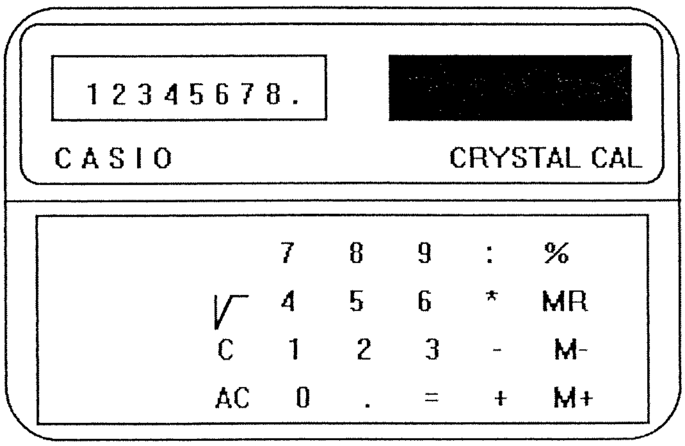
POUR LES VIRTUOSES DE LA CALCULETTE

Jean LEFORT

Vous avez sûrement dans votre entourage des personnes qui n'ont qu'une calculette 4-opérations. Soit parce qu'elles n'ont guère besoin de s'encombrer d'une calculatrice scientifique sophistiquée dans leurs calculs quotidients qui se limitent à quelques additions et multiplications (même pour calculer ses impôts cela suffit!), soit parce que leur enfant doit en avoir une à l'école ou au collège et qu'il a bien fallu qu'elles se penchent sur son utilisation pour ne pas perdre la face devant leur progéniture, soit parce qu'elles en ont reçu une en cadeau, cadeau d'entreprise ou cadeau d'amis. C'est ainsi que j'ai une très jolie calculette solaire extra-plate "Casio". Ce qu'il y a de formidable avec un tel engin c'est qu'il n'est point besoin de mettre des piles, le soleil se chargeant de faire les calculs, et si le temps est bouché ou s'il fait nuit, n'importe quelle source lumineuse convient également, même si, comble de malice, c'est une source électrique!

Ceci dit, il est de bon ton dans la communauté mathématique de faire la fine bouche devant une telle calculette; n'a-t-on pas beaucoup mieux? Calculatrice scientifique, calculatrice programmable, mini-ordinateur ou carrément P.C. ou Mac! On oublie qu'il y a une quinzaine d'années une simple calculette 4-opérations coûtait très cher et révolutionnait déjà les calculs. Il faut dire qu'une telle calculette facilitait infiniment les calculs habituels car elle ne fait pas 4 opérations mais 5 au minimum puisqu'il y a l'extraction de racine carrée quoiqu'il s'agisse ici d'une fonction et non d'une opération. Il faut y ajouter une ou deux mémoires et une touche de calcul des pourcentages. Voici à titre d'exemple comment se présente ma calculette solaire qui est joliment transparente :



Passons en revue les différentes touches et fonctions de cette calculette. Nous allons voir qu'un tel outil est beaucoup plus performant qu'on peut le croire à première vue et qu'en particulier il est capable d'exécuter des calculs dépassant largement les possibilités d'un collégien!

© L'OUVERT 76 (1994)

PREMIÈRES CONSTATATIONS

La calculette semble n'afficher que 8 chiffres. Effectivement, le calcul de 1/7 donne 0.1428571 et il n'y a pas de chiffre de garde comme on le constate en retranchant ce même nombre, autrement dit, la pression successive des touches donne bien 0 à

[1] [:] [7] [=] [-] [0] [.] [1] [4] [2] [8] [5] [7] [1] [=]

l'affichage. Cependant il peut s'afficher autre chose sur l'écran que ces 8 chiffres éventuellement précédés d'un signe moins. D'une part la pression d'une des touches opératoires (division, multiplication, soustraction, addition) est rappelée par le symbole correspondant à droite du nombre affiché, d'autre part un petit "K" apparaît à l'extrême gauche quand on appuie un nombre pair de fois de suite sur un symbole opératoire, enfin si on est amené à faire calculer un nombre trop grand, un petit "E" apparaît à gauche de l'écran. Ce symbole apparaît également lors d'une opération illicite (division par zéro par exemple), il signifie donc qu'une erreur a eu lieu.

La touche [C] efface le nombre affiché et seulement ce nombre, signe compris et non pas les autres symboles qui apparaissent à l'affichage (cette touche permet donc de corriger une erreur de frappe), tandis que la touche [AC] efface tout ce que contient la calculette.

La calculette dispose, en plus des mémoires de travail, d'une mémoire notée "M" que l'on peut atteindre à l'aide de l'une des trois touches [MR], [M-] ou [M+]. La touche [MR] permet de faire apparaître à l'affichage le contenu de la mémoire "M" tandis que la pression de la touche [M+] (respectivement [M-]) ajoute (respectivement retranche), le nombre affiché au contenu de "M".

LES TOUCHES OPÉRATOIRES

L'utilisation des touches opératoires (addition, soustraction, multiplication et division) est, dans un premier temps très naturel :

[x][*][y][=] donne x*y à l'affichage, où * représente l'une quelconque des quatre opérations (+,−,×,÷). Il faut toutefois noter que la simple pression des touches [x][×][=] conduit au calcul de x^2 qui s'affiche. On peut remplacer le symbole de la multiplication par celui de la division, mais on obtient $x/x = 1$ ce qui ne paraît pas très intéressant, mais on verra l'utilité un peu plus loin.

En pressant deux fois de suite sur la touche opératoire, le premier nombre entré reste en mémoire (la mémoire K dont le symbole est rappelé à l'affichage) et est composé avec le second à chaque pression de la touche [=] :

[x][*][*][y][=] donne y*x à l'affichage; (notez l'inversion des nombres). Une seconde pression sur [=] affiche le résultat de y*x*x puis une troisième donne y*x*x*x, etc. Si au lieu d'appuyer directement sur la touche [=], on tape sur [z][=] on obtient z*x à l'affichage, ce qui prouve que la mémoire K conserve également la touche opératoire. Enfin, et de la même façon que pour l'opération "simple", la succession

de [x][×][×][=] conduit au résultat x^2, puis par pression de [=] à x^3 et ainsi de suite, ce qui permet d'obtenir x^n. Ici, le remplacement de [×] par [÷] aboutit à 1, puis 1/x, puis $1/x^2$, etc. Voici quelques exemples :

[8,3][+][7,5] donne à l'affichage (15,8)
[7][×][=] donne à l'affichage (49)
[9][+][+][=] donne à l'affichage (18)
[9][+][+][=][=] donne à l'affichage (27)
[5][−][−][7][=] donne à l'affichage (2)
[10][−][−][3][=] donne à l'affichage (−7)
[10][−][−][3][=][=] donne à l'affichage (−17)
[10][−][−][3][=][7][=] donne à l'affichage (−3)
[3][×][×][=] donne à l'affichage (9)
[3][×][×][=][=] donne à l'affichage (27)
[3][×][×][=][=][=] donne à l'affichage (81)
[5][÷][÷][7][=] donne à l'affichage (1,4)
[5][÷][÷][=][=] donne à l'affichage (0,2)
[5][÷][÷][=][=][=] donne à l'affichage (0,04).

Le redoublement du signe opératoire permet l'usage de ce qu'on appelle le "facteur constant". Quand on veut effectuer un grand nombre d'opérations binaires où l'un des nombres est toujours le même, on le tape en premier puis on appuie deux fois sur la touche du signe opératoire et on entre ensuite les autres nombres séparés par la touche [=]; chaque pression de cette dernière fait apparaître à l'affichage le résultat cherché. Par exemple on dispose d'un certain nombre de prix hors taxe et on désire connaître les prix T.T.C. correspondant; voici la manipulation à effectuer :

[1,186][×][×][113][=][218][=][60][=][etc...

on obtient successivement à l'affichage après chaque pression de [=] :

(134,018) (258,548) (71,16).

Attention cependant pour les opérations de soustraction et de division. Si on veut soustraire un même nombre de plusieurs autres ou si on veut diviser par un même nombre plusieurs autres, la manipulation précédente reste la même, mais si au contraire on cherche à soustraire différents nombres d'un même, ou diviser un même nombre par différents autres, il faut utiliser l'opération inverse, c'est-à-dire l'addition ou la multiplication respectivement. Par exemple si on veut soustraire "3" successivement de "18", "15", "21", il faudra taper :

[−][3][+][+][18][=][15][=][21][=]

pour obtenir successivement (15), (12), (18) après chaque pression de [=].
De la même façon, si on veut diviser ces mêmes nombres par "3", il faudrait taper :

[1][÷][3][×][×][18][=][15][=][21][=]

ou bien :

[3][÷][÷][=][=][×][×][18][=][15][=][21][=]

mais on remarque immédiatement que les résultats ne sont pas exactement ceux auxquels on est en droit de s'attendre puisque l'affichage donne successivement

(5,9999994), (4,9999995), (6,9999993) au lieu des (6), (5) et (7) attendus! Il est facile de comprendre ce qui s'est passé. C'est tout simplement un problème d'arrondi que connaissait parfaitement les calculateurs qui ont travaillé avant l'ère des ordinateurs. Cela se traduisait par le conseil : "Il vaut mieux effectuer toutes les multiplications avant de faire les divisions". C'est l'occasion de renouer avec cette sage habitude qui montre qu'il est plus exact de calculer [x][×]][y][÷][z][=] que [x][÷][z][×][y][=] comme le prouve l'exemple [13][×][5][÷][7][=] qui donne (9,2857142) tandis que [13][÷][7][×][5][=] donne (9,285714). Il n'est pas difficile de comprendre que dans le deuxième cas l'erreur d'arrondi est multipliée par le ...multiplicateur! Dans la pratique, il y a une autre méthode qui est d'utiliser la mémoire accessible de la calculette; nous verrons cela dans un prochain paragraphe.

On remarquera qu'il est très difficile de gérer les signes négatifs. Seul le premier nombre introduit peut être négatif; il suffit de commencer par une pression sur la touche [−]. Pour les multiplications ou les divisions il vaut mieux calculer le signe du résultat et l'introduire éventuellement au début (ou simplement le garder dans sa tête). On se doute bien qu'une calculette n'est pas un instrument performant pour le calcul algébrique, mais seulement pour le calcul arithmétique. Le calcul des termes successifs d'une suite arithmétique ou géométrique est ainsi immédiat.

ÉTUDE DE LA TOUCHE $\boxed{\%}$

Cette touche semble avoir un lien avec le calcul des pourcentages. C'est effectivement le cas, mais d'une marque ou d'un type de calculatrice à l'autre, la fonction de cette touche varie du tout au tout. Il est alors possible de proposer une expérience scientifique, s'apparentant tout à fait à un T.P. de physique, en mettant à la disposition d'un groupe différents modèles de calculettes et en demandant à chaque individu le rôle de cette touche dans différentes configurations. Il est alors astucieux de partir de nombres simples comme 100 et 5 pour essayer de "deviner" la fonction donnée par la pression d'une séquence de touches comprenant "%". Voici, à titre d'exemples, une liste d'expériences et les hypothèses, au sens physique de ce mot, (ou conjecture) qui sont faites pour ma calculette solaire :

[100][+][5][%] donne à l'affichage (105,26315)
[100][+][5][%][-] donne à l'affichage (5,2631575)
[200][+][10][%] donne à l'affichage (222,22222)
[200][+][10][%][-] donne à l'affichage (22,222222)
[100][-][5][%] donne à l'affichage (1900)
[100][×][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][×][5][%][+] donne à l'affichage (105)
[100][÷][5][%] donne à l'affichage (2000)

[100][+][+][5][%] donne à l'affichage (E)
[200][+][+][5][%] donne à l'affichage (-5)
[200][+][+][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[300][+][+][5][%] donne à l'affichage (-2,5))
[300][+][+][5][%][%] donne à l'affichage (1,25)
[300][+][+][5][%][%][%] donne à l'affichage (-0,625)

[100][—][—][5][%] donne à l'affichage (-95)
[100][—][—][5][%][%] donne à l'affichage (-195)
[100][—][—][5][%][%][%] donne à l'affichage (-295)
[200][—][—][5][%] donne à l'affichage (-97,5)
[200][—][—][5][%][%] donne à l'affichage (-148,75)
[200][—][—][5][%][%][%] donne à l'affichage (-174,375)

[100][×][×][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][×][×][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[200][×][×][5][%] donne à l'affichage (10)
[200][×][×][5][%][%] donne à l'affichage (20)
[200][×][×][5][%][%][%] donne à l'affichage (40)

[100][÷][÷][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][÷][÷][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[200][÷][÷][5][%] donne à l'affichage (2,5)
[200][÷][÷][5][%][%] donne à l'affichage (1,25)
[200][÷][÷][5][%][%][%] donne à l'affichage (0,625)

[5][+][+][100][%] donne 105.26315 puis [200][%] donne 210.52631.
[5][-][-][100][%] donne 1900 puis [200][%] donne 3900.
[5][×][×][100][%] donne 5 puis [200][%] donne 10.
[5][÷][÷][100][%] donne 2000 puis [200][%] donne 4000.

En multipliant les expériences, voici les hypothèses auxquelles on peut aboutir :

[x][+][y][%] conduit à $\frac{100x}{100-y}$ puis avec [−] on obtient $\frac{xy}{100-y}$

[x][−][y][%] conduit à $\frac{x-y}{y}100$

[x][×][y][%] conduit à $\frac{xy}{100}$ puis avec [+] on obtient $x + \frac{xy}{100}$

[x][÷][y][%] conduit à $100\frac{x}{y}$

[x][+][+][y][%] conduit à $y\frac{100}{100-x}$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{100-x}\right)^2$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{100-x}\right)^3$

[x][−][−][y][%] conduit à $\frac{100}{x}(y-x)$ puis [%] donne $\frac{100}{x}\left(\frac{100}{x}(y-x)-x\right)$ et on itère sur y

[x][×][×][y][%] conduit à $y\frac{x}{100}$ puis [%] donne $y\left(\frac{x}{100}\right)^2$ etc...

[x][÷][÷][y][%] conduit à $y\frac{100}{x}$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{x}\right)^2$ etc...

Une autre façon de voir et qui permet une interprétation des résultats précédents, c'est de dire que :
[x][+][y][%] donne le nombre dont il faut ôter y% pour obtenir x.
[x][+][y][%][−] donne le résultat précédent moins x.
[x][×][y][%] donne les y% de x.
[x][×][y][%][+] donne x augmenté de y% (ce dont on a le plus souvent besoin).
[x][−][y][%] donne le rapport d'augmentation, en pourcentage, quand on passe de y à x.

La répétition du symbole opératoire entre x et y permet d'itérer le calcul, mais on notera que les rôles de x et de y sont échangés par rapport au cas où l'on utilise un seul symbole opératoire. Ceci est tout à fait naturel après ce que nous avons vu au paragraphe précédent à propos de l'utilisation du facteur constant.

LES TOUCHES RELATIVES À LA MÉMOIRE

Il y a trois touches permettant de travailler avec la mémoire notée "M". Ce sont les touches [M+], [M−], [MR]. Précisons-en le rôle : la première est équivalente à une pression de la touche [=] et à l'addition du résultats au contenu de la mémoire "M"; la seconde agit de même avec une soustraction au contenu de la mémoire "M". Dès que la mémoire contient un nombre non nul, un petit "M" est affiché en haut à gauche de l'écran. Enfin une pression de la dernière touche remplace l'affichage par le contenu de la mémoire.

L'utilisation de cette mémoire est indispensable dès que l'on veut effectuer une ligne de calculs algébriques. En effet la machine effectue les calculs dans l'ordre indiqué sans aucune priorité opératoire. Ainsi, si l'on veut calculer 3+4×5 et que l'on tape [3][+][4][×][5] on obtient (35) au lieu du (23) attendu et l'on remarque que la pression de la touche [×] fait apparaître le résultat intermédiaire (7). Il est à noter à ce propos que la pression d'une touche opératoire implique le calcul des opérations précédentes. Plusieurs solutions sont alors possibles, chacune d'elles montre un aspect du rôle des priorités opératoires : soit calculer dans l'ordre 4×5+3, soit mettre en mémoire le résultat intermédiaire en tapant [3][M+][4][×][5][M+][MR]. En fait il y a essentiellement deux types de calcul qui vont nécessiter le recours à la mémoire :

1) Une somme algébrique de produit ou de quotient. C'est le plus simple, puisqu'au lieu de presser sur la touche opératoire [+] ou [−] il faudra presser sur les touches [M+] ou [M−] respectivement. En voici un exemple :
$3 \times 4 - \frac{7}{5} - \frac{2\times 11}{9}$ s'obtient par [3][×][4][M+][7][÷][5][M−][2][×][11][÷][9][M−][MR]. On veillera à bien faire attention à taper [M+] ou [M−] en fonction du signe qui était devant le groupe que l'on vient de reproduire et non pas en fonction du signe qui apparaît alors dans la succession des calculs. Il y a là une difficulté inhérente

à toute programmation où il faut anticiper sur les calculs et la façon dont ils sont pris en compte par la machine.

2) Un produit ou un quotient de facteurs qui sont chacun des sommes algébriques. Il est évident qu'on peut se ramener au cas précédent, dans le seul cas du produit, en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ainsi : $(17+12-5)(13-6+11)$ peut s'écrire $17\times13-17\times6+17\times11+12\times13-12\times6+12\times11-5\times13+5\times6-5\times11$ mais cela est assez fastidieux même si c'est une excellente occasion de faire réviser la règle des signes! On préférera donc la méthode ci-après : [17][+][12][−][5][M+][13][−][6][+][11][×][MR][=]. Cependant cette méthode ne s'applique pas telle que à un produit de plus de deux facteurs et doit être adaptée dans le cas du quotient.

Réglons déjà le cas du produit de plusieurs facteurs. A la fin du calcul précédent, la mémoire contient toujours la valeur du premier facteur et faute de touche d'effacement de la seule mémoire, il est impossible d'en remplacer la valeur par le dernier résultat obtenu. Une astuce de procédure permet toutefois de parvenir à ses fins. Voyons-la sur un exemple. Soit à calculer le produit : $(17+12-5)(13-6+11)(7-4)(21-10-2)$. Effectuons la suite de manipulations ci-après : [17][+][12][−][5][M+][13][−][6][+][11][−][**1**][×][**MR**][**M+**][7][−] [4][−][**1**] [×][**MR**][**M+**][21][−][10][−][2][×][MR][=]. L'astuce de procédure qui apparaît en caractère gras consiste à diminuer d'une unité les facteurs autres que le premier et le dernier de façon qu'en ajoutant le résultat partiel au contenu de la mémoire on obtienne le résultat exact.

Voyons maintenant le cas du quotient. Soit à calculer : $\frac{(17+12-5)(13-6+11)(7-4)}{(21-10-2)(19+3)(8-4)}$.

Pour les produits, nous utilisons le principe qui vient d'être vu et les quotients seront transformés en produit en prenant les inverses, d'où la manipulation suivante (on y a pris alternativement un facteur du numérateur et un du dénominateur, mais ceci est arbitraire) :

[17][+][12][−][5][M+] [21][−][10][−][2][÷][÷][=][=][−][1][×][MR][M+]
[13][−][6][+][11][−][1][×][MR][M+] [19][+][3][÷][÷][=][=][−][1][×][MR][M+]
[7][−][4][−][1][×][MR][M+] [8][−][4][÷][÷][=][=][×][MR][=].

Malgré la complication, dans le cas général des calculs itérés, il est possible de trouver des formules où cela se passe relativement bien. Voici, par exemple, le cas du calcul de la racine carrée de 2 par la méthode de Babylone : on part d'une valeur approchée, puis on effectue plusieurs fois la séquence de touches suivantes : [M+][÷][÷][=][=][×][2][=][M+][MR][M−][÷][2][=]. L'analyse des astuces de calcul qui s'y trouvent est source d'enseignement.

ÉTUDE DE LA RACINE CARRÉE

La répétition d'une expérience telle que [2][$\sqrt{}$][×][=] montre que la touche [$\sqrt{}$] donne la racine carrée par défaut (à la précision de la calculette) du nombre affiché, que ce nombre corresponde à un calcul en cours ou soit le résultat d'un calcul. Dans le même temps, les opérations en cours sont annulées. Ainsi il est impossible de calculer directement $2\sqrt{3}$, il faut taper [3][$\sqrt{}$][×][2][=]. On remarque que l'ordre est inversé ce qui oblige à pas mal de virtuosité dès qu'interviennent plusieurs racines carrées dans un calcul. En voici un exemple : calculez

$$\Big(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\Big)^2.$$

Il est préférable de calculer

$$\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}-\frac{1}{2}\Big)^2$$

c'est-à-dire qu'il faut taper [5][$\sqrt{}$][+][3][÷][2][=][$\sqrt{}$][−][0,5][×][=]. On note l'inversion de certains calculs et surtout le remplacement de 1/2 par 0,5 qui évite le recours à la mémoire. La calculatrice affiche 1,2499998 ce qui repose une fois de plus le problème de la précision du calcul ou bien du besoin d'une démonstration exacte. C'est l'occasion de justifier du calcul algébrique qui autrement pourraît être gratuit.

CALCULER MALGRÉ LES ERREURS

Nous avons noté que lors d'un dépassement de capacité ou lors de l'exécution d'une opération interdite, l'affichage laisse apparaître un petit E en haut à gauche. La présence de ce symbole bloque complètement la machine qui affiche cependant un résultat :

0 lors d'une division par zéro;
$\sqrt{|a|}$ lors du calcul de la racine carrée d'un nombre a négatif;
x . 10^{-8} lors d'un dépassement supérieur de capacité, $x \geq 10^8$;
0 lors d'un dépassement inférieur de capacité, (mais sans la présence du E).

Pour débloquer la machine il n'y a qu'une solution : appuyer sur une des touches d'effacement. Mais si la pression de [AC] remet la machine à zéro faisant ainsi disparaître tous les calculs antérieurs, il n'en est pas de même de la pression de [C] qui a pour effet de ne faire disparaître que le symbole E ce qui permet parfois de continuer le calcul comme le montrent les exemples ci-après :

Soit à calculer les puissance successives de 2. On effectue la manipulation suivante : [2][×][×][=][=][...][=]. Chaque pression de la touche [=] donne la puissance suivante. A la 25^e pression on obtient 2^{26}=67 108 864 et la 26^e pression donne 2^{27} = ^{E} 1,342 177 2 ce qui doit se lire 1,342 177 2 × 10^8 ; on peut continuer la série en pressant [C][=] qui conduit à 2,684 354 4 résultat qu'il faut multiplier par 10^8 si on veut avoir une bonne approximation de 2^{28}. Et on peut continuer jusqu'à la prochaine apparition du symbole E qui une fois ôté permettra le calcul de nombre qu'il faudra multiplier par 10^{16}.

Soit à calculer les carrés successifs de 2. On effectue la manipulation suivante : [2][×][=][×][=][×][=][×][=][×][=]. Chaque pression des touches [×][=]

donne le carré suivant, c'est-à-dire qu'on obtient successivement 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, et enfin 2^{32} qui conduit à l'affichage de E 42, 949 672 qu'il faut donc lire 42, 949 672 $\times$ 10^8. Mais ensuite la pression des touches [C][×][=] donne un résultat qui doit se lire 1844, 674 $\times$ 10^{16} car la puissance de 10 qui n'apparaît pas doit aussi être élevée au carré. L'étape suivante conduira à 3 402 823,2 qu'il faut mutiplier par 10^{32} et enfin E 115 792, 05 qu'il faut évidemment lire 115 792, 05 $\times$ 10^{72} ($72 = 32 \times 2 + 8$) et qui correspond à 2^{256}, etc... Cette technique permet facilement de dépasser la limitation 10^{99} de bien des calculatrices. Mais cela demande aussi de jongler avec les puissances de 10, ce qui est un excellent exercice!

En combinant les deux méthodes précédentes, il est facile de calculer rapidement une puissance quelconque entière d'un nombre donné. Voici l'exemple de $(3{,}5)^{43}$; on pourra proposer des variantes par rapport à la méthode indiquée.
[3,5][×][=][×][=][×][=][M+][×][=][C][×][=][×][MR][=] [×][3,5][×][3,5][×][3,5][=] qui conduit à l'affichage 24 827 088 qu'il faut multiplier par 10^{16} comme un décompte soigneux des puissances de 10 qui interviennent permettra de le constater. Finalement, on peut écrire : $(3{,}5)^{43} = 2{,}482\,708\,8 \times 10^{16}$.

Reprenons l'exemple du calcul avec plusieurs radicaux. Calculons $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$:
[5][$\sqrt{}$][−][3][=][$\sqrt{}$][C][M+][−][5][$\sqrt{}$][+][3][=][$\sqrt{}$][MR][=] et on pourra vérifier par un calcul algébrique que le nombre obtenu vaut bien $\sqrt{2}$. Mais gageons que cette méthode qui consiste à passer par le calcul de la racine carrée d'un nombre négatif (sic!) n'est pas à mettre entre les mains de tous les collégiens déjà aux prises avec bien des difficultés dans le calcul des radicaux.

CALCULER LES FONCTIONS TRANSCENDANTES

Quand j'ai dit à des collègues que je connaissais une méthode pour calculer les fonctions transcendantes sur une calculette 4-opérations, tous m'ont dit : "c'est facile avec un développement limité". C'est la preuve qu'ils n'avaient jamais essayé. En effet, s'il est relativement aisé de calculer $\exp(x)$ à l'aide d'un développement en série entière en utilisant le schéma de Hörner, je défie quiquonque de calculer ainsi $\log_a(x)$. Mais même pour l'exponentielle, le calcul de $\exp(10)$ avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} nécessite d'aller jusqu'au terme en x^{16} ou x^{17} et surtout cet ordre du développement dépend du nombre auquel on applique l'exponentielle; jusqu'ou faut-il aller pour calculer avec une précision du même ordre $\exp(100)$? Quant au calcul de $\ln(x)$ pour x supérieur à 1 il demande beaucoup d'astuces et je ne parle pas de $\log_2(3)$ par exemple! Il est donc nécessaire d'utiliser une autre méthode basée sur les propriétés des fonctions étudiées. Voici ce que je propose pour les fonctions exponentielles et logarithmiques ainsi que pour la fonction cosinus.

Calcul de exp(x) :

L'algorithme de calcul repose sur le développement à l'ordre 1 de l'exponentielle, développement qui est une bonne approximation de la fonction pour une valeur petite de la variable. L'idée est donc de se ramener à une petite valeur de la variable par des extractions de racines carrées. On est toutefois limité par le fait que chaque racine carrée introduit une erreur d'arrondi et qu'il s'y ajoute l'erreur due au remplacement de la fonction par un développement limité à l'ordre 1. Voici l'algorithme :

Entrer x.
Diviser par 2048.
Ajouter 1.
Elever au carré 11 fois de suite.

On voit que l'on calcule $\left(1+\frac{x}{2048}\right)^{2048}$. Nous verrons plus loin la précision de cette approximation. Une vérification sur quelques nombres montre qu'elle est de l'ordre de 10^{-2} en valeur relative.

Calcul de ln(x) :

C'est la fonction réciproque de la précédente; il suffit donc de lire l'algorithme précédent à l'envers en remplaçant les fonctions par leur réciproque :

Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Multiplier par 2048.

On voit qu'on calcule $2048(x^{1/2048}-1)$. La précision s'améliore et est de l'ordre de 10^{-3}.

Calcul de $\mathbf{x^y}$:

On utilise toujours la même idée en remplaçant x^y par $\exp(y.\ln(x))$. Il nous faut donc calculer par la méthode précédente le logarithme naturel de x, le multiplier par y et prendre l'exponentielle du tout. Ceci nous donne l'algorithme suivant :

Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Multiplier par y.
Ajouter 1.
Elever au carré 11 fois de suite.

On voit que l'on calcule $\Big(y\big(x^{1/2048}-1\big)+1\Big)^{2048}$. On peut se demander si, en appliquant cette méthode au cas particulier $x=e$ on obtient le même résultat que par la première méthode? Ce n'est pas tout à fait exact puisque cela revient à calculer une approximation de $\ln(e)$ qui se trouve valoir environ $2048/2047,5$. Ainsi le cas $y=10$ conduit à 21 549 par cet algorithme alors que le premier nous donnait 21 497 et que la valeur exacte à une unité près est 22 026, ce qui confirme que l'erreur relative est de l'ordre de 2.10^{-2}.

Calcul de $\mathbf{\log_a(x)}$:

On utilise le fait que $\log_a(x)=\log_a(e)\times\ln(x)=\ln(x)/\ln(a)$ ce qui nous donne l'algorithme :

Entrer a.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Mettre en mémoire.
Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Diviser par le contenu de la mémoire.

Ici aussi l'application de cet algorithme au cas particulier $a = e$ ne donne pas tout à fait le même résultat. Il y a encore ce facteur voisin de 2047,5/2048 comme le montre l'exemple $x = 2$ qui conduit par la présente méthode à 0, 693 016 5 tandis qu'on obtient par l'algorithme antérieur 0, 693 043 2 alors qu'une valeur exacte à 10^{-8} près est 0, 693 147 18 ce qui confirme, en passant, que l'erreur est de l'ordre de 10^{-4}. On remarquera que les erreurs d'arrondi dans les calculs de racines carrées font que l'écart entre les deux méthodes n'est pas aussi considérable que le voudrait la théorie.

Calcul de cos(x) :

On utilise la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ qui nous permet, par une division de l'arc en 2^n parties, de nous ramener à un arc petit auquel on applique un développement limité à l'ordre 2. Ceci nous conduit à l'algorithme :

Entrer x en radians.
Diviser par 2^n.
Effectuer n fois de suite :
    Elever au carré.
    Multiplier par 2.
    Retrancher 1.

Dans la pratique, si x ne dépasse par $\pi/2$, on prend $n = 4$, mais on peut prendre une valeur supérieure si x est très grand. Mais attention, cette méthode ne donne pas le signe de $\cos(x)$ qu'il faut évaluer à part.

Tous ces exemples, on en conviendra, sont accessibles à des élèves de terminale scientifique mais il n'en est pas de même du calcul de la précision de l'approximation obtenue. J'utilise parfois, pour facilier le travail, des développements limités bien que l'on puisse s'en passer et se contenter, une fois obtenu le sens dans lequel évolue l'erreur à partir d'une valeur optimale, de tabuler la fonction (ou, ô ironie, utiliser une calculatrice scientifique graphique!).

ÉVALUATION DE L'ERREUR COMMISE

Approximations dans le calcul de exp(x) :

Nous allons comparer $\exp(x)$ avec $\left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2048}$ et pour cela nous allons étudier la fonction $f(x) = \left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2048} \exp(-x)$ ce qui nous permettra d'étudier l'erreur relative. La dérivation nous donne $f'(x) = \left(\frac{-x}{2048}\right)\left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2047} \exp(-x)$ ce qui nous conduit au tableau de variation suivant, valable au voisinage de 0 :

x		0		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	
f	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

On remarquera qu'il existe une autre valeur d'annulation de f' obtenue pour $x = -2048$ mais qu'elle ne présente pas beaucoup d'intérêt puisqu'on obtient alors 0 comme valeur approchée de $\exp(x)$ ce qui est excellent quand on la compare à la valeur exacte : 3,67 10^{-890}.

Sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < 0 < b$ l'erreur relative dans le calcul approché de l'exponentielle est maximum en l'une des bornes a ou b. Pour connaître un ordre de grandeur de cette erreur relative, effectuons un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\Big(-x + 2048\ln(1 + \frac{x}{2048})\Big) \\ &= \exp\Big(-x + 2^{11}(\frac{x}{2^{11}} - \frac{x^2}{2^{23}} + o(x^2))\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{x^2}{2^{12}} + o(x^2)\Big) = 1 - \frac{x^2}{2^{12}} + o(x^2). \end{aligned}$$

La valeur approchée obtenue l'est par défaut et l'erreur relative est de l'ordre de $x^2/4096$. Elle va croître assez vite avec x et vaut $0,1\%$ pour $x = \pm 2$. On ne peut améliorer le calcul qu'en utilisant quelques étapes de plus au risque de perdre le gain espéré en précision dans les arrondis des racines carrées. On sait que exp(10) vaut environ 22 026,465 79... et le calcul de $(1 + \frac{x}{2^n})^{2^n}$ avec $n = 11$ donne 21 496,953 46... tandis qu'avec $n = 15$ il conduit à 21 993,003 75... ce qui montre que l'erreur relative passe de 0,24 % à 0,15% .

Approximations dans le calcul de ln(x) :

Nous allons comparer $\ln(x)$ avec $2048(x^{1/2048} - 1)$ et pour cela nous étudierons l'erreur absolue : $f(x) = \ln(x) - 2048(x^{1/2048} - 1)$. Le calcul de $f'(x)$ donne $\frac{1 - x^{1/2048}}{x}$ qui est manifestement du signe de $(1 - x)$ pour x positif (ce qui correspond à l'ensemble de définition de f). Nous avons alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$		$-$	
f	$\Vert -\infty$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

Ceci prouve que l'approximation obtenue l'est toujours par excès et que sur l'intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < 1 < b$ l'erreur est maximum en l'une des deux bornes a ou b. Pour mieux cerner l'erreur évaluons, à l'aide d'un développement limité au voisinage de 1 l'erreur relative due à la méthode et qui vaut : $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 - \frac{2048(x^{1/2048}-1)}{\ln x}$. Dans cette optique nous poserons : $x^{1/2048} = 1 + h = \exp(\frac{\ln x}{2048})$ ce qui nous conduit à $h \sim \frac{\ln x}{2048}$ et par conséquent nous obtenons : $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 - \frac{h}{\ln(1+h)} \sim -h/2 \sim \frac{-\ln x}{4096}$. Nous avons donc une précision de l'ordre de 0,1% dans l'intervalle $[\exp(-4); \exp(4)]$ ce qui correspond sensiblement à $[0,02\ ;\ 55]$.

Approximations dans le calcul de x^y :

Ne cherchons pas ici un calcul rigoureux mais utilisons plutôt les calculs précédents pour évaluer l'erreur relative due à la méthode et qui ne tient donc pas compte des erreurs d'arrondi dans le calcul des racines carrées. Notons pour simplifier $L(x)$ l'approximation de $\ln(x)$ et $E(x)$ l'approximation de $\exp(x)$ que nous donnent les algorithmes proposés. Nous sommes amenés à calculer $E[y\ln(x)]$ et à le comparer à $\exp[y\ln(x)]$. Or, nous avons :

$$\frac{E[yL(x)] - \exp[y\ln(x)]}{\exp[y\ln(x)]} = \frac{E[yL(x)] - \exp[yL(x)]}{\exp[y\ln(x)]} + \frac{\exp[yL(x)] - \exp[y\ln(x)]}{\exp[y\ln(x)]}.$$

Le premier membre représente l'erreur relative sur le calcul de x^y. Le premier terme du deuxième membre est l'erreur relative sur $\exp[yL(x)]$ pourvu qu'on identifie cette expression avec $\exp[y\ln(x)]$ ce qui est tout à fait licite d'après les résultats des paragraphes précédents. Par suite ce premier terme vaut sensiblement $\frac{[y\ln(x)]^2}{4096}$. Le deuxième terme de ce même membre s'écrit aussi $\frac{\exp[yL(x)]}{\exp[y\ln(x)]} - 1$ soit $\exp[y(L(x) - \ln(x))] - 1$; il est donc équivalent à $[y(L(x) - \ln(x))]$. Mais nous avons vu que $\frac{L(x)-\ln(x)}{\ln(x)} \sim -\ln(x)/4096$ et par suite nous pouvons remplacer le deuxième terme par $\frac{-y(\ln x)^2}{4096}$ ce qui nous conduit finalement à évaluer l'erreur relative sur le calcul de x^y à environ $\frac{(y^2-y)(\ln x)^2}{4096}$. Etant données les valeurs usuelles de x et de y il n'est guère possible de négliger y^2 ou y l'un devant l'autre.

Approximations dans le calcul de $\log_a(x)$:

Sachant que l'erreur relative d'un quotient est la somme des erreurs relatives du numérateur et du dénominateur, en remarquant que $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$ l'erreur relative vaudra $\frac{\ln x + \ln a}{4096}$ ce qui dans le cas particulier assez courant où $a = 10$ permet d'avoir une précision de l'ordre de 0,1 % dans l'intervalle [0,2 ; 5,5]. Or on peut toujours se ramener à cet intervalle en divisant par une puissance convenable de 10 ou de 2 dont les logarithmes sont très faciles à calculer.

Approximations dans le calcul de cos(x) :

En posant $f(\theta) = 2\theta^2 - 1$, il nous faut calculer $g(x) = ffff(x/16)$ et comparer ce résultat avec $\cos(x)$. Pour cela nous allons effectuer un développement limité de g

à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$$f(\frac{x}{16}) = \frac{x^2}{2^7} - 1$$

$$f(f(\frac{x}{16})) = 2(\frac{x^2}{2^7} - 1)^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2^5} + \frac{x^4}{2^{13}}$$

$$f(f(f(\frac{x}{16}))) = 2(1 - \frac{x^2}{2^5} + \frac{x^4}{2^{13}})^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2^3} + \frac{5}{2^{11}}x^4 + o(x^5)$$

$$fofofof(\frac{x}{16}) = 2(1 - \frac{x^2}{2^3} + \frac{5}{2^{11}}x^4 + o(x^5))^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{21}{2^9}x^4 + o(x^5)$$

On remarquera qu'un calcul analogue avec $f^{(5)}(x/32)$ conduit à $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{85}{2^{11}}x^4 + o(x^5)$. L'écart avec $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ est équivalent à $x^4/1536$ où $1536{=}3.2^9$; en travaillant avec 5 étapes, nous aurions trouvé $x^4/6144$ où $6144{=}3.2^{11}$ et on généralise facilement, $\cos x$ étant toujours le plus grand. Comme on peut toujours ramener x dans l'intervalle $[0; \pi/2]$ l'erreur maximum absolue est de l'ordre de $\frac{(\pi/2)^4}{1536}$ soit environ 0,004. Dans la pratique, à cause des erreurs d'arrondi et de la présence de termes d'ordre plus élevé qui viennent en déduction, l'erreur ne dépasse pas 0,0025.

CONCLUSION

Je pense avoir illustré le fait qu'il faut parfois peu de choses pour faire des mathématiques intéressantes. Il n'est donc nul besoin de vouloir dépasser le programme, de vouloir traiter avec les "meilleurs élèves" des chapitres qui ne seront vus que l'année suivante au risque de déflorer un sujet et d'entraîner une certaine lassitude de la part d'élèves qui croiront déjà tout savoir. Il y a dans ce texte de quoi alimenter bien des exercices depuis la troisième jusqu'à la terminale et même un peu au delà qui entraîneront les élèves à une réflexion salutaire sur l'approximation (les maths, ce n'est pas que juste ou faux) sur la notation et les priorités opératoires, sur le fait que certaines machines, soi-disant élémentaires, permettent de faire mieux que des machines plus sophistiquées. Une telle réflexion, même si elle n'est qu'amorcée, fait partie d'une réelle éducation mathématique qui ne se limite pas à l'enseignement de la discipline aussi complet soit-il du point de vue technique. N'est-ce pas le rêve de tout professeur? C'est le mien en tout cas.