A PROPOS DES PENTAGONES DU RALLYE DE TERMINALE

Pierre RENFER

Professeur au Lycée Fustel de Coulanges - Strasbourg

Beaucoup de candidats étaient attirés par le pentagone régulier et pensaient qu'il était la seule solution. En fait, on peut montrer que toute solution est image d'un pentagone régulier par une transformation affine. On aura alors résolu le problème, puisque les transformations affines conservent les rapports d'aires.

Soit ABCDE un pentagone solution. On sait que chaque diagonale est parallèle à l'arête opposée. Le quadrilatère ABCD est donc un trapèze invariant par une symétrie oblique s (d'axe la droite joignant les milieux de [BC] et [AD], de direction (BC)).
Cette symétrie s échange la droite (AE), passant par A et parallèle à (BD), et la droite (DE), passant par D et parallèle à (CA). Le point commun E de ces deux droites est donc un point fixe de s et le pentagone est invariant par s. De façon analogue, il existe encore quatre autres symétries conservant le pentagone.

Soit f la composée de deux symétries distinctes choisies parmi les cinq. C'est une application affine d'ordre 5, conservant le pentagone et son isobarycentre O. En prenant O comme origine, on peut considérer le plan affine comme un espace vectoriel $\mathcal{E}$ et f comme une application linéaire.
Alors le théorème de décomposition du noyau donne : Si : $\omega = e^{2i\pi/5}$,

$\mathcal{E} = Ker(f^5 - Id)$

$\mathcal{E} = Ker(f - Id) \oplus Ker(f - \omega Id) \oplus Ker(f - \overline{\omega} Id) \oplus Ker(f - \omega^2 Id) \oplus Ker(f - \overline{\omega}^2 Id)$

Or, si l'un des sous-espace propre n'est pas réduit à {O}, son conjugué ne l'est pas non plus. Donc pour les dimensions des cinq sous-espaces de la somme directe, les seules possibilités sont :
- ou bien la dimension 2 pour le premier
- ou bien la dimension 1 pour le deuxième et le troisième
- ou bien la dimension 1 pour le quatrième et le cinquième.

Mais le premier cas est exclu car f est distinct de l'identité.

Dans le deuxième cas, si u désigne un générateur de $Ker(f - \omega Id)$, alors $\overline{u}$ est un générateur de $Ker(f - \overline{\omega} Id)$ et dans la base $\mathcal{B} = (\frac{u+\overline{u}}{2}, \frac{u-\overline{u}}{2i})$, la matrice de f s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ -\sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{O}$ une base orthonormée et Φ l'application linéaire transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{O}$.
Alors $g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ est une rotation de matrice M dans la base $\mathcal{O}$.
Cette rotation conserve l'image Φ(P) de notre pentagone P.
Le pentagone Φ(P) est donc régulier !

Dans le troisième cas, on procède de même avec l'angle $4\pi/5$ au lieu de $2\pi/5$.

© L'OUVERT 80 (1995)