A VOS STYLOS

PROBLÈME 26

Énoncé (proposé par R. Iss, d'Embrun)

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.

Solution (adaptée de celle de l'auteur). Les deux questions sont indépendantes.

Première question
Le résultat est $r = n + p + 1$. Il peut se vérifier par récurrence sur n (en le démontrant non seulement pour des polygones, mais, plus généralement, pour des lignes polygonales non nécessairement fermées) ou directement, en appliquant la formule d'Euler.

Deuxième question
Le nombre de côtés qui coupent un côté donné est au maximum $n - 3$ (les trois qui ne peuvent pas le couper étant lui-même et les deux côtés qui ont avec lui un sommet commun). Nous dirons qu'un côté est **maximal** s'il est coupé par $n - 3$ autres côtés.

a) Cas où n est impair : posons $n = 2k + 1$. En joignant de k en k les n sommets placés sur le cercle, on obtient, puisque n et k sont premiers entre eux, un polygone étoilé dont chaque côté est maximal. Ceci donne pour p la plus grande valeur possible, $p = \frac{1}{2}n(n-3)$.

b) Cas où n est pair. Remarquons d'abord que, si un côté AB est maximal, les deux côtés consécutifs à AB sont placés de part et d'autre de la droite AB et chacun des deux arcs limités par A et B porte la moitié des $n - 2$ sommets autres que A et B (car ces $n - 2$ sommets, pris successivement sur le polygone, doivent être alternativement de part et d'autre de AB). Il en résulte que **si AB et CD sont deux côtés maximaux distincts, leurs extrémités A et C (ou A et D) sont deux sommets consécutifs sur le cercle** (en d'autres termes, si les n sommets sont régulièrement espacés sur le cercle, AB et CD sont deux diamètres faisant entre eux un angle de $2\pi/n$).

En effet, les points A, B, C et D divisent le cercle en quatre arcs $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{CB}, \overset{\frown}{BD}$ et $\overset{\frown}{DA}$. Si un sommet E se trouve sur AC par exemple, les seuls trajets possibles à partir de E pour le polygone sont $EF, EBAF, EDCF, EBADCF$ ou $EDCBAF$, F étant un point de $\widehat{BD}$ (les autres trajets sont interdits par la double contrainte que chaque côté non consécutif à un côté maximal le rencontre et que les deux côtés consécutifs à un côté maximal soient de part et d'autre); donc le premier sommet après E, autre que A, B, C ou D est sur l'arc $\widehat{BD}$. De proche en proche, tous les sommets sont sur $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$, et les points A et D sont consécutifs sur le cercle.

En conséquence, le polygone a au plus deux côtés maximaux, puisque trois droites du plan ne peuvent faire deux à deux des angles de $2\pi/n$ (cet argument est en défaut pour $n = 6$, mais le résultat subsiste : cela se vérifie par inspection directe). Tous les côtés, sauf peut-être deux, rencontrent au plus $n - 4$ autres côtés. Ceci établit la majoration

$$p \leq \frac{1}{2}[2(n-3) + (n-2)(n-4)] = \frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2).$$

Cette valeur est le maximum cherché, puisqu'elle est atteinte pour le polygone obtenu de la façon suivante : numérotons consécutivement les n sommets sur le cercle et joignons chaque sommet i à $i + \frac{n}{2} + 1$ et $i + \frac{n}{2} - 1$ (modulo n). Ceci fournit un polygone étoilé si $\frac{n}{2}$ est pair ou deux polygones étoilés si $\frac{n}{2}$ est impair, chaque côté étant coupé par exactement $n - 4$ autres. Effaçons les côtés joignant 1 à $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$ à n; joignons 1 à $\frac{n}{2} + 1$ et $\frac{n}{2}$ à n. On obtient un polygone, dans lequel les deux nouveaux côtés sont maximaux, les $n - 2$ autres continuant à être chacun coupé par $n - 4$ côtés.

PROBLÈME 27

Énoncé

Soient α et x_0 des nombres strictement positifs. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n}.$$

Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Indication

$x_n \sim \sqrt{2\alpha n}$.

PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donné un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x, y\} \in G \text{ et } \{y, z\} \in G \Longrightarrow \{x, z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.

PROBLÈME 29

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.
