $Q_m$  ont une racine commune dans un corps algébriquement clos  $k$  si et seulement si  $H_n$  et  $H_m$  ont une racine commune dans ce même corps. Mais les racines communes  $H_n$  et  $H_m$  sont simultanément des racines  $n^{\text{ièmes}}$  et  $m^{\text{ièmes}}$  de l'unité, autres que 1. Elles sont donc exactement les racines  $d^{\text{ièmes}}$  de l'unité, autres que 1, où  $d$  est le pgcd de  $n$  et  $m$ . Ainsi  $\text{Res}(Q_m, Q_n)=0$  si et seulement si  $m$  et  $n$  ne sont pas premiers entre eux.

Mais, puisque  $Q_m$  et  $Q_n$  sont à coefficients entiers, le résultant est un entier (voir la remarque en 3.1. entre les définitions 1 et 2). Supposons désormais que  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux. On va prouver que  $\text{Res}(Q_m, Q_n)=\pm 1$ . Soit  $p$  un nombre premier. L'argument précédent prouve que les réductions modulo  $p$  de  $Q_m$  et  $Q_n$  n'ont aucune racines communes dans une clôture algébrique  $k$  de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . En particulier, la réduction modulo  $p$  de  $\text{Res}(Q_m, Q_n)$  est non nulle pour tout  $p$  premier. Ce qui entraîne bien que  $\text{Res}(Q_m, Q_n)$  est un inversible de  $\mathbb{Z}$ .



Démontrons le théorème dans le cas particulier où  $n$  est un nombre premier  $p$ . Rappelons que, modulo  $p$ ,  $X^p-1=(X-1)^p$ . Donc la réduction modulo  $p$  de  $H_p(X)$  est  $(X-1)^{p-1} = [(X-1)^2]^{\frac{p-1}{2}} = (X^2-2X+1)^{\frac{p-1}{2}} = X^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(X + \frac{1}{X} - 2\right)^{\frac{p-1}{2}}$ .

Ceci montre que la réduction modulo  $p$  de  $Q_p(Y)$  est  $\overline{Q_p}(Y) = (Y-2)^{\frac{p-1}{2}}$ .

La réduction modulo  $p$  de  $\text{Res}(Q_p, Q_m)$  est :

$$\overline{\text{Res}}\left(\overline{Q_p}, \overline{Q_m}\right) = \left(\text{Res}(Y-2, \overline{Q_m})\right)^{\frac{p-1}{2}} = \left[\overline{Q_m}(2)\right]^{\frac{p-1}{2}}$$

Mais  $Q_m(2) = Q_m\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 \cdot H_m(1) = m$ . On obtient que  $\text{Res}(Q_p, Q_m) \equiv m^{\frac{p-1}{2}} [p]$ . Mais on sait déjà que  $\text{Res}(Q_p, Q_m) \equiv \pm 1$  et grâce au lemme d'Euler (voir en III.), on constate bien que le théorème est prouvé dans ce cas.

On ne traitera pas le cas général. La preuve est élémentaire mais sans intérêt particulier pour notre propos.

On peut facilement décrire les racines de  $Q_n$ . Il s'agit des  $\frac{n-1}{2}$  réels  $z + \frac{1}{z}$ , où  $z$  est une racine  $n^{\text{ième}}$  complexe de l'unité – autre que 1. Autrement dit il s'agit des  $\frac{n-1}{2}$  nombres  $2\cos \frac{2\pi s}{n} \left(s=1, \dots, \frac{n-1}{2}\right)$ .

En particulier,

**Corollaire (G. Eisenstein)**

$$\binom{n}{m} = (2)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}} \prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{t=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\cos \frac{2\pi t}{m} - \cos \frac{2\pi s}{n}\right)$$

On peut donner une jolie interprétation géométrique à ce résultat. Remarquons que si  $z = e^{\frac{2i\pi s}{n}}$ ,  $(1-z)(1-\overline{z}) = 2-(z+\overline{z})$ . Ainsi  $2-2\cos \frac{2\pi s}{n}$  représente le carré de la longueur du segment joignant les points du plan complexe d'affixes 1 et  $z = e^{\frac{2i\pi s}{n}}$ .

Puisque  $2\left(\cos \frac{2\pi t}{m} - \cos \frac{2\pi s}{n}\right) = \left(2-2\cos \frac{2\pi s}{n}\right) - \left(2-2\cos \frac{2\pi t}{m}\right)$  (sic!), on vient de prouver le résultat suivant, annoncé dans l'introduction.

**Théorème** : Soit  $b$  un entier impair positif, supérieur ou égal à 3.

Notons  $\ell_1^2(b), \dots, \ell_{\frac{b-1}{2}}^2(b)$ , les différents carrés des longueurs des polygones réguliers à  $b$  côtés, étoilés ou pas, convexes ou pas, mais inscrits dans un cercle de rayon 1. Alors,

$$\binom{n}{m} = \prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{t=1}^{\frac{m-1}{2}} (\ell_s^2(n) - \ell_t^2(m))$$

L'étude des polygones réguliers préoccupe les mathématiciens, et d'autres, depuis toujours. Le "*calcul*" des longueurs des côtés de ces polygones est très ancien, bien antérieur à toute découverte des nombres complexes. On trouve dès le 16<sup>ème</sup> siècle la détermination, pour de petites valeurs de  $n$ , du polynôme  $K_n$  dont les zéros sont les carrés de ces longueurs. On a vu que  $K_n(Y) = Q_n(2-Y)$  et il suit que  $\binom{n}{m} = \text{Res}(K_n, K_m)$ .

Le calcul de  $K_7$  est par exemple donné dans la grande œuvre de J. Kepler (*Harmonices Mundi*, Linz, 1619, voir pages 32 à 37 dans la traduction française de J. Peyroux éditée par A. Blanchard, 1979). Il attribue d'ailleurs ce calcul à un autre mathématicien : Justus Byrgius (ou Joost Bürgi), suisse né à Lichtensteig (1549) et mort à Cassel (1632).

La méthode, connue dès l'antiquité, de construction du pentagone régulier avec la règle et le compas peut d'ailleurs s'interpréter comme un "*calcul*" de  $K_5(Y) = Y^2 - 5Y + 5$ . Ces polynômes  $K_n$  sont parmi les plus anciens polynômes remarquables.

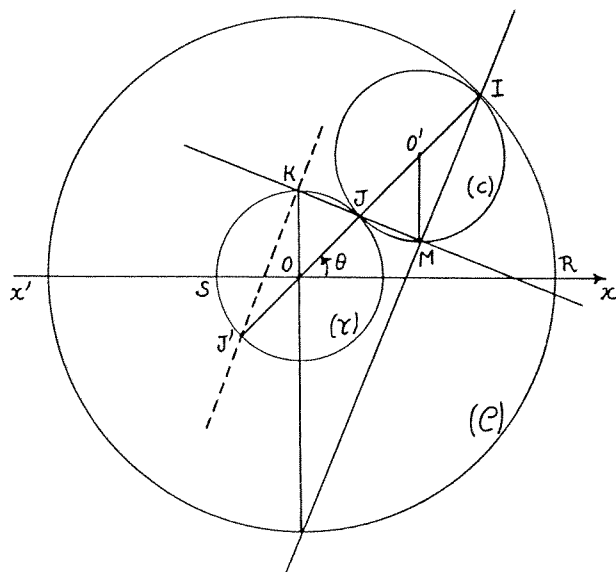
## Références.

- Bachmann P.** : *Niedere Zahlentheorie, Erster Teil*, B.G. Teubner, Leipzig 1902.
- Cartier P.** : Sur une généralisation des symboles de Legendre–Jacobi, *L'enseignement mathématique*, 16, (1970), p.31–48.
- Eisenstein G.** : Application de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante, *Journal de Crellé* 29 (1845), p.177–184, reproduit dans : *Mathematische Werke I*, p.291–298, Chelsea pub. (1989).
- Kronecker L.** : Verallgemeinerung des Gaußschen Kriteriums für den quadratischen Restcharakter einer Zahl in bezug auf eine andere, *Monatsber. K. Akad. Win. zu Berlin*, Sitzung v.22 Juni 1876, (1878), p.330–341.
- Pieper, H** : *Variationen über ein zahlentheoretisches Thema von C.F. Gauss*, Birkhäuser V. Basel und Stuttgart, 1978.
- Zolotareff E.I.** : Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre, *Nouv. Ann. Math.* (2) 11 (1872), p.354–362.

# SUR L'HYPOCYCLOÏDE À TROIS REBROUSSEMENTS ET SES IMPLICATIONS DANS LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Jacques DAUTREVAUX

Figure 1



1.— L'hypocycloïde à trois rebroussements est la courbe décrite par un point  $M$  d'un cercle de rayon  $r$  qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle  $(C)$  de rayon  $3r$ . Si  $I$  est le point de contact, on a :

$$\text{arc } \widehat{IM} = \text{arc } \widehat{IR}$$

(égalité de longueurs d'arcs), où  $R$  est le point de  $(C)$  coïncidant, au départ, avec  $M$ .

Le cercle mobile reste tangent à un cercle  $(\gamma)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ ; soit  $J$  le point de contact, aligné avec  $O, O'$  et  $I$ .

$I$  étant le centre instantané de rotation du cercle mobile, il s'ensuit que la droite  $MI$  est la normale en  $M$  à la trajectoire, donc la tangente en  $M$  est la perpendiculaire en  $M$  à la droite  $MI$ , soit la droite  $MJ$ .

La droite  $MJ$  recoupe le cercle  $(\gamma)$  en  $K$ ; la droite  $MI$  recoupe le cercle  $(C)$  en  $L$ . On constate aisément que :

$$\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{O'M} \text{ (symétrie de centre } J)$$

$$\overrightarrow{OL} = 3\overrightarrow{O'M} \text{ (homothétie de centre } I \text{ et de rapport } 3)$$

d'où il résulte que  $O, K, L$  sont alignés, avec  $\overrightarrow{OL} = -3\overrightarrow{OK}$ .

Appelons aussi  $\overrightarrow{Ox}$  la direction définie par  $\overrightarrow{OR}$ ,  $\overrightarrow{Ox'}$  la direction opposée.

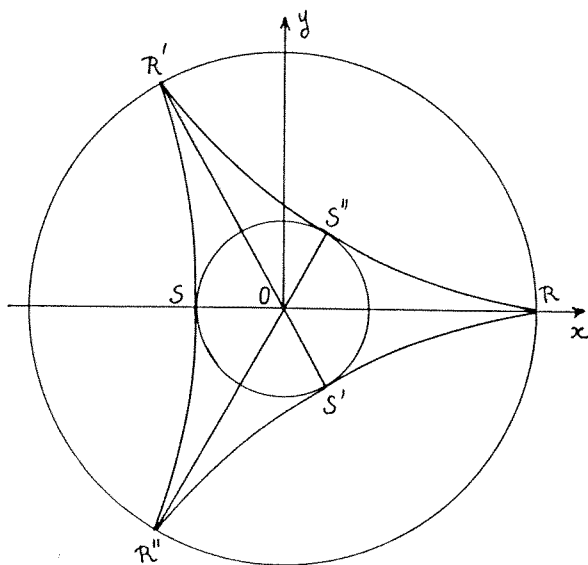


Figure 2

SUR L'HYPOCYCLOÏDE À TROIS REBROUSSEMENTS

2.- En rapportant le plan à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$  et en posant :  $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OI}) = \theta$ , l'égalité d'arcs  $\widehat{RI} = \widehat{MI} = r(\overrightarrow{O'M}, \overrightarrow{O'I})$ , donne aisément  $(\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'M}) = -3\theta$  et la relation  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$  fournit immédiatement les coordonnées de  $M$  en fonction de  $\theta$  :

$$\begin{cases} x = r(2 \cos \theta + \cos 2\theta) \\ y = r(2 \sin \theta - \sin 2\theta). \end{cases}$$

La construction de la courbe s'ensuit. Elle possède une symétrie d'ordre 3, de centre  $O$ , ainsi que trois symétries par rapport aux droites d'angles polaires  $\frac{k\pi}{3} \pmod{\pi}$ .

Il existe trois points de rebroussement  $R, R', R''$  situés sur  $(C)$  aux angles polaires  $\frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}$  et trois points  $S, S', S''$  où l'hypocycloïde est tangente au cercle  $(\gamma)$ , d'angles polaires  $\pi + \frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

Désormais nous appellerons  $O$  le **centre** de l'hypocycloïde,  $(\gamma)$  son **cercle tritangent** et  $S, S', S''$  ses **sommets**.

L'élimination de  $\theta$  entre  $x$  et  $y$  - il s'agit d'un calcul relativement technique sur lequel on nous pardonnera de ne pas insister - fournit l'équation cartésienne de cette hypocycloïde à 3 rebroussements

$$(x^2 + y^2)^2 - 8rx(x^2 - 3y^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0.$$

Il s'agit d'une quartique circulaire (et non bicirculaire car les points cycliques ne sont pas des points doubles, une quartique pouvant avoir au plus 3 points doubles et ses trois points de rebroussement comptent chacun pour un point double) bitangente à la droite de l'infini avec les points cycliques comme points de contact. D'après les formules de Plücker, elle est de classe 3 et il est intéressant d'obtenir son équation tangentielle. On obtient aisément l'équation de la tangente au point  $M$  de paramètre  $\theta$  sous la forme :

$$x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} = r \sin \frac{3\theta}{2},$$

c'est l'équation normale de cette tangente  $Mt$ , qui montre que :

a)  $(Ox, Mt) = -\frac{\theta}{2}$  modulo  $\pi$ .

b) La distance de  $O$  à la tangente, comptée sur la direction d'angle polaire  $\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$  est  $r \sin \frac{3\theta}{2}$ .

Ce qui nous conduit à l'équation en coordonnées polaires  $(O, \overrightarrow{Ox})$  de la podaire de  $O$  par rapport à l'hypocycloïde, sous la forme :  $\rho = -r \cos 3\omega$ .

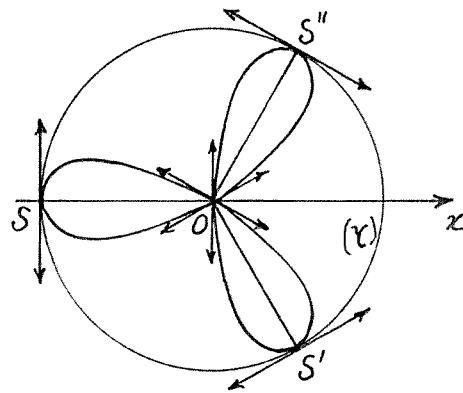


Figure 3

Son équation cartésienne :  $(x^2 + y^2)^2 + rx(x^2 - 3y^2) = 0$ , qui s'en déduit aisément, montre qu'il s'agit aussi d'une quartique circulaire bitangente à la droite de l'infini (les points de contact étant les points cycliques) ayant un point triple à l'origine (un point triple est algébriquement équivalent à 3 points doubles).

c) Les coordonnées tangentielles  $(u, v, w)$  de la tangente  $Mt$  satisfont à :  $u = \lambda \sin \theta/2, v = \lambda \cos \theta/2, w = -\lambda r \sin(3\theta/2)$  et l'élimination (facile) de  $\theta$  et  $\lambda$  conduit à l'équation tangentielle de l'hypocycloïde envisagée :

$$(1) \quad (u^2 + v^2)w - ru(u^2 - 3v^2) = 0.$$

La réciproque est remarquable car :

Toute courbe algébrique dont l'équation tangentielle a la forme :  $(u^2 + v^2)w + Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 = 0$  (où  $A, B, C, D$  ne sont pas tous nuls, sinon il y aurait dégénérescence) est une hypocycloïde à 3 rebroussements.

**Démonstration :** on cherche un nouveau système d'axes  $(Ox, Oy)$ , déduit du repère primitif  $(O_1X, O_1Y)$  par la succession d'une translation de vecteur  $\overrightarrow{O_1O}$  et d'une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ , dans lequel l'équation tangentielle donnée prenne la forme (1). On appellera  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point,  $(x, y)$  celles du même point dans les nouveaux axes et on a facilement :

$$\begin{cases} X = x_0 + x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y = y_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

où  $(x_0, y_0)$  sont les coordonnées de  $O$  dans le repère  $(O_1X, O_1Y)$ . De même, soient  $(U, V, W)$  les coordonnées tangentielles primitives d'une droite,  $(u, v, w)$  celles de la même droite dans le nouveau repère.

De  $UX + VY + W = 0$  on tire  $ux + vy + w = 0$  où

$$\begin{cases} u = U \cos \alpha + V \sin \alpha \\ v = -U \sin \alpha + V \cos \alpha \\ w = Ux_0 + Vy_0 + W \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} U = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ V = u \sin \alpha + v \cos \alpha \\ W = -u(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \\ \quad + v(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) + w \end{cases}$$

et en substituant dans :

$$(U^2 + V^2)W + AU^3 + BU^2V + CUV^2 + DV^3 = 0$$

on obtient l'équation tangentielle de la courbe dans le repère  $(Ox, Oy)$ , sous la forme :

$$(u^2 + v^2)w + A_1u^3 + B_1u^2v + C_1uv^2 + D_1v^3 = 0.$$

On développe  $A_1, B_1, C_1, D_1$  en linéarisant les expressions trigonométriques qui y interviennent par :  $\cos^3 \alpha = (1/4)(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$  (formule connue), et de façon

SUR L'HYPOCYCLOÏDE À TROIS REBROUSSEMENTS

analogue  $\sin \alpha \cos^2 \alpha = (1/4)(\sin \alpha + \sin 3\alpha)$ ,  $\sin^2 \alpha \cos \alpha = (1/4)(\cos \alpha - \cos 3\alpha)$  et  $\sin^3 \alpha = (1/4)(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$ , ce qui donne finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4A_1 = -4(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) + A(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha) + B(\sin \alpha + \sin 3\alpha) \\ \quad + C(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + D(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) \\ 4B_1 = 4(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) - 3A(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + B(\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha) \\ \quad - C(\sin \alpha - 3 \sin 3\alpha) + 3D(\cos \alpha - \cos 3\alpha) \\ 4C_1 = -4(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) + 3A(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + B(\sin \alpha - 3 \sin 3\alpha) \\ \quad + C(\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha) + 3D(\sin \alpha + \sin 3\alpha) \\ 4D_1 = 4(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) - A(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) + B(\cos \alpha - \cos 3\alpha) \\ \quad - C(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + D(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha) \end{array} \right.$$

soit aussi, de façon plus simple et immédiate :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 - C_1 = (A - C) \cos 3\alpha + (B - D) \sin 3\alpha \\ B_1 - D_1 = -(A - C) \sin 3\alpha + (B - D) \cos 3\alpha \\ 3A_1 + C_1 = -4(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) + (3A + C) \cos \alpha + (B + 3D) \sin \alpha \\ B_1 + 3D_1 = 4(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) - (3A + C) \sin \alpha + (B + 3D) \cos \alpha \end{array} \right.$$

On veut avoir  $A_1 = -r, B_1 = 0, C_1 = 3r, D_1 = 0$ .

On obtient alors 4 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4r = (A - C) \cos 3\alpha + (B - D) \sin 3\alpha \\ 0 = (B - D) \cos 3\alpha - (A - C) \sin 3\alpha \\ 0 = (3A + C) \cos \alpha + (B + 3D) \sin \alpha - 4(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \\ 0 = -(3A + C) \sin \alpha + (B + 3D) \cos \alpha + 4(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) \end{array} \right.$$

qui nous livrent aisément les valeurs des quatre inconnues  $x_0, y_0, \alpha, r$ . On obtient facilement :  $r^2 = (1/16)[(A - C)^2 + (B - D)^2]$  d'où  $r$  ( $r > 0$ ), puis  $\cos 3\alpha = -\frac{A-C}{4r}, \sin 3\alpha = -\frac{B-D}{4r}$  qui déterminent  $3\alpha$  à  $2k\pi$  près, d'où trois valeurs possibles de  $\alpha$  (à  $2\pi/3$  près) correspondant aux trois points de rebroussements de l'hypocycloïde et enfin  $x_0 = \frac{1}{4}(3A + C), y_0 = \frac{1}{4}(B + 3D)$  qui donnent la position du centre  $O$  de l'hypocycloïde, dont le cercle tritangent a pour rayon  $r$ .

Cet intéressant résultat peut être utilisé pour traiter analytiquement les applications.

### 3.- Etude géométrique

Revenons à la figure 1.

1. On observe immédiatement que  $J$  est le milieu de  $KM$ . Autrement dit,  $M$  est symétrique de  $K$  par rapport à  $J$ .

2. Comme  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OJ}) = \theta$  on a  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O'M}) + \pi$  (car  $\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{O'M}$ ) soit  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OK}) = \pi - 2\theta$ .

On en déduit  $(\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{OJ}) = \pi + \theta, (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{OK}) = -2\theta$  d'où

$$(\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{OJ}) = 0 \text{ modulo } 2\pi.$$

Lorsque  $J$  et  $K$  sont confondus, alors la droite  $JK$  tangente en  $M$  à l'hypocycloïde est tangente au point correspondant (qui coïncide aussi avec  $M$ ) du cercle tritangent. Ce point est donc l'un des trois sommets de l'hypocycloïde.

3. Cette propriété est remarquable, car elle est caractéristique.

Soit un cercle  $(\gamma)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ ,  $A$  un point-origine sur ce cercle. L'enveloppe d'une droite coupant  $(\gamma)$  en  $J$  et  $K$  tels que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}) = \varphi$  (constante) est une hypocycloïde à trois rebroussements admettant  $(\gamma)$  comme cercle tritangent.

En effet on se ramène à la propriété 2 en cherchant sur le cercle un point  $S$  tel que  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ}) = 0$ . Si  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS}) = \alpha$  on a :  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}) - \alpha$  et  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}) - \alpha$  de sorte que  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ}) = \varphi - 3\alpha$  et il suffit de choisir  $\alpha$  tel que  $3\alpha = \varphi$  (modulo  $2\pi$ ) d'où trois valeurs possibles pour  $\alpha$ , décalées l'une par rapport à l'autre de  $(2\pi/3)$ .

Le point caractéristique sur la droite  $JK$ , c'est-à-dire le point de contact de cette droite avec son enveloppe, est la position limite du point  $X$  d'intersection de  $JK$  avec une autre  $J_1K_1$  de la famille, lorsque  $J_1$  et  $K_1$  tendent (simultanément) vers  $J$  et  $K$ .

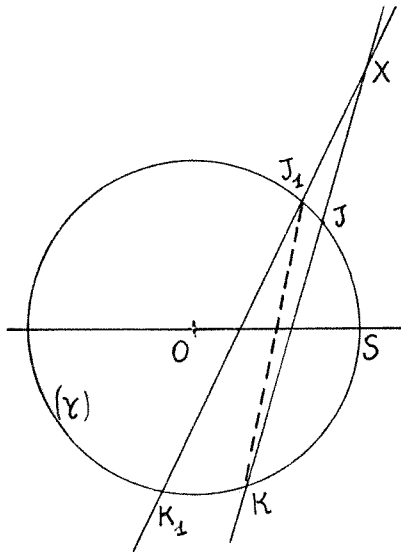


Figure 4

Si  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ}) = \theta$  alors  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = -2\theta$ , et si  $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OJ_1}) = \alpha$  alors  $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OK_1}) = -2\alpha$ .

La droite  $J_1K_1$  tend vers  $JK$  si, et seulement si  $\alpha$  tend vers 0.

Comme :  $(KJ, KJ_1) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OJ_1}) = \alpha/2 \pmod{\pi}$ , et  $(XJ_1, XJ) = (K_1J_1, K_1J) + (JK_1, JK) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OJ_1}, \overrightarrow{OJ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK_1}, \overrightarrow{OK}) = -\alpha/2 + \alpha = \alpha/2$ , le triangle  $J_1XK$  est isocèle (donc  $J_1K = J_1X$ ) et lorsque  $J_1$  tend vers  $J$ ,  $X$  tend vers le point caractéristique  $M$  sur  $JK$ , tel que  $JK = JM$  :  $M$  est le symétrique de  $K$  par rapport à  $J$ .

La symétrie de centre  $J$  transforme alors  $K$  en  $M$  et  $(\gamma)$  en un cercle  $(c)$  de centre  $O'$  tangent à  $(\gamma)$  en  $J$ , et tangent en  $I$  au cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $3r$  (voir fig. 5)

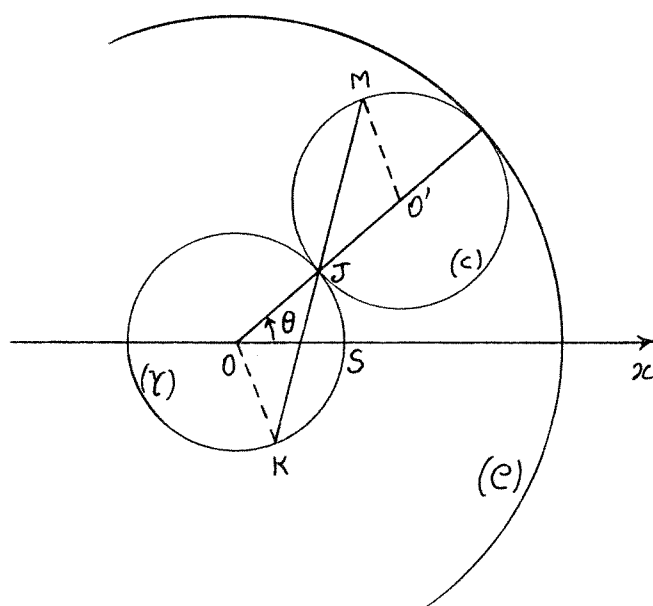


Figure 5

Si  $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{O'x'}, \overrightarrow{O'J})$ ,  
 on aura  
 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OK}) = -2\theta = (\overrightarrow{O'x'}, \overrightarrow{O'M})$   
 et par suite  $(\overrightarrow{O'J}, \overrightarrow{O'M}) = -3\theta$ ,  
 d'où  $(\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'M}) = \pi - 3\theta$  et  $\text{Arc } \widehat{IM} = r(\pi - 3\theta)$ . Soit  $A$  le point  
 de  $(C)$  défini par  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \pi/3$   
 on a :  $\text{Arc } \widehat{IA} = 3r(\pi/3 - \theta) =$   
 $\text{Arc } \widehat{IM}$ , ce qui détermine le roulement  
 sans glissement du cercle  $(c)$  à l'intérieur  
 du cercle  $(C)$  :  $M$  décrit alors une  
 hypocycloïde à trois rebroussements de  
 cercle tritangent  $(\gamma)$ , dont un point de  
 rebroussement est  $A$ , et un sommet est  
 $S$ .

D'où une **première génération tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements** :

|| L'hypocycloïde à trois rebroussements de centre  $O$ , de cercle tritangent  $(\gamma)$ , dont un sommet est  $S$  (point de  $(\gamma)$ ), est l'enveloppe d'une droite coupant  $(\gamma)$  en deux points  $J$  et  $K$  tels que :  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = -2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ})$ .

**Application :**

Revenons à la figure 1 qui pour l'hypocycloïde à trois rebroussements décrite par  $M$  détermine la tangente en  $M$ , soit  $MJ$ , et la normale en  $M$ , soit  $MI$  (ou  $ML$ ).

1. La perpendiculaire en  $K$  à  $MJK$  recoupe  $(\gamma)$  en  $J'$  diamétralement opposé à  $J$ , et on a :

$$(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ'}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OJ}) = \theta \text{ et } (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = -2\theta.$$

Il en résulte que la droite  $KJ'$  est aussi tangente à la même hypocycloïde (de sommet  $S$ , de cercle tritangent  $(\gamma)$ ) que  $JK$ . Le point de contact  $M'$  est le symétrique de  $K$  par rapport à  $J'$ .

2. La normale en  $M$  à l'hypocycloïde recoupe le cercle  $(C)$  en  $I$  et  $L$ , et on a :  $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OI}) = \theta$  et  $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OL}) = \pi + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OK}) = -2\theta$ . Par suite son enveloppe est l'hypocycloïde à trois rebroussements de cercle tritangent  $(C)$  dont un sommet est  $R$ .

C'est la **développée** de l'hypocycloïde donnée, dont elle se déduit par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-3$ .



4.- **Corollaire :** Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux tangentes perpendiculaires entre elles à l'hypocycloïde donnée, se coupant en  $P$  sur  $(\gamma)$ .

$D_1$  recoupe  $(\gamma)$  en  $X$  et son point de contact  $U$  est le symétrique de  $P$  par rapport à  $X$ .

$(D_2)$  recoupe  $(\gamma)$  en  $Y$  et son point de contact  $V$  est le symétrique de  $P$  par rapport à  $Y$ .

$XY$  est un diamètre de  $(\gamma)$  (voir fig. 1 et 6).

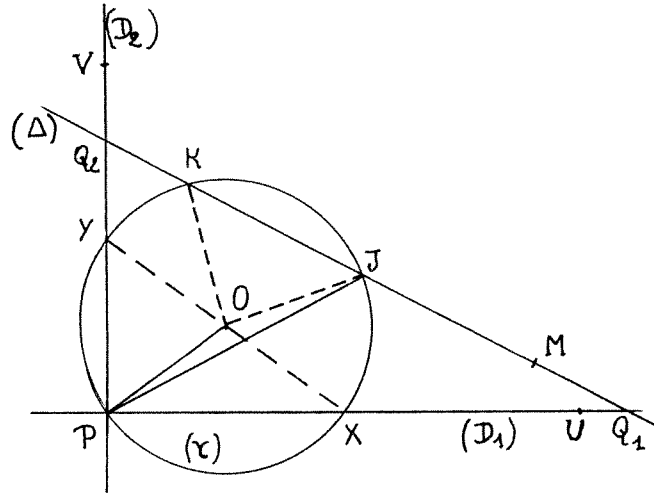


Figure 6

Soit  $(\Delta)$  une troisième tangente à l'hypocycloïde : elle coupe le cercle  $(\gamma)$  en  $J$  et  $K$  et les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  en  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement.

$JK$  étant une tangente à l'hypocycloïde on a par exemple :

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OJ}) = \alpha \text{ mod } 2\pi (\text{constante})$$

ce qui appliqué à la tangente  $(D_1)$  donne, vu la position du point de contact, avec  $J$  en  $X$  et  $K$  en  $P$  :  $\alpha = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP})$ .

A noter que le choix de  $J$  et  $K$  pour les deux points communs à  $(\gamma)$  et  $(\Delta)$  n'a rien d'arbitraire,  $J$  devant être le milieu de  $KM$  où  $M$  est le point de contact de  $(\Delta)$  avec l'hypocycloïde;  $J$  est aussi le point de contact du cercle tritangent  $(\gamma)$  avec le cercle  $(c)$  qui porte le point  $M$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors } (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OK}) + 2(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OJ}) &= (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}) \\ \text{soit } (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OJ}) &= (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OK}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OX}) \\ \text{ou } (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OJ}) &= (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OX}) \text{ modulo } 2\pi. \end{aligned}$$

On en tire  $(PX, PJ) = (JK, JP) + (PJ, PX) = (JK, PX)$  modulo  $\pi$ , soit  $(PQ_1, PJ) = (Q_1J, Q_1P)$  modulo  $\pi$ , ce qui montre que le triangle  $JPQ_1$  est isocèle ( $JP = JQ_1$ ). Comme le triangle  $PQ_1Q_2$  est rectangle en  $P$ , il est alors clair que  $J$  est le milieu de  $Q_1Q_2$ .

La réciproque est, elle aussi, remarquable : soient  $(\gamma)$  un cercle de centre  $O$ ,  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites qui se coupent perpendiculairement en un point  $P$  de  $(\gamma)$ . On cherche l'enveloppe d'une droite  $(\Delta)$  coupant  $(D_1)$  en  $Q_1$ ,  $(D_2)$  en  $Q_2$  et  $(\gamma)$  en deux points  $J$  et  $K$  dont l'un, par exemple  $J$ , est le milieu de  $Q_1Q_2$ .

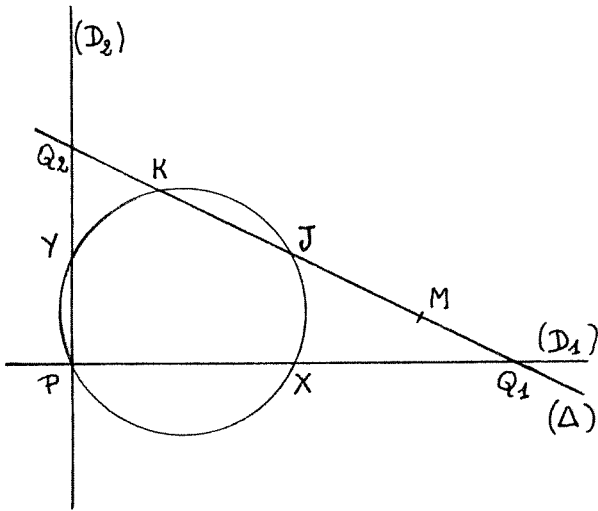


Figure 7

Cette hypocycloïde est naturellement tangente à  $(D_1)$  ( $J$  venant en  $X$  et  $K$  en  $P$ ) et aussi à  $(D_2)$ , les points de contact étant respectivement symétriques de  $P$  par rapport à  $X$  et à  $Y$ , tout comme le point de contact de  $(\Delta)$  est le symétrique  $M$  de  $K$  par rapport à  $J$ .

Un cas particulier intéressant (voir fig. 8) est celui où  $(D_1)$  est un diamètre de  $(\gamma)$ ,  $(D_2)$  la tangente en  $S$  :  $(D_1)$  est alors tangente de rebroussement et  $(D_2)$  tangente au sommet.

D'où la **deuxième génération tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements.**

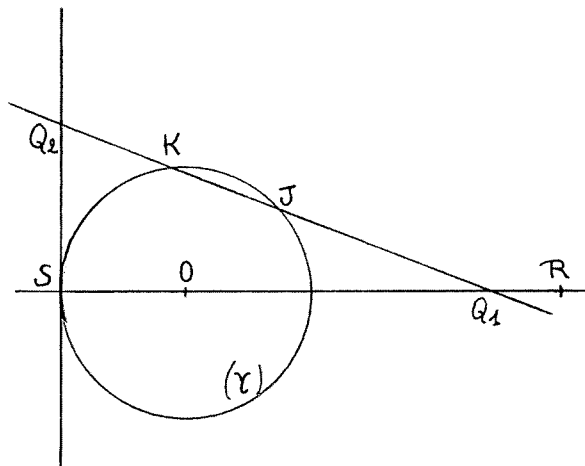


Figure 8

Soient  $(\gamma)$  un cercle,  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites se coupant perpendiculairement en un point  $P$  de  $(\gamma)$ . L'enveloppe d'une droite  $(\Delta)$  coupant  $(\gamma)$  en deux points dont l'un est milieu du segment découpé sur  $(\Delta)$  par  $(D_1)$  et  $(D_2)$  est une hypocycloïde à 3 rebroussements tangente à  $(D_1)$  et  $(D_2)$  et admettant  $(\gamma)$  comme cercle tritangent.

**Remarque 1 :** On voit ainsi apparaître sur toute tangente à l'hypocycloïde définie au début (fig. 1) deux points particuliers  $J$  et  $K$  (éventuellement confondus) qui

$J$  étant milieu de  $Q_1Q_2$ ,  $PJ$  est médiane du triangle rectangle  $PQ_1Q_2$  (voir fig. 7), et le triangle  $JPQ_1$  est isocèle, d'où :  $(Q_1J, Q_1P) = (PQ_1, PJ) \bmod \pi$  soit  $(JK, PX) = (PX, PJ) \bmod \pi$  ou  $(JK, JP) + (PJ, PX) = (PX, PJ) \bmod \pi$   $(JK, JP) + 2(PJ, PX) = 0 \bmod \pi$  et  $(\vec{OK}, \vec{OP}) + 2(\vec{OJ}, \vec{OX}) = 0 \bmod 2\pi$  qui se transforme aisément en  $(\vec{OP}, \vec{OK}) + 2(\vec{OP}, \vec{OJ}) = 2(\vec{OP}, \vec{OX})$  et on retrouve la première génération tangentielle de l'hypocycloïde à 3 rebroussements, puisque  $2(\vec{OP}, \vec{OK})$  est une constante modulo  $2\pi$ .

sont ses points d'intersection avec le cercle tritangent ( $\gamma$ ). Il est clair que ces deux points ne jouent pas le même rôle : si  $M$  est le point de contact de cette tangente,  $J$  est le milieu de  $KM$ .

$J$  est alors appelé le **point primaire** de la tangente,  $K$  est son **point secondaire**.

Par tout point  $P$  du cercle ( $\gamma$ ) on peut mener 3 tangentes à l'hypocycloïde : pour l'une d'elles  $P$  est point primaire; et pour les deux autres, qui sont perpendiculaires entre elles,  $P$  est point secondaire.

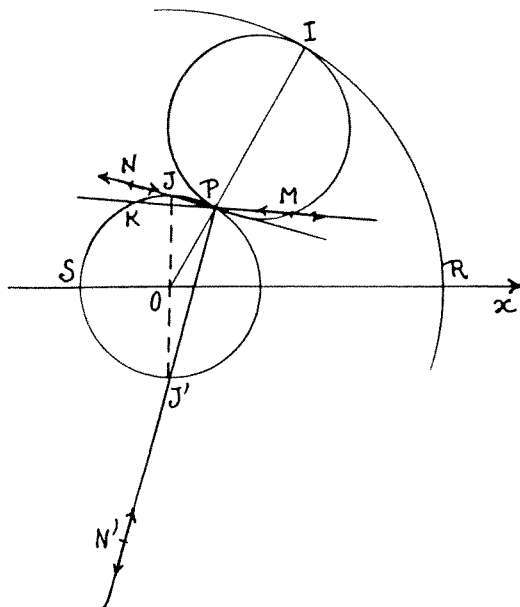


Figure 9

$$(Ox, JK) = (Ox, JJ') + (JJ', JK) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OJ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OJ'}, \overrightarrow{OK}) = \frac{-\theta}{2}.$$

Soit, pour  $R$  point de rebroussement de l'hypocycloïde :

$$(RS, MJK) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OJ}) \text{ mod } \pi.$$

Réciproquement, nous avons précédemment utilisé des couples de tangentes perpendiculaires entre elles et se coupant en un point du cercle tritangent. Est-ce bien la seule configuration possible?

Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux tangentes orthogonales,  $J$  et  $J'$  leurs points primaires respectifs,  $K$  et  $K'$  leurs points secondaires.

On a :  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK'}) = -2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ})$  et  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = -2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ'})$  avec  $(JK, J'K') = \pi/2$  (modulo  $\pi$ ).

D'après la remarque 2

$$(OS, JK) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OJ}) \text{ et } (OS, J'K') = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OJ'}).$$

Alors,  $(JK, J'K') = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OJ'})$  d'où  $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OJ'}) = \pi$  (mod  $2\pi$ ).

Dès lors,  $J$  et  $J'$  sont diamétralement opposés sur  $(\gamma)$ . Il en résulte  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ'}) = (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OJ}) + \pi$  et  $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK'})$  d'où  $K$  et  $K'$  sont confondus.

On a donc le résultat :

|| Si deux tangentes à l'hypocycloïde sont orthogonales, leur point d'intersection se trouve sur le cercle tritangent et est le point secondaire de chacune d'elles.

En ce sens, le cercle tritangent peut être considéré comme le "cercle orthoptique" de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Les connaisseurs remarqueront qu'une partie des propriétés étudiées sont des cas particuliers, appliqués à l'hypocycloïde à trois rebroussements, de propriétés plus générales des épicycloïdes et hypocycloïdes et même des courbes cycloïdales.

### 5.- Retour à la géométrie du triangle

Variations sur le théorème de Simson.

On se donne un "vrai" triangle  $ABC$  par trois points  $A, B, C$  non situés tous trois sur une même droite.

**Lemme 1** (théorème de Simson) : L'ensemble des points  $M$  du plan dont les projections orthogonales sur les trois droites  $AB, BC, CA$  sont alignées est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

Soient  $m_1, m_2, m_3$  les projections orthogonales de  $M$  sur  $BC, CA, AB$  respectivement. En utilisant les quadrangles inscriptibles  $MCm_1m_2$  et  $MBm_1m_3$  on a :

$$\begin{aligned} & (m_1m_2, m_1m_3) \\ &= (m_1m_2, m_1M) + (m_1M, m_1m_3) \\ &= (Cm_2, CM) + (BM, Bm_3) \\ &= (AC, MC) + (MB, AB) \\ &= (AC, AB) - (MC, MB). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'alignement de  $m_1m_2m_3$  équivaut à  $(MC, MB) = (AC, AB)$  d'où la conclusion.

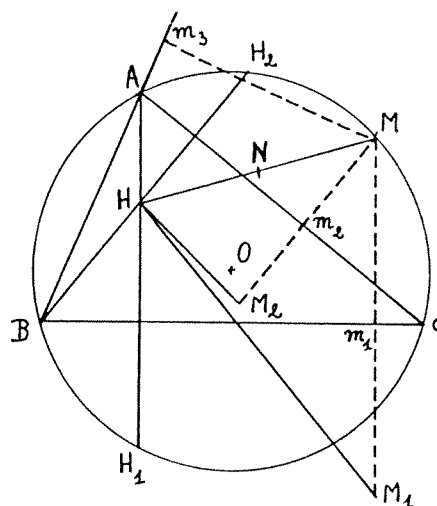


Figure 11

(délibérément déformée)

**Corolaire** : Dans cette configuration, les symétriques de  $M$  par rapport aux trois droites  $AB, BC, CA$  sont eux-mêmes alignés, et réciproquement.

**Lemme 2** : La droite contenant les symétriques de  $M$  par rapport aux trois côtés du triangle passe par l'orthocentre.

La hauteur issue de  $A$  recoupe le cercle circonscrit en  $H_1$  symétrique de l'orthocentre  $H$  par rapport à  $BC$ , la hauteur issue de  $B$  le recoupe de même en  $H_2$  et on a :

$$(HM_1, HM_2) = (HM_1, BC) + (BC, AC) + (AC, HM_2).$$

Du fait que  $H$  et  $H_1$  d'une part,  $M$  et  $M_1$  de l'autre sont symétriques par rapport à  $BC$  et que de même  $H$  et  $H_2$  ainsi que  $M$  et  $M_2$  le sont par rapport à  $AC$  on aura :

$$\begin{aligned}
 (HM_1, HM_2) &= (BC, H_1M) + (BC, AC) + (H_2M, AC) \\
 &= (BC, AC) + (MH_2, MH_1) - (AC, BC) \\
 &= (BC, AC) + (AH_2, AH_1) - (AC, BC) \\
 &= (BC, AC) + (AH_2, BH_2) + (BH_2, AH_1) - (AC, BC) \\
 &= (BC, AC) + (CA, CB) + (AC, BC) - (AC, BC) = 0
 \end{aligned}$$

(du fait que  $AH_1$  et  $BH_2$  sont perpendiculaires à  $BC$  et  $AC$ ).  
 D'où le résultat

**Corolaire :** La droite de Simson de  $M$  passe par le milieu  $N$  du segment  $HM$ .  
 De plus, ce point  $N$ , déduit de  $M$  par l'homothétie  $(H, 1/2)$  se trouve donc sur le **cercle d'Euler** du triangle  $ABC$ , dont le centre  $\omega$  est situé au milieu du segment  $HO$ .

Il en résulte aussi que :

La droite de Simson de  $M$  (par rapport au triangle  $ABC$ ) recoupe le cercle d'Euler en deux points dont l'un est le milieu de  $HM$ . [ce point est naturellement le point  $N$  ci-dessus].

La droite de Simson en question recoupe la hauteur issue de  $A$  en  $K_1$ , et  $N$  est également le milieu de  $m_1K_1$ . En effet la symétrie de centre  $N$  échange les points  $H$  et  $M$  donc les droites (parallèles)  $AH$  et  $Mm_1$ , donc les points  $m_1$  et  $K_1$ ;  $N$  est de même le milieu de  $m_2K_2$  et celui de  $m_3K_3$  où  $K_2$  et  $K_3$  sont les points de rencontre de la droite de Simson avec les hauteurs  $BH$  et  $CH$ .

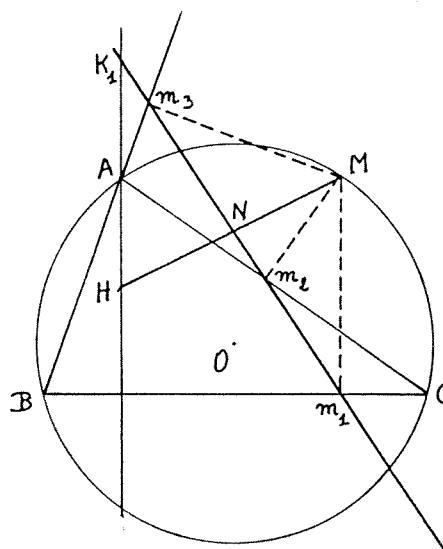


Figure 12

**Remarque (concernant le §4.-)**

Le lecteur se rendra aisément compte (voir fig. 10) que l'hypocycloïde étudiée peut être engendrée par le point  $M$  du cercle  $(c')$  de centre  $K'$  et de rayon  $2r$ , roulant sans glisser à l'intérieur de  $(C)$ . On a en effet aussi :

$$\text{Arc } LM = \text{Arc } LR.$$

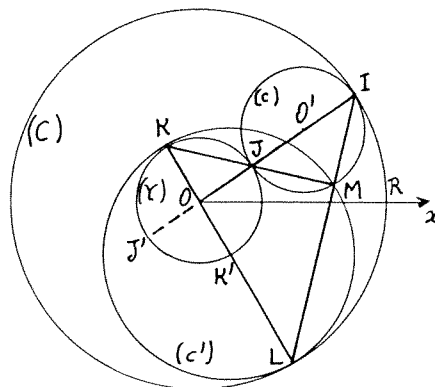


Figure 10

**Direction de la droite de Simson de M**

Soit  $\Delta(M)$  la droite de Simson de  $M$  relativement au triangle  $ABC$  : elle est en vertu du lemme 2 parallèle à  $HM_1$  où  $M_1$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $BC$ .  $H$ , orthocentre du triangle a par rapport à  $BC$  un symétrique  $H_1$  situé sur le cercle circonscrit (voir fig. 13).

On note que  $\Delta(M)$  est la parallèle à  $HM_1$  passant par  $N$  milieu de  $HM$ . On a :

$$\begin{aligned} & (BC, HM_1) \\ = & (H_1M, BC) = (H_1M, BM) + (BM, BC) \\ & = (BM, BC) + (AH_1, AB) \\ = & (BM, BC) + (BC, AB) + \pi/2 \end{aligned}$$

soit

$$(BC, \Delta(M)) = (BM, BA) + \pi/2.$$

Par suite :

$\alpha$ ) Pour toute direction donnée du plan il existe un unique point  $M$  du plan tel que la droite de Simson de  $M$  relativement au triangle  $ABC$  soit parallèle à cette direction.

Il s'ensuit que, si  $\Delta(M)$  et  $\Delta(M')$  sont les droites de Simson de deux points  $M$  et  $M'$  du cercle circonscrit on a :

$$(\Delta(M), \Delta(M')) = (BC, \Delta(M')) - (BC, \Delta(M)) = (BM', BA) - (BM, BA) = (BM', BM)$$

et il en résulte :

$\beta$ ) L'angle des droites de Simson associées à deux points  $M$  et  $M'$  du cercle circonscrit au triangle est donné par :

$$(\Delta(M), \Delta(M')) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \text{ modulo } \pi.$$

**Conséquences :**

1. Les droites de Simson de deux points  $M$  et  $M'$  relativement à un triangle sont orthogonales si et seulement si  $M$  et  $M'$  sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit.

Comme les deux droites de Simson concernées passent respectivement par les milieux  $N$  et  $N'$  de  $HM$  et  $HM'$ , qui sont deux points diamétralement opposés

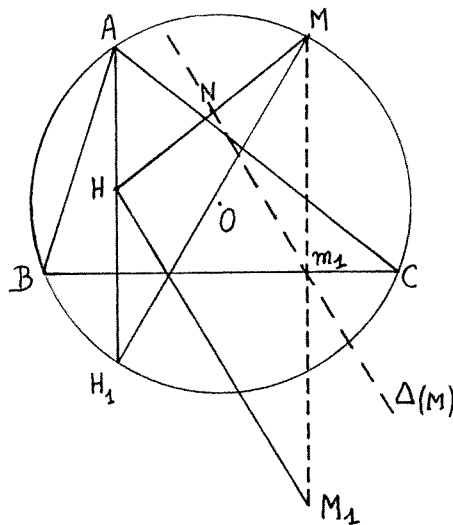


Figure 13

sur le cercle d'Euler (puisque  $M$  et  $M'$  le sont sur le cercle circonscrit), le point d'intersection  $U$  de ces deux droites de Simson est lui-même un point situé sur le cercle d'Euler, généralement distinct de  $N$  et de  $N'$ .

On remarque par ailleurs que  $MN'$ ,  $M'N$  et  $HO$  sont les trois médianes du triangle  $HMM'$  : elles concourent au centre de gravité  $G$  de ce triangle, tel que  $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$  : ce point (situé sur la droite d'Euler du triangle  $ABC$ ) est donc le **centre de gravité** du triangle  $ABC$  (disposition des points  $H, G, O$  et  $\omega$  sur la droite d'Euler) et par suite l'homothétie  $(G, -2)$  qui transforme  $\omega$  en  $O$ ,  $N'$  en  $M$ , le cercle d'Euler en le cercle circonscrit,  $U$  en un point  $V$  situé sur le cercle circonscrit et la droite  $N'U$  (droite de Simson de  $M'$ ) en une droite  $MV$  qui lui est parallèle, et qui est donc la perpendiculaire issue de  $M$  sur la droite de Simson de  $M$ .

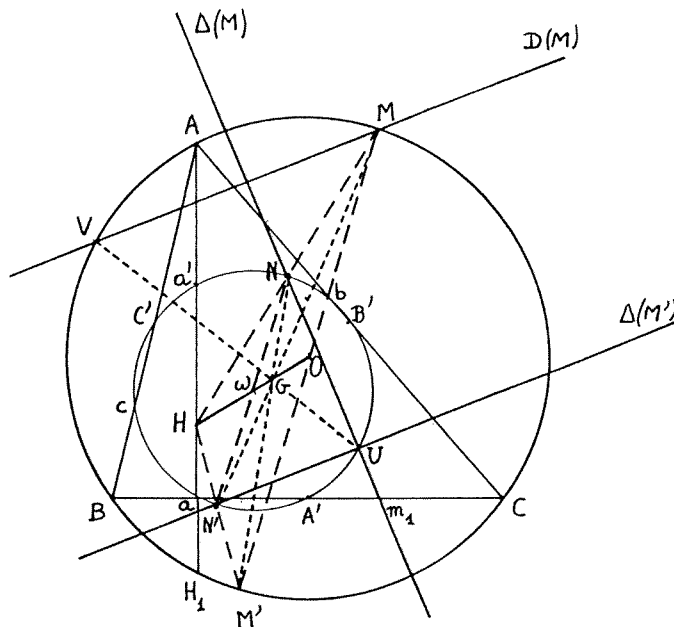


Figure 14

On en déduit par conséquent :

2. La perpendiculaire issue de  $M$  à sa propre droite de Simson est l'image par l'homothétie  $(G, -2)$  de la droite de Simson du point  $M'$  diamétralement opposé à  $M$  sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

### Enveloppe de la droite de Simson de $M$

En se référant à ce qui précède (voir fig. 12) on sait que la droite de Simson de  $M$  coupe le cercle d'Euler du triangle en deux points dont l'un est le milieu  $N$  du segment  $HM$  ainsi que du segment  $m_1K_1$  découpé sur cette droite de Simson par le côté  $BC$  et la hauteur issue de  $A$ . Ces deux droites se coupant en un point  $a$  (pied de la hauteur) situé sur le cercle d'Euler, nous nous trouvons dans les conditions énoncées en 4) pour la (deuxième) génération tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements, et :

|| L'enveloppe des droites de Simson relatives à un triangle  $ABC$  (lorsque  $M$  parcourt le cercle circonscrit) est une hypocycloïde à trois rebroussements de centre  $\omega$  admettant comme cercle tritangent le cercle d'Euler du triangle  $ABC$ .

SUR L'HYPOCYCLOÏDE À TROIS REBROUSSEMENTS

C'est l'**hypocycloïde de Steiner** du triangle. Elle est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle, qui sont des droites de Simson particulières : la hauteur  $AH$  est celle du point  $A$ , le côté  $BC$  celle du point diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle circonscrit.

Sur les tangentes  $BC$  et  $HA$  à cette hypocycloïde, les points primaires sont  $A'$  (milieu de  $BC$ ) et  $a'$  (milieu de  $HA$ ), les points secondaires sont confondus en  $a$  (pied de la hauteur) qui se trouve sur le cercle d'Euler.

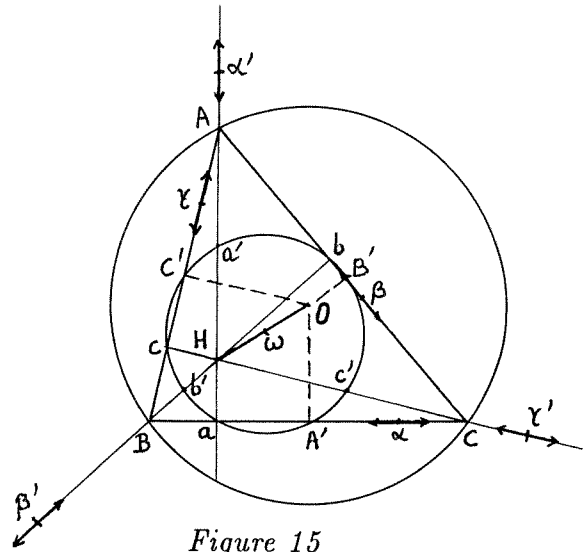


Figure 15

Le point de contact étant sur toute tangente le symétrique du point secondaire par rapport au point primaire, on en déduit les points de contact avec l'hypocycloïde de Steiner,  $\alpha$  de  $BC$  symétrique de  $a$  par rapport à  $A'$  et  $\alpha'$  de  $HA$  symétrique de  $a$  par rapport à  $a'_O$  et de même pour les autres côtés et hauteurs.

Les sommets  $S$  de l'hypocycloïde sont les trois points du cercle d'Euler qui correspondent à des droites de Simson où les points primaires  $N$  et secondaire  $U$  sont confondus, c'est-à-dire que ce sont les points de contact des droites de Simson tangentes au cercle d'Euler.

Se reportant à ce qui a été vu en 4), fig. 7, on sait que

$$(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega U}) + 2(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega N}) = 2(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega A'}),$$

bien entendu en transposant les notations, soit :

$$3(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega S}) = 2(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega A'}) \text{ modulo } 2\pi$$

ce qui donne bien les trois sommets (et par suite les rebroussements, situés sur un cercle de centre  $\omega$  et de rayon triple de celui du cercle d'Euler) par :

$$(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega S}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega A'}) + \frac{2k\pi}{3}.$$

**Sur quelques propriétés complémentaires**

1. On sait que l'hypocycloïde de Steiner du triangle  $ABC$  est tangente aux trois côtés, le point de contact avec  $BC$  par exemple étant le symétrique du pied  $a$  de la hauteur par rapport au milieu  $A'$  du côté.

La normale en ce point à l'hypocycloïde de Steiner est parallèle à la hauteur  $HA$ , dont elle est la symétrique par rapport au centre  $O$  du cercle circonscrit.



Par suite les normales à l'hypocycloïde de Steiner aux trois points de contact avec les côtés sont les symétriques des trois hauteurs par rapport à  $O$  : **elles sont donc concourantes** en un point  $H'$  symétrique de  $H$  par rapport à  $O$ .

Le point  $H'$  est l'orthocentre du triangle  $A''B''C''$  déduit de  $ABC$  par l'homothétie  $(G, -2)$  : ce triangle est le triangle dont les milieux des côtés sont  $A, B, C$  : il admet  $H$  comme centre du cercle circonscrit et  $O$  comme centre du cercle d'Euler.

**2.** La perpendiculaire issue de  $M$  à la droite de Simson de  $M$  se déduit (voir 5<sup>o</sup>, fig. 14) de la droite de Simson du point  $M'$  diamétralement opposé à  $M$  par l'homothétie  $(G, -2)$ .

Il en résulte que :

L'enveloppe de la perpendiculaire issue de  $M$  sur la droite de Simson de  $M$  est une hypocycloïde à trois rebroussements déduite de l'hypocycloïde de Steiner par l'homothétie  $(G, -2)$ .

Le cercle tritangent est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , et les sommets  $\Sigma$  sont donnés par :

$$(\overrightarrow{Oa_1}, \overrightarrow{O\Sigma}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{Oa_1}, \overrightarrow{OA}) + \frac{2k\pi}{3}$$

en reprenant les notations précédentes, soit facilement :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Sigma}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Oa_1}) + \frac{2k\pi}{3}.$$

Cette hypocycloïde n'est donc autre que l'hypocycloïde de Steiner du triangle  $A''B''C''$ .

**3.** Tout ce qui précède s'applique immédiatement au problème des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle. En admettant de rencontrer des paraboles dégénérées (si on se cantonne aux paraboles propres il conviendra d'ôter  $A, B, C$  à l'ensemble des foyers, et les points correspondants aux enveloppes) il est immédiat que :

- l'ensemble des foyers est le cercle circonscrit au triangle;
- les directrices sont toutes les droites passant par  $H$ , orthocentre;
- l'enveloppe de la tangente au sommet est l'hypocycloïde de Steiner du triangle;
- l'enveloppe de l'axe de la parabole est l'hypocycloïde (de cercle tritangent le cercle circonscrit) déduite de l'hypocycloïde de Steiner par l'homothétie  $(G, -2)$  : c'est donc l'hypocycloïde de Steiner du triangle  $A''B''C''$ .

#### Bibliographie sommaire :

Y. Lemaire.- *Hypocycloïdes et Epicycloïdes* (Vuibert 1929)

H. Commissaire et G. Cagnac.- *Cours de Mathématiques spéciales, tome 3* (Masson 1941).

## LES ROULETTES D'ELLIPSES II

Eugène EHRHART

Lauréat de l'Académie des Sciences

La courbe la plus étudiée au 17e siècle est la cycloïde, appelée roulette par Pascal. Deux savants éminents de l'époque, ignorant le calcul différentiel et intégral, ont découvert par la géométrie pure, deux propriétés d'une simplicité frappante de cette courbe :

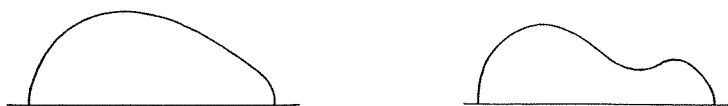
**Théorème 1 :** *La longueur de l'arc périodique de la cycloïde vaut 4 fois sa hauteur (Pascal). L'aire de son arche périodique vaut 3 fois celle du cercle générateur (Roberval).*

Ici nous appellerons "roulette" la trajectoire d'un point fixe  $M$  d'une ellipse, qui roule sans glisser sur une droite. A une similitude près la cycloïde est unique. La roulette par contre dépend de deux choix arbitraires : le rapport axial  $\frac{2a}{2b}$  de l'ellipse et la position du point  $M$  qui initialement est en contact avec la droite support. Nous allons étudier simplement la double infinité de roulettes, problème qui semble a priori difficile et inabordable par la géométrie analytique et l'analyse.

### 1. Formes de l'arc périodique des roulettes.

En mars 1991 nous avons démontré dans 'L'Ouvert' :

**Théorème 2 :** *L'arc périodique d'une roulette ne peut présenter que deux sortes de formes : à une ou à deux bosses.*



### Remarques :

L'arc à une bosse peut être convexe ou présenter un point d'inflexion.

L'arc a un axe de symétrie si et seulement si le point  $M$  initialement en contact avec la droite support est le sommet d'un axe de l'ellipse.

### 2. Le rapport d'aires $r = \frac{S_M}{s}$

On désigne par  $s$  l'aire de l'ellipse génératrice et par  $S_M$  celle de l'arche périodique de la roulette dont  $M$  est le point de contact initial. On a vu que  $r = 3$  si l'ellipse est circulaire. Mais  $r$  peut devenir infini; pour le voir il suffit de laisser constant

le grand axe  $2a$  de l'ellipse et de faire tendre le petit axe  $2b$  vers zéro. Par contre on verra que  $r$  a une limite inférieure absolue.

**Conjecture :** *Pour une ellipse donnée,  $r$  est maximal si le point de contact initial est un sommet du grand axe, et minimal s'il est un sommet de petit axe.*

Si  $M$  est une extrémité  $B$  du petit axe,  $S_B$  désigne l'aire de l'arche périodique. (Dans la suite  $S_A$  désignera cette aire si  $M$  est une extrémité  $A$  du grand axe). Par une similitude toute ellipse peut être amenée à avoir pour petit axe  $2b = 8$  cm, sans que  $r$  ne change. On obtient alors la table suivante, où figurent les valeurs approchées de  $\frac{S_B}{s}$ .

$a$	4cm	5cm	5,5cm	6cm	6,5cm	7cm	7,2cm	7,3cm	7,4cm	7,5cm	8cm	$\infty$
$\frac{a}{b}$	1	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,8	1,82	1,85	1,875	2	$\infty$
$\frac{S_B}{s}$	<b>3</b>	3,05	3,06	<b>3</b>	2,85	2,84	<b>2,83</b>	2,88	<b>3,07</b>	3,26	3,94	$\infty$

Pour  $a = 7,2$ cm le rapport  $\frac{S_B}{s} \simeq 2,83 \simeq 2\sqrt{2}$ . Comme  $\frac{S_B}{s}$  est une fonction continue de  $\frac{a}{b} > 1$ , il sera égal à **3** pour juste deux valeurs de cette variable, l'une près de 1,5 l'autre près de 1,85 ( $\frac{S_A}{s} > 3$  pour tout  $a \neq b$  de la table).

**Théorème 3 :** *Le rapport  $r$  varie entre  $2\sqrt{2}$  et l'infini (\*).*

**Remarque :** Le rapport  $r$  est supérieur à **3** si  $\frac{a}{b}$  est compris entre certaines limites et que  $M$  est voisin de  $b$ ; il est égal à **3** si  $a = b$ , ou si  $M$  est près de  $B$  et que  $\frac{a}{b}$  prend l'une ou l'autre de deux valeurs adéquates correspondantes (proches l'une de 1,5, l'autre de 1,85).

Les valeurs approchées de  $S_B$  ont été obtenues en cinq étapes :

- Découper dans du carton 10 ellipses de demi petit axe  $b = 4$ cm et de demi grand axe de  $a$  cm.
- Faire rouler chacune sur un support rectiligne rugueux fixé au mur, sur lequel on marque une dizaine de positions de  $M$  pour la demi-arche à tracer, limitée à l'axe de symétrie.
- Décalquer la demi-arche obtenue sur du papier quadrillé (en  $\text{cm}^2$  et  $\text{mm}^2$ ).
- Vérifier qu'il n'y a pas eu de glissement, en mesurant le demi-périmètre de chaque ellipse (à l'aide d'un fil collant).
- Relever sur le papier quadrillé la mesure approchée de  $\frac{S_B}{s}$ .

L'expérience peut donc jouer un rôle en mathématique sans nuire à la rigueur.

---

(\*) A propos du problème 10254, que j'ai posé à la revue "American Mathematical Monthly" en octobre 1992, le directeur de la rubrique m'a appris que Richard Holzsager a démontré que  $2\sqrt{2}$  est *rigoureusement* le minimum absolu de  $r$ .

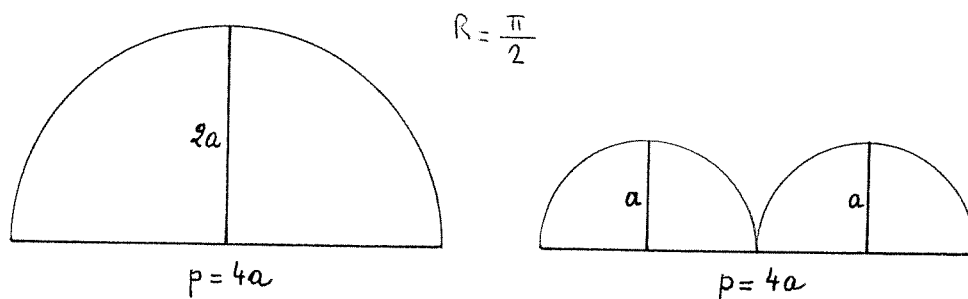
**3. Le rapport de longueurs  $R = \frac{L_M}{p}$**

On désigne par  $p$  le périmètre de l'ellipse génératrice et par  $L_M$  la longueur de l'arc périodique de la roulette, dont  $M$  est le point de contact initial.

– *Cas du cercle.* Soit  $r$  son rayon. Alors  $p = 2\pi r$  et  $L_M = 4 \cdot 2r$  d'après le théorème 1. Donc

$$R = \frac{4}{\pi}.$$

– *Cas d'une ellipse complètement aplatie ( $b = 0$ ).*



Soit une ellipse très mince, dont le point de contact initial est un sommet  $A$  du grand axe  $2a$ . A la limite ( $b = 0$ ) l'arc périodique est un demi-cercle de rayon  $2a$ . Alors  $L_A = 2\pi a$  et  $p = 4a$ .

Si le point de contact initial est un sommet  $B$  du petit axe, l'arc périodique est à la limite ( $b = 0$ ) formé par deux demi-cercles tangents de rayon  $a$ . Alors de nouveau  $L_B = 2\pi a$  et  $p = 4a$ . Donc dans les deux cas

$$R = \frac{\pi}{2}.$$

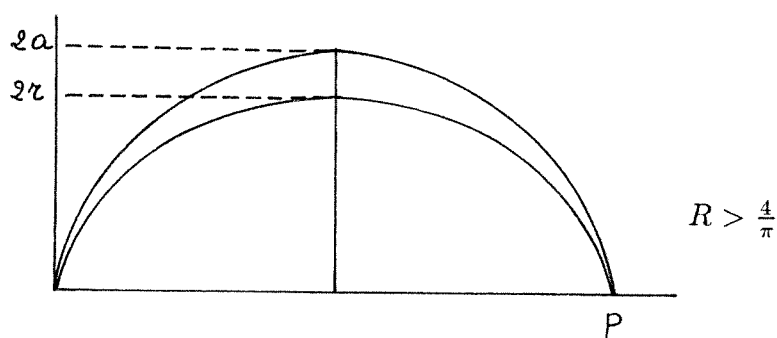
– *Cas de l'arc périodique convexe et symétrique.*

On a vu que pour l'ellipse complètement aplatie de périmètre  $p$  l'arc périodique est un demi-cercle de rayon  $\frac{p}{2}$ . Pour l'ellipse de même périmètre  $2a < \frac{p}{2}$ . L'arc de la cycloïde est donc extérieur à celui de la roulette avec  $A$  en point de contact initial, d'autant plus que les rayons de courbure aux sommets des arcs sont respectivement  $2r$  et  $2a$ . Donc

$$\frac{L_A}{p} = R < \frac{\pi}{2}.$$

Aplatissons un cercle en ellipse de grand axe  $2a$  sans changer son périmètre  $p$ . Alors  $2a > 2r$ . L'arc de la cycloïde est donc intérieur à celui de la roulette, d'autant plus que les rayons de courbure aux sommets sont respectivement  $2r$  et  $2a$ .

Donc



Ce qui précède nous amène à formuler l'hypothèse suivante :

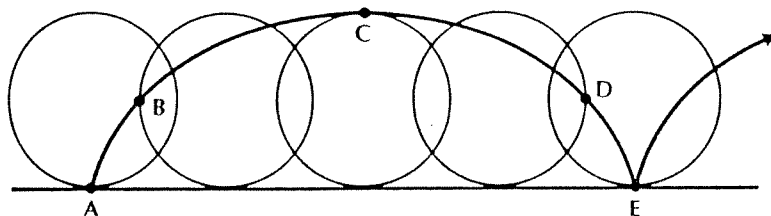
**Conjecture :** *Si l'arc périodique d'une roulette est convexe, alors*

$$(1) \quad \frac{4}{\pi} \leq R \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si l'arc périodique est concave (1) n'est pas toujours satisfait. Ainsi pour l'ellipse de demi-axes  $b = 4$  cm et  $a = 7,2$  cm, dont le point de contact initial est une extrémité  $B$  du petit axe, on trouve expérimentalement

$$\frac{L_B}{p} \simeq 1,22 < \frac{4}{\pi} \simeq 1,273.$$

(J'ai obtenu les valeurs approchées  $p \simeq 36,2$  cm et  $L_B \simeq 44,1$  cm en les mesurant sur des modèles en carton à l'aide d'un fil collant.) Pour d'autres arcs périodiques concaves (1) est satisfait. Ainsi pour l'ellipse de demi-axes  $b = 4$  cm et  $a = 8$  cm le rapport  $\frac{L_B}{p} \simeq 1,28$  est compris entre  $\frac{4}{\pi} \simeq 1,273$  et  $\frac{\pi}{2} \simeq 1,570$ .



## ENSEIGNEMENT AU COLLÈGE

Richard CABASSUT

Professeur au Lycée des Pontonniers - Strasbourg

La rentrée scolaire 1995 annonce une réforme de la sixième suite à l'expérimentation menée dans quelques collèges en 1994. Voici quelques informations, en espérant qu'elles pourront être le point de départ à vos réactions pour la rubrique courrier des lecteurs, comme cela a été le cas dans notre numéro 78 sur la liaison lycée-enseignement supérieur.

### LE NOUVEAU PROGRAMME DE COLLEGE.

Le projet de nouveau programme est paru au bulletin officiel n° 6 du 30 mars. Nous publions le point de vue de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques), sachant que la version définitive en tiendra peut-être compte. L'APMEP souligne la qualité du document produit. *"Les capacités attendues et les commentaires sont plus clairement exprimés et mieux ordonnés. L'ensemble du programme nous apparaît donc globalement mieux écrit, notamment la partie commentaire et le fait que cette partie soit directement incluse dans le programme, en face des capacités attendues. Le changement de termes, de compétences exigibles en capacités attendues, n'est pas innocent et doit-on y voir une volonté de prendre en compte certaines difficultés? Toutefois nous regrettons que ce "nouveau" programme de sixième ait été écrit sans être replacé dans la perspective des objectifs du collège et indépendamment de toute réécriture des programmes des autres classes de collège. D'autre part ce programme a-t-il suffisamment pris en compte les nouveaux programmes de l'école primaire applicables dès la rentrée 1997?"*

A l'APMEP certains souhaitent que les "nouveaux programmes" soient publiés avec des documents d'accompagnement substantiels, comme devrait l'être toute publication de programmes. D'autres craignent qu'un tel accompagnement fige les pratiques des enseignants en imposant des pratiques suggérées par les documents d'accompagnement.

En entrant dans une analyse plus détaillée du programme, on observe que, pour les travaux géométriques, le passage suivant, présent dans un premier projet, a disparu. *"C'est en sixième que les élèves commencent à se familiariser avec les propriétés d'une figure et c'est dans cette classe que se mettent en place un certain nombre d'éléments et de relations qui se développeront ultérieurement dans des situations de validation ou de preuve. Par contre on pourrait rester attentif aux contradictions et ne pas laisser s'installer des habitudes de confusion entre élément perçu et propriété donnée ou déduite, entre mesure effectuée et mesure calculée, entre valeur exacte et valeur approchée, et bien sûr entre conjecture et fait avéré."*

L'APMEP *"souhaite vivement que ce paragraphe, majeur dans la perspective des objectifs du collège et quant aux objectifs de formation en mathématiques du jeune élève de sixième, soit maintenu dans le cadre de ce programme"*.

Le paragraphe du programme sur le parallépipède rectangle fait l'objet de commentaires mais pas de capacités attendues. *"Serait-ce dans un souci d'alléger "malencontreusement", à notre avis, le programme de sixième ? Cela nous apparaît très dangereux car c'est le risque de voir disparaître complètement un enseignement de la géométrie dans l'espace, pourtant essentiel dans les classes. De plus l'enseignement de la géométrie dans l'espace est un domaine où les élèves en grande difficulté par ailleurs, arrivent à réussir et, notamment, à acquérir des images mentales. En outre c'est créer une rupture dans la progression des programmes du primaire et du collège où l'enseignement de la géométrie dans l'espace est présente à tous les niveaux. La sixième deviendrait ainsi la seule classe pour laquelle rien ne serait attendu. Nous proposons deux capacités attendues: représenter dans des situations simples un parallépipède rectangle en perspective cavalière ; dessiner un patron de parallépipède rectangle en vue de sa fabrication."*

Que ces quelques remarques n'effacent pas l'impression générale très positive à l'égard du nouveau programme.

#### LA REFORME EN SIXIEME

Après l'expérimentation conduite en 1994-95 en sixième dans quelques collèges, une réforme sera mise en place dans toutes les sixièmes en 1995. Elle se traduit par un horaire d'enseignement de l'élève en aucun cas inférieur à 22 h 30 ni supérieur à 24 h. Une grille horaire indicative prévoit 4h de mathématiques par semaine mais cette grille n'a aucun caractère impératif. Les moyens en horaire enseignement pour la classe sont de 26 h, ce qui permet aux équipes pédagogiques de disposer d'au moins 2h hebdomadaires pour organiser des enseignements en effectifs allégés ou recourir à d'autres formes d'enseignement. On peut envisager des regroupements des dotations horaires sur l'ensemble des sixièmes d'un établissement ou des aménagements de la durée et de la fréquence des séquences d'enseignement. Un dispositif de consolidation peut s'adresser aux élèves en difficulté à l'entrée en 6°. Il vise pour ces élèves une remise à niveau individualisée dans les apprentissages fondamentaux. Enfin l'horaire d'enseignement de l'élève est augmenté au minimum de 2 h d'études qui seront financées sur la base d'une dotation spécifique affectée aux établissements.

#### RESULTATS D'UNE ENQUETE SUR LES COLLEGES EXPERIMENTAUX

Un questionnaire mis au point par la commission premier cycle de l'APMEP a été adressé aux collèges expérimentaux afin d'engager une réflexion sur l'expérimentation en sixième. Les collèges expérimentaux sont les collèges qui ont expérimenté la réforme de sixième. Un compte-rendu de cette enquête est paru dans le bulletin grande vitesse de juin de l'APMEP. *"Il n'apparaît pas toujours un cadrage clair de l'expérimentation s'inscrivant dans un projet pédagogique global sur l'ensemble de l'établissement."*

*La sixième de consolidation :*

*La liberté est laissée aux établissements d'organiser des dispositifs de consolidation pour les élèves en grande difficulté, soit en créant une classe de consolidation, soit en organisant des dispositifs spécifiques en repérant sur toutes les classes les élèves en grande difficulté.*

*D'après les réponses obtenues à notre enquête une minorité des établissements a choisi de constituer une sixième de consolidation. Peu de réponses font état du devenir des élèves concernés par cette classe : vont-ils refaire une classe de sixième ou réintégrer une cinquième "normale" ? Et pourtant plusieurs réponses soulèvent le problème de l'écart qui se creuse entre une sixième normale et une sixième de consolidation. Mais il a été signalé plusieurs fois le refus de certains élèves à s'intégrer dans des classes pas comme les autres. La sixième de consolidation n'a-t-elle pas le défaut de mettre les élèves en grande difficulté dans une "filière". Et n'est-ce pas une des raisons qui ont poussé les établissements à choisir d'autres formes d'aide ou de consolidation." Dans d'autres établissements ou d'autres classes on fonctionne en classe entière sur une partie de l'horaire et en groupe de niveau, atelier ou module sur l'autre partie.*

*"Aussi actuellement le ministère généralise l'expérimentation à tous les établissements en laissant une large autonomie des établissements tant pour répondre à la diversité des situations que pour l'organisation de dispositifs de consolidation. Pourquoi pas ? Mais au vu de la grande diversité des situations dans les actuels collèges expérimentaux que va devenir le caractère national de l'Education en sixième ?"*

#### QUELQUES POINTS DE VUE SUR L'ENSEIGNEMENT EN COLLEGE.

On rend compte ici de points de vue exprimés lors de la rencontre APMEP sur les collèges à Paris, en mai 1995. On observe que l'image des mathématiques chez les élèves de seconde, c'est-à-dire au sortir du collège, est assez positive (enquête auprès des élèves de seconde de l'académie de Strasbourg). Les mathématiques sont la discipline préférée et la plus importante pour l'avenir. Cela est confirmé par le succès des compétitions comme "mathématiques sans frontières" ouverte aux élèves de 3<sup>ème</sup>. Un rapport sur l'orientation des élèves en fin de 3<sup>ème</sup> portant sur les académies de Reims, Rouen et Paris montre que l'hégémonie des mathématiques n'existe plus au collège (25 % des élèves de 3<sup>ème</sup> n'ont pas la moyenne en mathématiques et passent cependant en seconde. La réflexion sur l'enseignement évolue :

- conception commune avec un apprentissage basé sur la reproduction du modèle enseigné,
- conception de la pédagogie par objectifs,
- conception de construction du savoir avec l'importance de l'action de l'élève, du rôle de l'erreur et des situations de conflit.

Les difficultés de l'enseignement sont d'abord dans l'hétérogénéité des classes : ce phénomène a beaucoup plus d'étendue qu'auparavant (situation familiale, passé scolaire,...). L'inspection générale propose la classification suivante : élèves en détresse, élèves en échec, élèves en difficulté moyenne, lents, élèves adaptés au système scolaire. Cette hétérogénéité fait courir de gros risques à l'enseignement et donc aux élèves. Dans des situations trop difficiles le professeur se limite à sa mission d'intégration sociale, d'où le risque d'un manque d'ambition du professeur et le risque de s'en tenir à des exercices mécaniques pour les plus faibles. La tendance est à une vision globale de l'élève et de l'éducation où des activités autour de projets pluridisciplinaires sont proposées : attention aux décroissements. Pour chaque activité il faut une idée claire du pourquoi et du comment. L'élève est en difficulté s'il n'est pas capable de se projeter dans l'avenir. Il n'y a pas de réponses claires à l'hétérogénéité des élèves parce qu'il n'y a pas de réponse définitive et unique.



UNE NOUVELLE BROCHURE :  
DES SOLUTIONS POUR GÉRER LA CLASSE DE SECONDE (Suite)

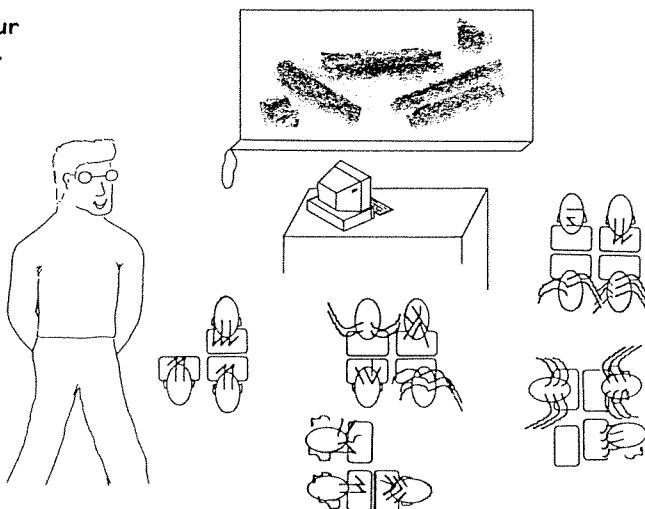
Par Jean DREYER, Suzy HAEGEL et Jean-Pierre RICHTON.

**Mots-clés:** Activité - Narration de recherche - Logiciels.  
Organiser - Exploiter.  
Transformer - Observer - Démontrer.

**Résumé:** Nous avons voulu rendre service au professeur de seconde, expérimenté ou débutant, qui souhaite disposer de séquences d'apprentissage, testées depuis quelques années déjà dans nos classes. en prévoyant la place de l'enseignement modulaire pour une meilleure articulation **classe entière** ("cours")/**modules/travaux dirigés**. Cette deuxième brochure vient compléter celle parue en 1993/94 de façon à couvrir le plus largement possible le programme de seconde.

**Sommaire:**

- VII. - STATISTIQUE:  
Utilisation et exploitation des touches statistiques d'une calculatrice
- VIII. - ÉQUATIONS DE DROITES:  
Exploitation graphique et narration de recherche.
- IX. - TRANSFORMONS A L'AIDE D'UNE ROTATION.  
(faire agir, narrer...)
- X. - HOMOTHÉTIE:  
Deux propositions d'activités pour "boucler" le chapitre homothétie.
- XI. - LOGICIELS POUR LES MATH.  
Le Géomètre  
Graphix  
Derive
- XII. - GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE:  
Plans et droites de l'espace  
Sections planes d'un cube  
Activité de "repli".



---

Prix sur place, envoi en Alsace ou dans un établissement scolaire public en France : 55 F,  
envoi à une adresse personnelle hors Alsace ou à l'étranger : 70 F.  
Le tome 1 est toujours disponible aux mêmes conditions que celui-ci.

## DANS NOS GROUPES I.R.E.M.

Christine UNDRAINER-BACH

Au nom du GROUPE MATHS-ÉCONOMIE

Le groupe de Recherche -Formation MATH-ECO travaille à l'IREM de Strasbourg depuis septembre 1993.

Composé d'une dizaine d'enseignants de Mathématiques et de Sciences Economiques et Sociales, il se propose d'explorer les aspects bidisciplinaires des programmes de Mathématiques des classes de **Première et Terminale ES**.

Le travail du groupe a consisté essentiellement en

- une lecture critique de documents chiffrés et/ou graphiques de toutes provenances.
- la production de Travaux Pratiques communs aux deux disciplines
- la production de documents à l'usage des professeurs sur la modélisation en Economie.
- la préparation et l'animation des stages TCA 124 et TCA 125 intitulés « Les mathématiques: un outil pour l'économie? » inscrits au PAF 94/95. (Ces stages ont réuni au mois d'Avril 95, 11 stagiaires à Mulhouse et 34 stagiaires à Strasbourg)

Pour l'année 95/96 le groupe poursuivra le travail dans ce sens par la publication d'une Brochure IREM et l'animation d'un stage ouvert aux enseignants des deux disciplines.

Le document publié ici avait été envoyé aux stagiaires avant le stage pour leur permettre de le tester avec leurs élèves. Il peut être utilisé en Travaux Pratiques, aussi bien par le professeur de Mathématiques que par celui de Sciences Economiques et Sociales, idéalement bien sûr par les deux conjointement. Il a déjà été testé dans des classes sous des configurations différentes. Il peut trouver sa place en classe de Première (impérativement après l'étude des dérivées) ou en début de Terminale.

Le groupe souhaite que d'autres collègues utilisent ce document et leur fassent part de leurs remarques, critiques et suggestions. ( Ecrire à Christine Undreiner-Bach Responsable du groupe Math-Eco Irem de Strasbourg 10 Rue du Général Zimmer 67085 Strasbourg Cedex)

**COUTS ET BENEFICES: ETUDE DE COURBES**



Durant une année une entreprise a observé les variations des coûts de production du chocolat. Pour une production de  $x$  tonnes, quand  $x$  est inférieur à 5 000, elle estime que le coût total (exprimé en Milliers de Francs (Kf)), en fonction de  $x$ , est:

$$C(x) = 0,000\ 001\ x^3 - 0,003\ x^2 + 10,48\ x + 27\ 000$$

**Première partie: LES COUTS**

**1) Etude de la fonction coût total C**

**1.a** Calculer  $C'(x)$ .

**1.b** Etudier le signe de  $C'(x)$  et en déduire le tableau de variations pour  $0 \leq x \leq 5\ 000$ .

**1.c** **Figure 1** (tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur de la feuille)

représenter graphiquement la fonction coût total dans un repère orthogonal tel que:

- sur l'axe des abscisses 5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un coût total de 10 000 Kf.

RAPPEL DE COURS	
coefficient directeur d'une sécante(AB) exemple: A( 2 000; C(2 000) ) et B( 2 000 + n; C(2 000 + n))	
	le coefficient directeur de (AB) est $\frac{C(2\ 000 + n) - C(2\ 000)}{n}$
coefficient directeur d'une tangente: exemple en A( 2 000; C(2 000) )	
	le coefficient directeur de la tangente est $C'(2000)$  c'est la définition du nombre dérivé de C en 2 000
Dans les ouvrages ou articles non mathématiques on trouve souvent le mot "pente". La pente d'une droite n'est définie que dans un repère orthonormal, le terme plus général est coefficient directeur.	

## 2) Exploitation de la figure 1

- 2.a** Estimer **graphiquement**  $C'(3\ 000)$  puis vérifier par le calcul.
- 2.b** Soit M le point de la courbe, d'abscisse  $x_M$ . Que représente le coefficient directeur de la droite (OM) ?
- 2.c** Estimer **graphiquement** pour quelle valeur de  $x$  le **coût moyen** de production d'une tonne de chocolat est minimum ?

## 3) Etude de la fonction coût moyen $C_M$

Pour une production de  $x$  tonnes de chocolat, le coût moyen par tonne est donné par :  $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

- 3.a** Calculer  $C_M(x)$  puis  $C'_M(x)$  (en Kf).
- 3.b** Vérifier que  $C'_M(3\ 000) = 0$ . Etudier le signe de  $C'_M(x)$  puis en déduire le tableau de variations pour  $0 < x \leq 5\ 000$ .
- 3.c Figure 2**

Représenter graphiquement la fonction coût moyen dans un repère orthogonal tel que:

- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un coût moyen de 2 Kf.

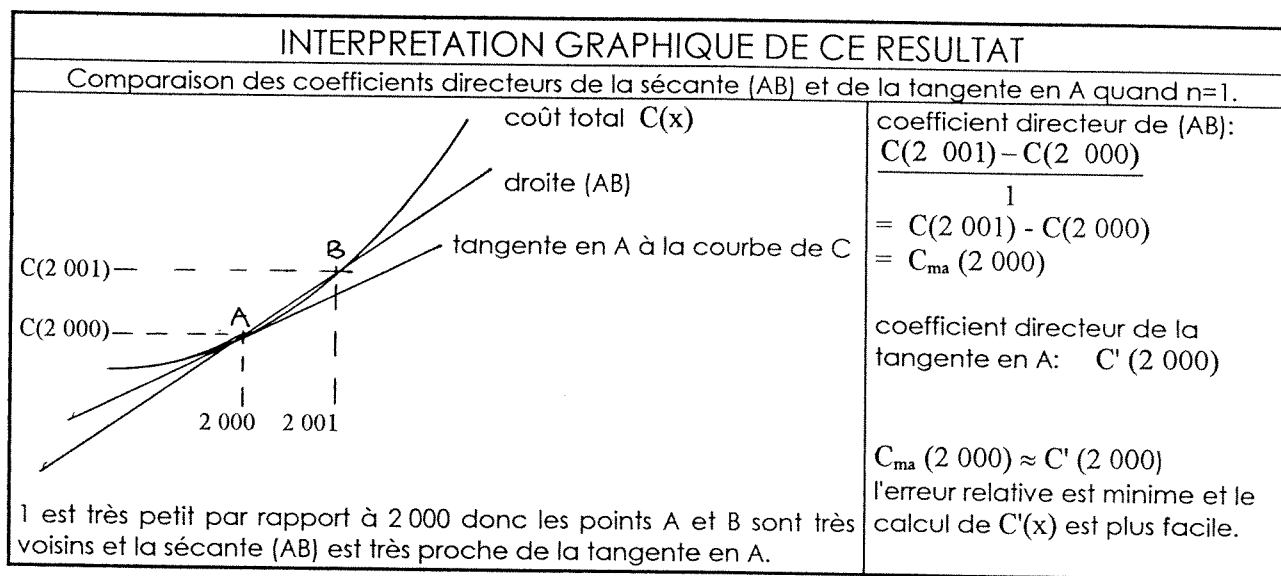
## 4) Etude de la fonction coût marginal $C_{ma}$

**L'entreprise a aussi besoin de connaître le coût de production d'une tonne supplémentaire de chocolat lorsqu'elle en a déjà produit  $x$  tonnes.**

Exemple: l'usine a produit 1 500 tonnes ( le coût est donc  $C(1\ 500)$ ). Que coûte la production de la 1 501 ième tonne ? . On le notera  $C_{ma}(1\ 500)$ .

**Ce coût s'appelle le coût marginal.** Soit  $C_{ma}(x)$  le coût de production de la  $(x+1)$  ième tonne de chocolat.

- 4.a** Calculer  $C_{ma}(2\ 000)$  et  $C_{ma}(3\ 000)$  à l'aide de la fonction  $C$  (coût total).
- 4.b** Exprimer  $C_{ma}(x)$  à l'aide de  $C(x+1)$  et  $C(x)$   
puis le mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en  $x$ .
- 4.c** Calculer  $C'(2\ 000)$  et recopier  $C'(3\ 000)$  calculé en **2.a**.
- 4.d** Comparer les résultats trouvés aux **4.a** et **4.c**. Comparer les résultats trouvés aux **1.a** et **4.b**.



Dans toute la suite on prendra pour coût marginal:  $C_{ma}(x) = C'(x)$ .

4.e Calculer  $C''(x)$ , la dérivée de  $C'(x)$ . Etudier le signe de  $C''(x)$  et en déduire le tableau de variations du coût marginal  $C'(x)$  pour  $0 \leq x \leq 5\ 000$ .

4.f Représenter la fonction  $C'(x)$  (c'est à dire aussi  $C_{ma}(x)$ ) sur la figure 2. Observer le graphique obtenu.

COMMENTAIRE DE LA FIGURE 2	
On constate que le coût moyen est minimum quand il est égal au coût marginal	
POINT DE VUE MATHEMATIQUE	POINT DE VUE ECONOMISTE
<p>D'après le tableau de variations de <math>C_M</math> on sait que le coût moyen passe par un minimum quand sa dérivée s'annule. On a:</p> $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} \text{ donc}$ $C'_M(x) = \frac{x C'(x) - C(x) \times 1}{x^2}, \quad x \neq 0$ $C'_M(x) = 0 \text{ quand } x C'(x) - C(x) = 0$ <p>c'est à dire quand <math>C'(x) = \frac{C(x)}{x} = C_M(x)</math> et comme <math>C'(x) = C_{ma}(x)</math>...</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Quand la courbe du coût marginal est en dessous de celle du coût moyen</b> cela signifie que le coût marginal est inférieur au coût moyen. C'est le cas tant que <math>x</math> est plus petit que 3 000 tonnes. Alors: le coût de production d'une tonne supplémentaire de chocolat est inférieur au coût de production de chacune des <math>x</math> premières tonnes le coût moyen des <math>(x+1)</math> premières tonnes sera donc plus faible (la dernière a coûté moins cher!) et ainsi <b>le coût moyen diminue quand la quantité produite augmente.</b></li> <li>• Par contre <b>quand la courbe du coût marginal est au dessus de celle du coût moyen</b> il se produit le phénomène opposé et <b>le coût moyen augmente quand la quantité produite augmente.</b></li> <li>• <b>Le coût moyen est minimum quand il est égal au coût marginal.</b></li> </ul>

**Deuxième partie: LES RECETTES ET BENEFICES**

Nous allons étudier recette et bénéfice dans deux cas particuliers:

Situation de concurrence parfaite  
Situation de monopole parfait

**Situation de concurrence parfaite**

**En situation de concurrence parfaite, le prix de vente n'est pas fixé par l'entreprise mais par les lois du marché. Le prix de vente d'une tonne de chocolat est 34,48 Kf.**

**5) Recette totale R**

Calculer la **recette totale  $R(x)$**  en fonction de  $x$  et tracer la représentation graphique de  $R$  sur la **figure 1**.

**6) Etude de la fonction bénéfice total B**

On appelle  **$B(x)$  le bénéfice total en fonction de  $x$** .

**6.a** Estimer graphiquement le bénéfice total pour  $x = 500$  et pour  $x = 2\ 000$ .

**6.b** Calculer  $B(x)$  en fonction de  $x$ .

**6.c** Calculer  $B'(x)$ . Etudier le signe de  $B'(x)$ . En déduire les variations de  $B(x)$  pour  $0 \leq x \leq 5\ 000$ .

**6.d Figure 3**

Représenter graphiquement la fonction bénéfice total dans un repère orthogonal tel que:

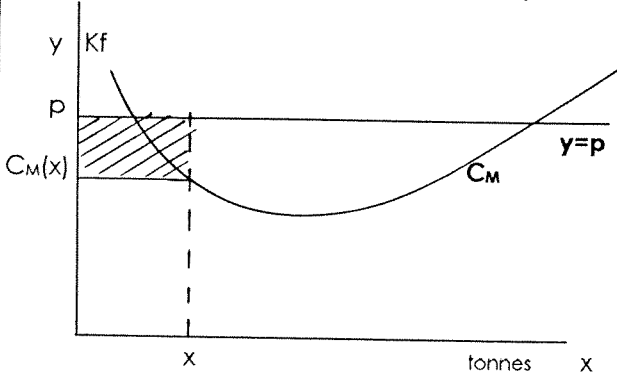
- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un bénéfice total de 10 000 Kf.

POINT DE VUE ECONOMISTE

le bénéfice total est représenté par la surface hachurée sur la figure ci-dessous

ON RETROUVE LE BENEFICE TOTAL SUR LA FIGURE 2

on s'intéresse à la courbe du coût moyen

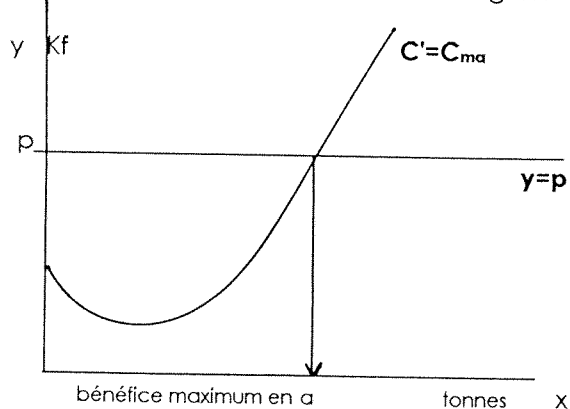


- le **coût moyen** pour une quantité produite  $x$ , c'est le **prix de revient unitaire**
- le **bénéfice moyen** pour une quantité  $x$  produite est la différence des ordonnées des deux points ayant la même abscisse et situés sur ces deux courbes
- le **bénéfice total** est égal au **bénéfice moyen multiplié par  $x$** . Il est donc représenté par le **rectangle hachuré**

- La figure ci-contre reprend une des courbes de la figure 2: la courbe de coût moyen  $C_M$
- on trace la droite représentant le prix de vente unitaire (constant)

le bénéfice est maximum quand le coût marginal est égal au prix de vente unitaire

on s'intéresse à la courbe du coût marginal



- quand  $C'(x)$ , le coût marginal pour une quantité produite  $x$ , est inférieur au prix de vente  $p(x)$ , chaque unité supplémentaire produite rapporte plus qu'elle ne coûte:  
**le bénéfice augmente**
- quand  $C'(x)$ , le coût marginal pour une quantité produite  $x$ , est supérieur au prix de vente  $p(x)$ , chaque unité supplémentaire produite coûte plus qu'elle ne rapporte:  
**le bénéfice diminue**
- donc quand le coût marginal est égal au prix de vente  
**le bénéfice est maximum**

- La figure ci-contre reprend une des courbes de la figure 2: la courbe de coût marginal  $C'$
- on trace la droite représentant le prix de vente unitaire (constant)

## Situation de monopole parfait

En situation de monopole parfait, l'entreprise peut fixer le prix de vente unitaire  $p$  (en Kf) mais celui-ci est lié à la production  $x$  (en tonnes). Dans cet exemple on a  $x = -200p + 7846$

### 7) Etude de la fonction recette totale R

7.a Exprimer  $p$  en fonction de  $x$ .

7.b Calculer la recette totale  $R(x)$ . C'est une fonction du second degré. Calculer  $R'(x)$

### 8) Etude de la fonction bénéfice total B

8.a Calculer  $B(x)$  en fonction de  $x$ .

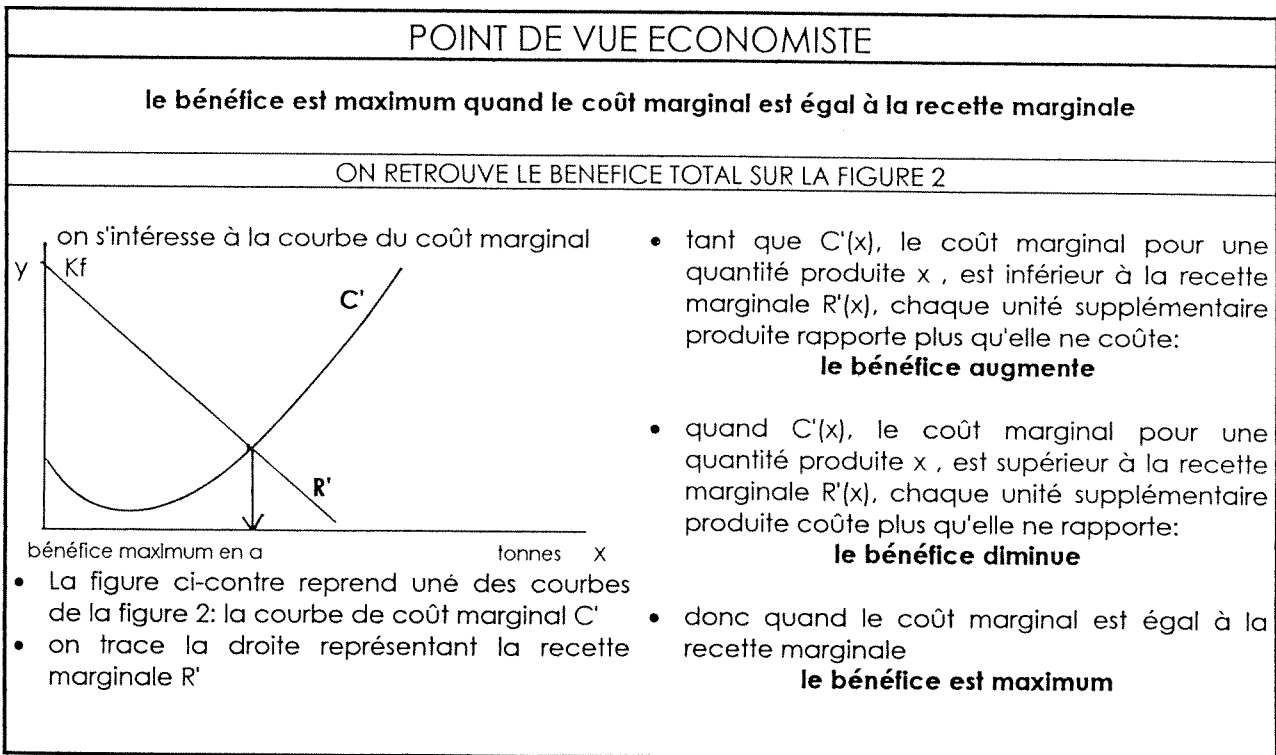
8.b Calculer  $B'(x)$ . Etudier le signe de  $B'(x)$ . En déduire les variations de  $B(x)$  pour  $0 \leq x \leq 5\,000$ .

Remarque: On sait que  $B(x) = R(x) - C(x)$ . Le maximum de  $B(x)$  est atteint quand  $B'(x) = 0$  donc quand  $R'(x) - C'(x) = 0$ .

### 8.c Figure 4

représenter graphiquement la fonction recette totale dans un repère orthogonal tel que:

- sur l'axe des abscisses 2,5 cm représentent une production de 1 000 tonnes de chocolat
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représente un bénéfice total de 2 000 Kf.

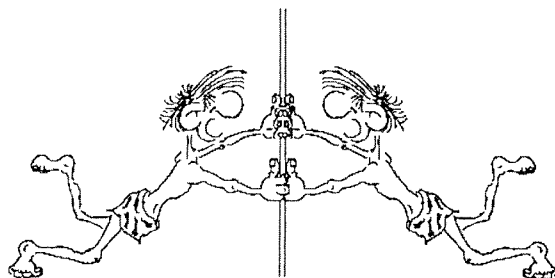




UNE NOUVELLE BROCHURE DE LA COMMISSION INTER-I.R.E.M.  
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE :

**APPORTS DE L'OUTIL INFORMATIQUE  
À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE**

Introduction.....	1
Nécessité et richesse d'une interaction entre concepteurs des outils informatiques, didacticiens et formateurs dans l'enseignement des mathématiques <i>par Dominique Guin</i> .....	5
Outil informatique, enseignement des mathématiques et formation des enseignants <i>par Michèle Artigue</i> .....	17
Morceaux choisis.....	33
Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème <i>par l'Irem de Rouen</i> .....	35
Les ordinateurs-ressources <i>par l'Irem de Lyon</i> .....	44
Introduction des coniques <i>par l'Irem d'Orléans</i> .....	58
Bien comprendre la notion de courbes paramétrées <i>par l'Irem d'Orléans</i> .....	65
A propos de dessiner l'espace <i>par l'Irem d'Orléans</i> .....	73
Enseigner la géométrie plane en intégrant l'outil informatique <i>par l'Irem de Montpellier</i> .....	79
Symétrie axiale en sixième <i>par l'équipe Cabri--Géomètre</i> .....	91
Un pavé <i>par l'Irem de Reims</i> .....	105
Bibliographie.....	109




---

Prix sur place, envoi en Alsace ou dans un établissement scolaire public en France : 55 F,  
envoi à une adresse personnelle hors Alsace ou à l'étranger : 70 F.

## RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1995

### ALLOCUTION PRONONCÉE PAR MONSIEUR M. MIGNOTTE, DIRECTEUR DE L'U.F.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE LE JOUR DE LA DISTRIBUTION DES PRIX

Le rallye mathématique a 22 ans : il est donc jeune et dynamique. Depuis sa naissance, les programmes des enseignements des classes de première et terminale ont sans doute été réformés une bonne douzaine de fois. Le rallye demeure. Il fait toujours appel à la réflexion et même j'oserais une formule provocatrice - il fait appel au plaisir de la réflexion. Le mot "provocatrice" de la phrase précédente aura pu vous surprendre ; pour expliquer pourquoi j'ai utilisé ce qualificatif, j'emploierai une méthode qui m'est chère, celle de conter une anecdote. Il s'agit du fait suivant que je peux désormais citer : la prescription décennale s'applique. J'étais responsable d'une équipe des sujets de mathématiques pour le bac C. J'ai tenu à ce que le problème principal présente un certain intérêt. Le sujet a été ensuite transmis à l'Inspection Générale. La réponse a été la suivante : "Il serait bon de supprimer la question III.4, car elle demande de la réflexion". Ayant droit de veto, j'ai maintenu cette question. Mais je ne contrôlais pas tout le processus, c'est le sujet de remplacement de septembre qui a été utilisé en juin.

Revenons à cette année, où nos collègues du secondaire nous tiennent des discours très inquiétants au sujet des nouvelles réformes de l'enseignement des mathématiques. D'une certaine manière, les changements qu'ils nous décrivent sont très fâcheux. Mais, pour conclure, je reste optimiste : réformes ou pas, ceux qui ont le goût de la réflexion sont résistants.

### PRESENTATION GÉNÉRALE

Les épreuves du 22<sup>ème</sup> Rallye Mathématique d'Alsace ont eu lieu le mercredi 22 Mars 1995 pour les classes de Première et le Mercredi 5 Avril 1995 pour les classes de Terminale. Cette année, 1371 élèves s'étaient inscrits, dont 510 en Terminale et 861 en Première. Pour la première fois, la participation présente une légère baisse (10% seulement) mais ceci s'explique par la diminution du nombre d'élèves en section scientifique, de l'ordre de 20% dans notre académie. La répartition géographique est la suivante : il y avait 464 candidats pour le Haut-Rhin, 815 pour le Bas-Rhin, et 92 candidats de Lycées Français à l'étranger.

En Terminale, 21 copies ont été primées. Le premier prix est attribué à un binôme ayant entièrement résolu le premier exercice et ayant fait environ la moitié des deux autres exercices. Cette copie se détachait nettement des autres. Les seconds prix récompensent des binômes ayant entièrement résolu le premier ou le troisième exercice et ayant fait la moitié d'un autre exercice. Enfin, les troisièmes prix sont décernés aux candidats ayant résolu un exercice dans sa totalité.

En Première, 34 copies ont été primées. Les premiers prix récompensent les candidats ayant convenablement résolu deux exercices et ayant donné un certain nombre d'éléments intéressants pour un troisième exercice. Les élèves ayant résolu correctement deux exercices se voient attribuer un deuxième prix. Quant au troisième prix, il est décerné aux élèves ayant entièrement résolu un exercice et fait plus de la moitié d'un autre exercice.

Nous tenons encore à remercier les chefs d'établissement pour la mise à disposition des locaux, ainsi que les collègues qui ont accepté de surveiller les épreuves et de s'occuper de l'organisation de celles-ci à l'intérieur de leur lycée.

**CLASSE DE PREMIERE**

**Exercice 1**

Il est bien connu que les Shaddocks pondent des oeufs. Pour pondre un oeuf, ils doivent compter jusqu'à 4. Ou plutôt, quand un Shaddock compte régulièrement, il pond toujours un oeuf à chaque multiple de 4.

Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller Shaddock de compter tous les oeufs entreposés dans la réserve du Ministère. Le Conseiller, exténué d'avoir tant compté et pondu, note 1995 oeufs sur son registre. Combien y avait-il d'oeufs initialement dans la réserve ?

**Solution**

Après avoir compté 4 anciens oeufs, il en pond un nouveau qu'il compte aussitôt.

Après cela, il lui suffira de compter 3 anciens oeufs de plus pour en pondre un nouveau, puis il faudra à chaque fois ajouter 3 anciens oeufs à chaque nouvel oeuf pour que le Shaddock en ponde un.

Si l'ancien nombre d'oeufs est de la forme  $4+3x+r$  avec  $r = 0, 1$  ou  $2$ , alors le Conseiller pondra  $1+x$  oeufs et il y en aura  $5+4x+r$ , avec  $r = 0 ; 1 ; 2$ .

$$1995 = 5 + 4x + r \Leftrightarrow 4x + r = 1990$$

$$\text{Or, } 1990 = 4 \times 497 + 2 \Rightarrow x = 497$$

$$\text{Il y avait } 4 + 3 \times 497 + 2 = 1497 \text{ oeufs}$$

Remarque : le nombre final d'oeufs étant de la forme  $5 + 4x + r$  avec  $r = 0 ; 1 ; 2$  il ne peut être un multiple de 4, et il ne suffit donc pas d'enlever un quart (avec 1996, il n'y aurait pas de solution).

**Exercice 2**

Le Docteur Jones a trouvé dans les caves de l'Institut de Recherche d'Ethnologie Més-Américaine, les statues de Glesecoatl et de Pluvitepeck.

Furieux, il se rend compte qu'elles ont été ramenées du temple de Tezcatlipoca avant qu'il ne puisse mesurer la distance entre leurs emplacements. Or cette distance doit être connue très précisément car elle permet de déterminer sur un autre site, l'emplacement du trésor de Moctuzema.

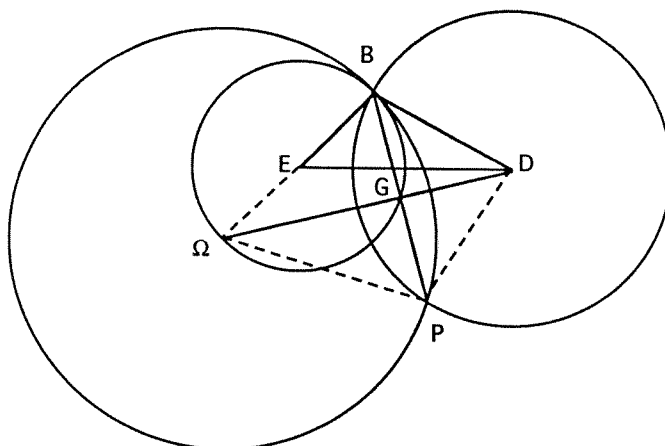
Il se rend sur place et constate qu'il reste les statues de Barbisclan, Didiextla et Emilomok. Il mesure les distances et trouve 15 m entre Barbisclan et Didiextla, 10 m entre Barbisclan et Emilomok, 20 m entre Emilomok et Didiextla.

Dans ses recherches précédentes, il a découvert les règles que suivent les emplacements de statues dans les temples mayas : Emilomok doit être équidistant de Barbisclan et de Glesecoatl ; Didiextla doit être équidistante de Barbisclan et de Pluvitepeck ; Glesecoatl doit être aligné avec Barbisclan et Pluvitepeck et à égale distance d'eux. Quelle était la distance entre les emplacements de Glesecoatl et de Pluvitepeck ?

**Solution**

$$BD = 15 ; BE = 10 ; DE = 20$$

$$BE = GE ; BD = PD ; G \text{ milieu de } [BP] \quad G \text{ et } P \text{ inconnus ?}$$



- G est sur le cercle  $C_1$  de centre E et de rayon 10
  - P est sur le cercle  $C_2$  de centre D et de rayon 15
  - G milieu de  $[BP] \Rightarrow \overline{BP} = 2\overline{BG}$  ; c'est à dire que P est l'image de G par l'homothétie h de centre B et de rapport 2.
- Or,  $G \in C_1$  donc  $P \in h(C_1)$

$h(C_1)$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $2 \times 10 = 20$  ( $\overline{B\Omega} = 2\overline{BE}$ )

$\Omega, G, D$  sont alignés car  $[BP]$  est une corde du cercle  $C_2$  et du cercle  $h(C_1)$

Donc  $(\Omega G) \perp (BP)$  et  $(DG) \perp (BP)$

- On peut calculer  $\cos \hat{B}$ , grâce à  $ED^2 = BE^2 + BD^2 - 2BE \times BD \times \cos \hat{B}$

$$\cos \hat{B} = \frac{10^2 + 15^2 - 20^2}{2 \times 10 \times 15} = -\frac{75}{300} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{D'autre part } \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sqrt{\frac{15}{4}}$$

$$\text{L'aire de } B\Omega D \text{ vaut } \frac{1}{2} \times B\Omega \times BD \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{150\sqrt{15}}{4} = \frac{75\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Cette aire vaut aussi } \frac{1}{2} \Omega D \times BG$$

Calculons  $\Omega D$  (l'angle  $\hat{E}$  est pris dans le triangle BED)

$$\cos \hat{E} = \frac{10^2 + 20^2 - 15^2}{2 \times 10 \times 20} = \frac{275}{400} = \frac{11}{16} \Leftrightarrow \cos \hat{B} \hat{E} D = \frac{11}{16}$$

$$\text{On a } \Omega \hat{E} D = 180^\circ - \hat{B} \hat{E} D \Rightarrow \cos \Omega \hat{E} D = -\frac{11}{16}$$

$$\text{Et } \Omega D^2 = \Omega E^2 + ED^2 - 2\Omega E \times ED \times \cos \Omega \hat{E} D = 10^2 + 20^2 + 2 \times 10 \times 20 \times \frac{11}{16} = 500 + 275 = 775 \text{ d'où } \Omega D = \sqrt{775} = 5\sqrt{31}.$$

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{2} \Omega D \times BG = \frac{75\sqrt{15}}{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{31} \times BG = 75\sqrt{15} \Leftrightarrow BG = \frac{15\sqrt{15}}{\sqrt{31}}$$

$$\text{et par conséquent } GP = \frac{15\sqrt{15}}{31} \approx 10,434.$$

### Exercice 3

On veut empiler des assiettes identiques sur des étagères superposées pouvant supporter chacune au maximum une pile de cinq assiettes. Pour des raisons d'équilibre, le nombre d'assiettes par étagère doit diminuer strictement avec la hauteur. Combien y a-t-il de possibilités de rangement suivant le nombre d'assiettes et le nombre d'étagères ?

### Solution

Il y a au maximum 5 assiettes sur l'étagère du bas puis 4, 3, 2, 1, 0 sur les étagères au-dessus. On aura au maximum 6 étagères et 15 assiettes.

On cherche donc les sommes  $a_1 + a_2 + \dots + a_p = A$  avec  $0 \leq A \leq 15$ ,  $1 \leq p \leq 6$  et  $5 \geq a_1 > a_2 > \dots > a_p \geq 0$  ( $a_i$  = nombre d'assiettes sur la  $i^{\text{ème}}$  étagère).

En écrivant toutes les sommes possibles, on obtient le tableau suivant, donnant le nombre de rangements dans chaque cas :

nbre d'assiettes A	1	2	3	4	5	6
0	1					
1	1	1				
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	2	1			
5	1	3	2			
6		2	3	1		
8		1	3	2		
9		1	3	2		
10			2	3	1	
11			1	2	1	
12			1	2	1	
13				1	1	
14				1	1	
5					1	1

Remarque : 0 assiette et 0 étagère donneraient un autre cas.

**CLASSE DE TERMINALE**

**Exercice 1**

Au royaume du Père Ubu, les années ne sont comptées qu'avec les nombres ubuesques. Les nombres ubuesques sont des nombres qui ne sont pas égaux à un nombre multiplié une ou plusieurs fois par lui-même.

La première année s'appelle Ubu 2, la deuxième Ubu 3, la troisième Ubu 5, la quatrième Ubu 6, la cinquième Ubu 7, la sixième Ubu 10, etc ...

Comment s'appellera la 199495<sup>ème</sup> année ?

**Solution**

On commence par remarquer que la 199495<sup>ème</sup> année aura un nom supérieur à 199495. Cherchons quel sera le rang de Ubu 200.000. Il faut donc retrancher 1 et tous les nombres de la forme  $n^p$  avec  $n \geq 2$  et  $p \geq 2$ .

- On constate que  $2^{18} = 262.144$  et  $2^{17} = 131.072$ , donc le plus grand exposant sera 17.
- Cherchons pour chaque exposant  $p \geq 2$ , combien il y a de nombres de la forme  $n^p$  avant 200.000. D'autre part, il ne faut retrancher le nombre 1 de la liste qu'une fois. on prendra donc :  $E(\sqrt[p]{200.000} - 1)$ .
- Les nombres de la forme  $n^p$  avec  $p = 4$ , sont également des nombres de la forme  $n^p$  avec  $p = 2$  ; il ne faut pas les retrancher une deuxième fois. De même pour  $p = 9$ ,  $p = 16$  et  $p = 8$ .
- Les nombres de la forme  $n^p$  avec  $p = 6$  sont à la fois des carrés et des cubes, donc si on retranche tous les carrés et tous les cubes, ces nombres ont été ôtés deux fois ; il faut donc les ajouter (de même pour  $p = 10$  ;  $14$  ;  $15$ ).
- Les nombres de la forme  $n^{12}$  sont des nombres de la forme  $n^6$ , ils auront donc été retranchés 2 fois et ajoutés 1 fois. On n'en tient plus compte.

p	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17
$\sqrt[p]{200.000} - 1$ .	446	57	10	6	4	2	2	1	1	1	1
Signe	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-

Il faut également retrancher 1 pour le nombre 1.

Le rang de Ubu 200.000 est donc :

$$200.000 - 1 - 446 - 57 - 10 + 6 - 4 + 2 - 2 - 1 + 1 + 1 - 1 = 199\,488$$

Il faut donc avancer de 7 rangs et la 199495<sup>ème</sup> année sera Ubu 200.007. En vérifiant qu'aucun des nombres de 200.001 à 200.007 n'est de la forme  $n^p$  avec  $2 \leq p \leq 17$

**Exercice 2**

*Le palais de Thram II, fils d'Ottokar IV*

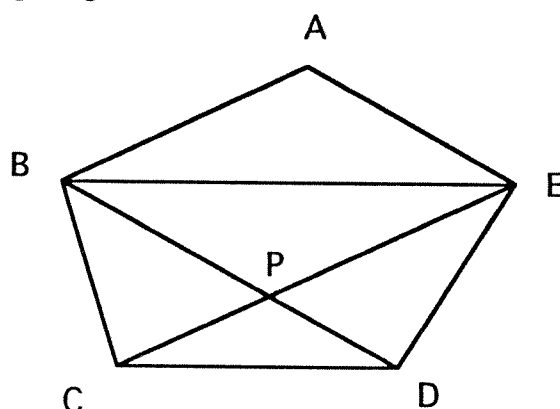
En Syldavie, le gouvernement est formé de cinq ministères. Pour travailler efficacement, le roi Thram II décide de faire construire un palais pentagonal. Un concours s'adressant à tous les architectes est ouvert.

Le palais doit être partagé par des cloisons intérieures reliant tous les sommets. Chaque ministère disposera d'une aile triangulaire ayant deux murs extérieurs. La partie commune à deux ministères sera consacrée aux relations interministérielles. Pour éviter les jalousies, Thram II souhaite que chaque ministère dispose d'une aile d'un hectare.

Montrer que tous les projets des architectes auront la même superficie totale.

**Solution**

Soit ABCDE un tel pentagone.



1) Les triangles BCD et CDE ayant même aire et une base [CD] commune, les hauteurs issues de B et de E respectivement sont les mêmes.

On en déduit que  $(BE) \parallel (CD)$ , et de même, chaque diagonale, sera parallèle à l'arête opposée.

2) Soit P le point d'intersection de  $(BD)$  et  $(EC)$ . Appelons  $x$  l'aire de  $DPC$  et on aura :  
aire de  $BPC = \text{aire de } EPD = 1 - x$ .

D'autre part, grâce aux parallélismes du 1), on sait que  $AEBP$  est un parallélogramme et donc :  
aire de  $EPB = \text{aire de } ABE = 1$ .

Les triangles  $PCD$  et  $PED$  ont la même hauteur  $h$  issue de  $D$  donc

$$\text{aire de } PCD = \frac{1}{2} PC \times h \quad \text{et} \quad \text{aire de } PDE = \frac{1}{2} PE \times h,$$

$$\text{par conséquent} \quad \frac{\text{aire de } PCD}{\text{aire de } PDE} = \frac{PC}{PE} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{PC}{PE}$$

Les triangles  $PCB$  et  $PEB$  ont la même hauteur  $h'$  issue de  $B$  donc

$$\text{aire de } PCB = \frac{1}{2} PC \times h' \quad \text{et} \quad \text{aire de } PBE = \frac{1}{2} PE \times h'$$

$$\text{par conséquent} \quad \frac{\text{aire de } PCB}{\text{aire de } PBE} = \frac{PC}{PE} \Rightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{PC}{PE}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1-x}{1} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow 1-2x+x^2 = x \Leftrightarrow x^2-3x+1 = 0 \quad \Delta = 5 ; \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

or,  $x \leq 1$ , donc  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

L'aire totale du pentagone est donc égale à :

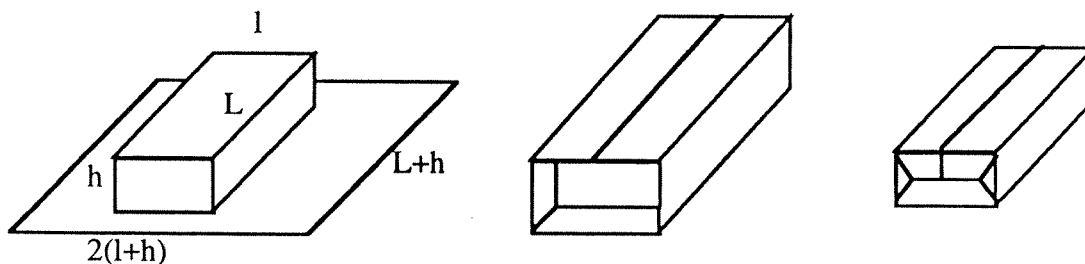
$$\text{aire de (ABE)} + \text{aire de (BCD)} + \text{aire de (BPE)} + \text{aire de (PDE)} = 1 + 1 + 1 + (1-x)$$

$$= 4 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

### Exercice 3

Pour le Nouvel An Chinois, la compagnie des **Marchands Associés de Thé** a décidé d'offrir à ses plus fidèles clients sa spécialité au jasmin enveloppée dans de la soie. Pour emballer une boîte de dimensions  $L, l, h$ , on dispose d'un rectangle de tissu de dimensions  $(L + h), 2(l + h)$ .

Calculer pour un volume  $V$  fixé du paquet, les dimensions  $L, l, h$ , qui leur feront utiliser le moins de soie possible.



### Solution

La surface de la soie sera  $S = 2(l + h)(L + h) = 2(Ll + Lh + lh + h^2)$ .

1) Fixons une valeur de  $h$ . Alors  $\frac{V}{h} = L \times l$  est constant et on aura  $L = \frac{V}{h} \times \frac{1}{l}$

$$\text{et } S = 2\left(\frac{V}{h} \times \frac{1}{l} \times l + \frac{V}{h} \times \frac{1}{l} \times h + lh + h^2\right) = 2\left(\frac{V}{h} + h^2 + hl + \frac{V}{l}\right).$$

Cherchons le minimum de  $f(l) = \frac{V}{h} + h^2 + hl + \frac{V}{l}$

$$f'(l) = 2\left(h - \frac{V}{l^2}\right) \Rightarrow f \text{ a un minimum pour } l = \sqrt{\frac{V}{h}}$$

$$\text{et on aura alors } L = \frac{V}{h} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{V}{h}}} = \sqrt{\frac{V}{h}} ; \text{ donc } L = l.$$



Conclusion : pour chaque valeur de  $h$ , la surface sera la plus petite possible lorsque  $L = l$ .

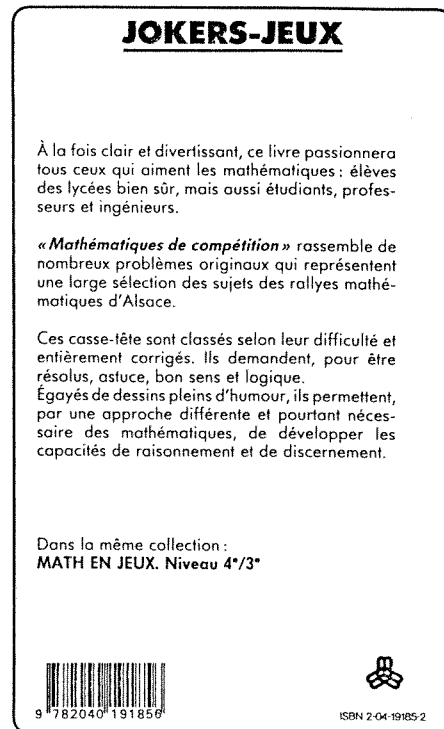
2) On se place dans le cas où  $L = l$  et on cherche la valeur de  $h$  qui rend  $S$  minimale.

$$S = 2(h+l)^2 \text{ et } l = \sqrt{\frac{V}{h}} \Rightarrow S = 2\left(h + \sqrt{\frac{V}{h}}\right)^2.$$

Pour que  $S$  soit minimale, il faut et il suffit que  $g(h) = h + \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{h}}$  soit minimale

or,  $g'(h) = 1 - \frac{\sqrt{V}}{2} \times \frac{1}{h^{3/2}}$        $g'(h) = 0 \Leftrightarrow h^{3/2} = \sqrt{\frac{V}{4}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$       et  $g$  présentera un minimum en cette valeur (il suffit de faire le tableau de variation).

Conclusion :  $S$  minimale pour  $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$  et  $L = l = \sqrt[3]{2V}$  c'est-à-dire lorsque  $L = l$  et  $h = \frac{1}{2} l$



Jean Lefort a rassemblé dans cet ouvrage les Rallyes Mathématiques d'Alsace avec les corrigés, de 1981 à 1989.  
En vente dans les bonnes librairies (environ 65 F).

# A PROPOS DES PENTAGONES DU RALLYE DE TERMINALE

Pierre RENFER

Professeur au Lycée Fustel de Coulanges - Strasbourg

Beaucoup de candidats étaient attirés par le pentagone régulier et pensaient qu'il était la seule solution. En fait, on peut montrer que toute solution est image d'un pentagone régulier par une transformation affine. On aura alors résolu le problème, puisque les transformations affines conservent les rapports d'aires.

Soit ABCDE un pentagone solution. On sait que chaque diagonale est parallèle à l'arête opposée. Le quadrilatère ABCD est donc un trapèze invariant par une symétrie oblique  $s$  (d'axe la droite joignant les milieux de [BC] et [AD], de direction (BC)). Cette symétrie  $s$  échange la droite (AE), passant par A et parallèle à (BD), et la droite (DE), passant par D et parallèle à (CA). Le point commun E de ces deux droites est donc un point fixe de  $s$  et le pentagone est invariant par  $s$ . De façon analogue, il existe encore quatre autres symétries conservant le pentagone.

Soit  $f$  la composée de deux symétries distinctes choisies parmi les cinq. C'est une application affine d'ordre 5, conservant le pentagone et son isobarycentre O. En prenant O comme origine, on peut considérer le plan affine comme un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  et  $f$  comme une application linéaire.

Alors le théorème de décomposition du noyau donne : Si :  $\omega = e^{2i\pi/5}$  ,

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f^5 - Id)$$

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - \omega Id) \oplus \text{Ker}(f - \bar{\omega} Id) \oplus \text{Ker}(f - \omega^2 Id) \oplus \text{Ker}(f - \bar{\omega}^2 Id)$$

Or, si l'un des sous-espace propre n'est pas réduit à {O}, son conjugué ne l'est pas non plus. Donc pour les dimensions des cinq sous-espaces de la somme directe, les seules possibilités sont :

- ou bien la dimension 2 pour le premier
- ou bien la dimension 1 pour le deuxième et le troisième
- ou bien la dimension 1 pour le quatrième et le cinquième.

Mais le premier cas est exclu car  $f$  est distinct de l'identité.

Dans le deuxième cas, si  $u$  désigne un générateur de  $\text{Ker}(f - \omega Id)$ , alors  $\bar{u}$  est un générateur de  $\text{Ker}(f - \bar{\omega} Id)$  et dans la base  $\mathcal{B} = \left(\frac{u + \bar{u}}{2}, \frac{u - \bar{u}}{2i}\right)$ , la matrice de  $f$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ -\sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathcal{O}$  une base orthonormée et  $\Phi$  l'application linéaire transformant  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{O}$ .

Alors  $g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$  est une rotation de matrice M dans la base  $\mathcal{O}$ .

Cette rotation conserve l'image  $\Phi(P)$  de notre pentagone P.

Le pentagone  $\Phi(P)$  est donc régulier !

Dans le troisième cas, on procède de même avec l'angle  $4\pi/5$  au lieu de  $2\pi/5$ .

## A VOS STYLOS

### PROBLÈME 32

#### Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par  $E$  la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications  $f$  de  $E$  dans  $E$  qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points  $x$  et  $y$  de  $E$  vérifiant  $d(x, y) = 1$ , on a aussi  $d(f(x), f(y)) = 1$ .

#### Indication

Si  $E$  est le plan ou l'espace,  $f$  est une isométrie.

#### Solution (P. Renfer)

##### CAS DE LA DIMENSION 1

On trouve l'application de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  la plus générale préservant la distance 1 en se donnant arbitrairement un réel  $y$  et deux suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , et en posant  $f(0) = y$ ,  $f(n) = y + \sum_{i=1}^n u_i$  si  $n > 0$  et  $f(n) = y + \sum_{i=1}^{-n} v_i$  si  $n < 0$ .

On trouve l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  la plus générale préservant la distance 1 en se donnant pour chaque  $x \in [0, 1[$  une application  $f_x$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  préservant la distance 1 et en posant, pour  $0 \leq x < 1$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n+x) = f_x(n)$ .

##### CAS DE LA DIMENSION 2

Une telle application est nécessairement une isométrie.

Soit  $f$  une telle application; nous noterons  $M'$  l'image par  $f$  d'un point  $M$ ; une partie  $F$  de  $E$  sera dite *rigide* si la restriction à  $F$  de toute application préservant la distance 1 est une isométrie; dans ce cas, tout sous-ensemble de  $F$  est lui aussi rigide et en particulier  $f$  conserve la distance de deux points quelconques de  $F$ .

Nous écrirons en abrégé t. e. u. pour triangle équilatéral de côté unité. Il est clair que les sommets d'un t. e. u. forment un ensemble rigide.

Nous appellerons *échelle de pas  $r$*  la figure formée d'une infinité de points répartis régulièrement sur une droite, la distance entre deux points consécutifs étant  $r$ .

#### 1) L'APPLICATION $f$ CONSERVE LA DISTANCE $\sqrt{3}$

Soient  $A$  et  $B$  deux points tels que  $AB = \sqrt{3}$ . Il existe  $C$  et  $D$  tels que  $ACD$  et  $BCD$  soient des t. e. u.; alors  $A'C'D'$  et  $B'C'D'$  en sont aussi, donc la distance  $A'B'$  vaut  $\sqrt{3}$  ou 0 (selon que  $A'$  et  $B'$  sont ou non du même côté de  $C'D'$ ); et deux points à distance  $\sqrt{3}$  ont toujours pour image deux points à distance  $\sqrt{3}$  ou 0. Les sommets d'un triangle de côtés  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ , 1 deviennent ceux d'un triangle de côtés  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ , 1, ou  $\sqrt{3}$ , 0, 1, ou 0, 0, 1; mais ces deux derniers cas sont exclus car de tels triangles n'existent pas. Les sommets d'un triangle de côtés  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ , 1

forment donc un ensemble rigide, et  $f$  préserve la distance  $\sqrt{3}$ . Plus précisément, la figure formée par les sommets de deux t. e. u. ayant un côté commun et situés de part et d'autre de ce côté commun est rigide.

2) LES ÉCHELLES DE PAS 1 ET LES ÉCHELLES DE PAS  $\sqrt{3}$  SONT RIGIDES

En juxtaposant des t. e. u., on voit que les sommets d'un réseau triangulaire d'arêtes unité forment un ensemble rigide; comme un tel réseau contient des échelles de pas 1 et  $\sqrt{3}$ , le résultat en découle.

3) L'APPLICATION  $f$  CONSERVE LES DISTANCES  $|a - b\sqrt{3}|$  ( $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ )

Soient, sur une même demi-droite d'origine  $A$ , deux demi-échelles  $e_1$  de pas 1 et  $e_{\sqrt{3}}$  de pas  $\sqrt{3}$ , issues de  $A$ . Pour tout point  $N$  de  $e_{\sqrt{3}}$  il existe un point  $M$  de  $e_1$  tel que  $MN \leq \frac{1}{2}$ ; il y a donc un point  $P$  tel que  $MP = PN = 1$  et il en résulte que  $M'N' \leq M'P' + P'N' = 1 + 1 = 2$ . Les demi-échelles images  $e'_1$  et  $e'_{\sqrt{3}}$ , issues de  $A'$ , possèdent ainsi, arbitrairement loin, des points  $M'$  et  $N'$  tels que  $M'N' \leq 2$ ; elles sont donc portées par la même demi-droite et ceci montre que l'union  $e_1 \cup e_{\sqrt{3}}$  est rigide. Les échelles complètes contenant  $e_1$  et  $e_{\sqrt{3}}$  ont aussi une union rigide, et les distances  $|a - b\sqrt{3}|$ , qui séparent deux points de cette union, sont conservées par  $f$ .

4) L'APPLICATION  $f$  EST CONTINUE

Étant donnés deux points  $M$  et  $N$ , soient  $I$  le milieu de  $[M, N]$  et  $P$  un point tel que  $MNP$  soit un triangle équilatéral. L'ensemble  $\mathcal{E} = \{|a - b\sqrt{3}| \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ , car  $\sqrt{3}$  est irrationnel. Il existe donc un point  $Q$  de  $[P, I]$  tel que la distance  $MQ$  soit dans  $\mathcal{E}$  (donc conservée par  $f$ ). Il suffit de remarquer que  $M'N' \leq M'Q' + Q'N' = MQ + QN \leq MP + PN = 2MN$  pour voir que  $f$  est 2-lipschitzienne, donc continue.

5) L'APPLICATION  $f$  PRÉSERVE TOUTES LES DISTANCES

Étant donnés deux points  $M$  et  $N$ , il existe puisque  $\mathcal{E}$  est dense une suite  $(M_n)$  de points telle que  $\lim_n M_n = M$  et  $M_n N \in \mathcal{E}$ . Comme  $f$  est continue,  $M'_n$  tend vers  $M'$  et  $M'N' = \lim M'_n N' = \lim M_n N = MN$ .

CAS DE LA DIMENSION 3

Dans ce cas encore,  $f$  doit être une isométrie. Appelons pour abrégier t. r. u. la figure (rigide) formée par les quatre sommets d'un tétraèdre régulier d'arête unité. Si  $ABCD$  est un t. r. u.,  $E$  le centre du triangle  $BCD$  et  $F$  le milieu de  $CD$ ,  $AE$  est une hauteur du triangle  $AFB$  qui vérifie  $FA = FB = 3FE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; il en résulte que la hauteur du tétraèdre vaut  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  et que l'angle dièdre  $\theta$  entre deux faces du tétraèdre vérifie  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ .

1) L'APPLICATION  $f$  CONSERVE LA DISTANCE  $p = \sqrt{\frac{8}{3}}$

Cette distance étant deux fois la hauteur du tétraèdre, l'argument est le même que pour la conservation de  $\sqrt{3}$  en dimension 2 : en considérant deux t. r. u. ayant une face commune, on voit que la distance  $p$  est transformée en elle-même ou zéro,

donc les sommets d'un triangle de côtés  $p, p$  et  $1$  deviennent ceux d'un triangle de côtés  $p, p, 1$ , ou  $p, 0, 1$ , ou  $0, 0, 1$ ; mais ces deux derniers cas sont impossibles. Donc la figure formée par deux t. r. u. ayant une face commune et situés de part et d'autre de cette face est rigide, et  $f$  conserve la distance  $p$ .

2) L'APPLICATION  $f$  CONSERVE LA DISTANCE  $q = \sqrt{\frac{32}{27}}$

Il résulte de ce qui précède que toute succession de t. r. u. ayant chacun une face commune avec le précédent forme une figure rigide. Un exemple de telle succession est formé des quatre t. r. u.  $ABC_0C_1, ABC_1C_2, ABC_2C_3$  et  $ABC_3C_4$ , tels que les cinq points  $C_i$  soient distincts. Ces cinq points sont sur le cercle de rayon  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$  à distance  $1$  de  $A$  et  $B$ ; chacun des arcs  $C_{i-1}C_i$  a pour mesure  $\theta$ ; celle de l'arc  $C_0C_5$  vaut  $4\theta$  et il en résulte que  $C_0C_5 = 2R|\sin 2\theta|$ . Partant de  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ , on obtient successivement  $\cos 2\theta = -\frac{7}{9}$ ,  $\sin^2 2\theta = \frac{32}{81}$  et  $C_0C_5 = \sqrt{\frac{32}{27}} = q$ . Cette distance est donc conservée par  $f$ .

3) LES ÉCHELLES DE PAS  $q$  ET LES ÉCHELLES DE PAS  $pq$  SONT RIGIDES

Nous avons vu que toute fonction conservant  $1$  conserve  $p$ . Par homothétie, il s'ensuit que toute fonction conservant une distance  $r$  conserve aussi  $rp$ ;  $f$  conserve donc  $p^2$  et  $p^3$ . Mais  $p^3 = 4q$ ; si  $A_0, A_1, A_2, A_4$  et  $A_4$  sont cinq points alignés, dans cet ordre, tels que  $A_{i-1}A_i = q$ , leurs images  $A'_i$  vérifient  $A'_{i-1}A'_i = q$  et  $A'_0A'_5 = 4q$  et sont donc aussi alignées. En conséquence, les échelles de pas  $q$  sont rigides. Ceci ayant lieu pour toute  $f$  préservant  $1$ , on en déduit par homothétie de rapport  $p$  que les échelles de pas  $pq$  sont également rigides.

4) L'APPLICATION  $f$  EST UNE ISOMÉTRIE

Le même argument qu'en dimension  $2$  montre que  $f$  conserve les distances  $|aq - bpq|$ , où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{Z}$ . L'irrationalité du rapport entre  $pq$  et  $q$  entraîne que les nombres de la forme  $aq - bpq$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ ; on en tire, toujours comme en dimension  $2$ , que  $f$  est continue, et enfin que  $f$  est une isométrie.

---

### PROBLÈME 33

**Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)**

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

**Indication**

Elle est décroissante.

PROBLÈME 34

Énoncé

Soient quatre plans parallèles. Montrer que l'on peut choisir un point dans chacun d'eux de façon à obtenir les quatre sommets d'un tétraèdre régulier; donner, en fonction des distances deux-à-deux des quatre plans, toutes les valeurs possibles pour la longueur des arêtes du tétraèdre.

---

PROBLÈME 35

Énoncé (proposé par D. Dumont, d'Antananarivo)

Pour  $n \geq 1$ , on définit des polynômes  $S_n$  de degré  $n-1$  et  $F_n$  de degré  $n$  par

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 & S_{n+1}(x) &= nS_n(x) + F_n(x) \\ F_1(x) &= x & F_{n+1}(x) &= nS_n(x) + xF_n(x); \end{aligned}$$

ils vérifient  $S_n(1) = F_n(1) = n!$ . Appelons  $s_{n,k}$  et  $f_{n,k}$  leurs coefficients, qui sont les entiers tels que

$$S_n(x) = s_{n,0} + s_{n,1}x + \dots + s_{n,n-1}x^{n-1} \quad \text{et} \quad F_n(x) = f_{n,0} + f_{n,1}x + \dots + f_{n,n}x^n.$$

Étant donné une permutation  $\sigma$  de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  et un élément  $p$  de  $[n]$ , on dira que  $p$  est un point fixe de  $\sigma$  si  $\sigma(p) = p$ ; que  $p$  est une succession de  $\sigma$  si  $p < n$  et  $\sigma(p+1) = \sigma(p) + 1$ ; que le maximum est en position  $p$  si  $\sigma(p) = n$ .

Par exemple, la permutation  $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 325649781 \end{pmatrix}$  possède 2 successions, 3 points fixes, et le maximum est en position 6.

Démontrer les cinq propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Le nombre de permutations de  $[n]$  possédant  $k$  successions est égal à  $s_{n,k}$ .*

PROPOSITION 2. — *Le nombre de permutations de  $[n]$  possédant  $k$  points fixes est égal à  $f_{n,k}$ .*

PROPOSITION 3. — *Soit  $p$  un entier tel que  $1 \leq p \leq n$ . Le nombre de permutations de  $[n+1]$  où le maximum est en position  $p$  et qui possèdent  $k$  successions est égal à  $s_{n,k}$ .*

PROPOSITION 4. — *Le nombre de permutations de  $[n+1]$  où le maximum est en dernière position et qui possèdent  $k$  successions est égal à  $f_{n,k}$ .*

PROPOSITION 5. — *Soit  $p$  un entier tel que  $1 \leq p \leq n$ . Le nombre de permutations de  $[n+1]$  où le maximum est en position  $p$  et qui possèdent  $k$  points fixes est égal à  $s_{n,k}$ .*