SUR LES CONIQUES À CENTRE TANGENTES AUX TROIS CÔTÉS D'UN TRIANGLE

Jacques DAUTREVAUX

Comme nous l'annoncions dans le n° 73, M. Dautrevaux nous a fourni, à propos du problème 25 de "À vos stylos", une étude très détaillée sur les centres des coniques tangentes à trois droites données; il utilise deux méthodes (équations affines ponctuelles ou tangentielles).

Voici la partie de ce travail traitée par la méthode tangentielle. (Nous laissons aux lecteurs l'étude ponctuelle analogue, nous contentant de l'indication suivante : écrire l'équation de la conique sous la forme

$$a(x-\lambda)^2 + 2b(x-\lambda)(y-\mu) + c(y-\mu)^2 + d = 0,$$

où λ et μ sont les coordonnées du centre.)

1. GÉNÉRALITÉS

Soient dans le plan trois droites déterminant un vrai triangle ABC, O un point quelconque du plan. S'il existe une conique de centre O tangente à ces trois droites elle l'est aussi à leurs symétriques par rapport à O, soit au total à six droites deux à deux parallèles, formant une figure ayant un centre de symétrie O.

Inversement, si on se contente de cinq de ces droites, il est clair que O est déterminé comme centre de symétrie de l'ensemble des quatre droites deux à deux parallèles; sous réserve que la cinquième droite ne soit pas parallèle à l'une des quatre autres et qu'elle ne passe pas par l'un des points communs à deux quelconques des quatre autres, il existe une conique unique tangente à ces cinq droites; cette conique a naturellement pour centre O et elle est aussi tangente à une sixième droite, la symétrique de la cinquième par rapport à O. Ainsi qu'il a été dit, le problème n'a pas de solution si trois de ces six droites sont parallèles ou passent par un même point. D'après le mode de construction de cet ensemble de droites à partir du triangle ABC, le premier cas d'exception ne saurait se produire, mais en ce qui concerne le second on voit aisément que les points par où sont susceptibles de passer trois droites sont les sommets A, B, C du triangle et que par suite les points du plan à exclure pour le choix de la position de O sont ceux des droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC.

On en retiendra le résultat suivant :

> Tout point O du plan non situé sur l'une quelconque des droites passant par les milieux des côtés du triangle ABC est le centre d'une, et d'une seule conique tangente aux trois côtés de ce triangle.

Le problème posé se résume donc en un problème de régionnement du plan.

© L'OUVERT 74 (1994)

2. ÉTUDE ANALYTIQUE

Le problème posé étant d'essence typiquement affine, on rapportera le plan au repère $[A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}]$, ce qui se traduit par un système d'axes de coordonnées (Ax, Ay) dans lequel les coordonnées de B sont $(2,0)$ et celles de C $(0,2)$. On se donne en outre le point $O(\lambda, \mu)$.

Dans ce repère les cinq droites auxquelles doit être tangente la conique cherchée sont les droites d'équations :

$$x = 0, \quad x = 2\lambda, \quad y = 0, \quad y = 2\mu \quad \text{et} \quad x + y = 2$$

et leurs coordonnées tangentielles respectives $[(u, v, w)$, triplet de réels non tous nuls tel que l'équation ponctuelle de la droite s'écrive $ux + vy + w = 0$ — la droite de coordonnées $(0,0,1)$ est la droite de l'infini] sont :

$$(1,0,0), \quad (1,0,-2\lambda), \quad (0,1,0), \quad (0,1,-2\mu) \quad \text{et} \quad (1,1,-2).$$

L'équation tangentielle de la conique cherchée s'en déduit, car ces cinq conditions permettent le calcul facile des six coefficients homogènes non tous nuls de la forme générale $\varphi(u,v,w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0$.

On trouve alors aisément :

$$\boxed{4(\lambda + \mu - 1)uv + 2\lambda uw + 2\mu vw + w^2 = 0,}$$

soit $\varphi(u,v,w) = 0$, qui est l'équation tangentielle de l'unique conique de cente O tangente aux trois côtés du triangle ABC.

On vérifie sans peine que la symétrique par rapport à O de la droite BC (d'équation $x + y = 2$) est tangente à cette conique car ses coordonnées tangentielles sont $(1,1,-2(\lambda+\mu-1))$ [obtenues à partir de l'équation ponctuelle $x+y = 2(\lambda+\mu-1)$ de cette droite].

Si (u,v,w) est une droite tangente à la conique, u, v et w vérifient $\varphi(u,v,w) = 0$ et les coordonnées du point de contact, rendues homogènes sont $\overline{x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,w)$, $\overline{y} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v,w)$ et $\overline{z} = \frac{\partial\varphi}{\partial w}(u,v,w)$. Si $\overline{z} = 0$ le point de contact est à l'infini dans la direction de vecteur directeur le vecteur de composantes $(\overline{x}, \overline{y})$, tandis que si $\overline{z} \neq 0$ les coordonnées ponctuelles du point de contact sont $x = \frac{\overline{x}}{\overline{z}}, y = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$.

Ici, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 4(\lambda+\mu-1)v + 2\lambda w$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 4(\lambda+\mu-1)u + 2\mu w$, et $\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 2(\lambda u + \mu v + w)$.

Ce point de contact est à l'infini lorsque $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(u,v,w) = 0$ soit lorsque $\lambda u + \mu v + w = 0$, c'est-à-dire lorsque la droite $ux + vy + w = 0$ passe par le centre O de la conique. En effet, les seules tangentes à une conique dont le point de contact est à l'infini sont les asymptotes d'une hyperbole.

Dans les autres cas le point de contact de la droite (u, v, w) avec la conique a pour coordonnées ponctuelles :

$$x = \frac{2(\lambda+\mu-1)v + \lambda w}{\lambda u + \mu v + w}, \quad y = \frac{2(\lambda+\mu-1)u + \mu w}{\lambda u + \mu v + w}.$$

Ainsi par exemple les points de contact de la conique avec les trois côtés du triangle sont :

droite AC :	$x = 0$	$(u = 1, v = 0, w = 0)$	$B_0 : x = 0, y = \frac{2(\lambda+\mu-1)}{\lambda}$
droite AB :	$y = 0$	$(u = 0, v = 1, w = 0)$	$C_0 : x = \frac{2(\lambda+\mu-1)}{\mu}, y = 0$
droite BC :	$x + y = 2$	$(u = 1, v = 1, w = -2)$	$A_0 : x = \frac{2(\mu-1)}{\lambda+\mu-2}, y = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+\mu-2}$

et on voit apparaître des singularités lorsque $\lambda = 0$, ou $\mu = 0$ ou $\lambda + \mu = 2$, c'est-à-dire lorsque le centre O de la conique a été choisi sur l'une des trois droites portant les côtés du triangle : cette droite est alors une asymptote de la conique obtenue, qui est nécessairement dans ce cas une hyperbole.

Nature de la conique

Elle est conditionnée par l'existence de tangentes passant par O. S'il en existe deux, ce sont des asymptotes et on a affaire à une **hyperbole**; s'il n'en existe pas, la conique est une **ellipse**.

L'équation tangentielle de la conique peut aussi s'écrire :

$$4(\lambda+\mu-1)uv + (\lambda u + \mu v + w)^2 - (\lambda u + \mu v)^2 = 0$$

soit, après transformation :

$$\lambda^2 u^2 - 2[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]uv + \mu^2 v^2 - (\lambda u + \mu v + w)^2 = 0.$$

Le triplet (u, v, w) représentant une tangente passant par O (de coordonnées ponctuelles (λ, μ)) satisfait aux deux équations homogènes :

$$\begin{cases} \lambda u + \mu v + w = 0 \\ \lambda^2 u^2 - 2[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]uv + \mu^2 v^2 = 0 \end{cases}$$

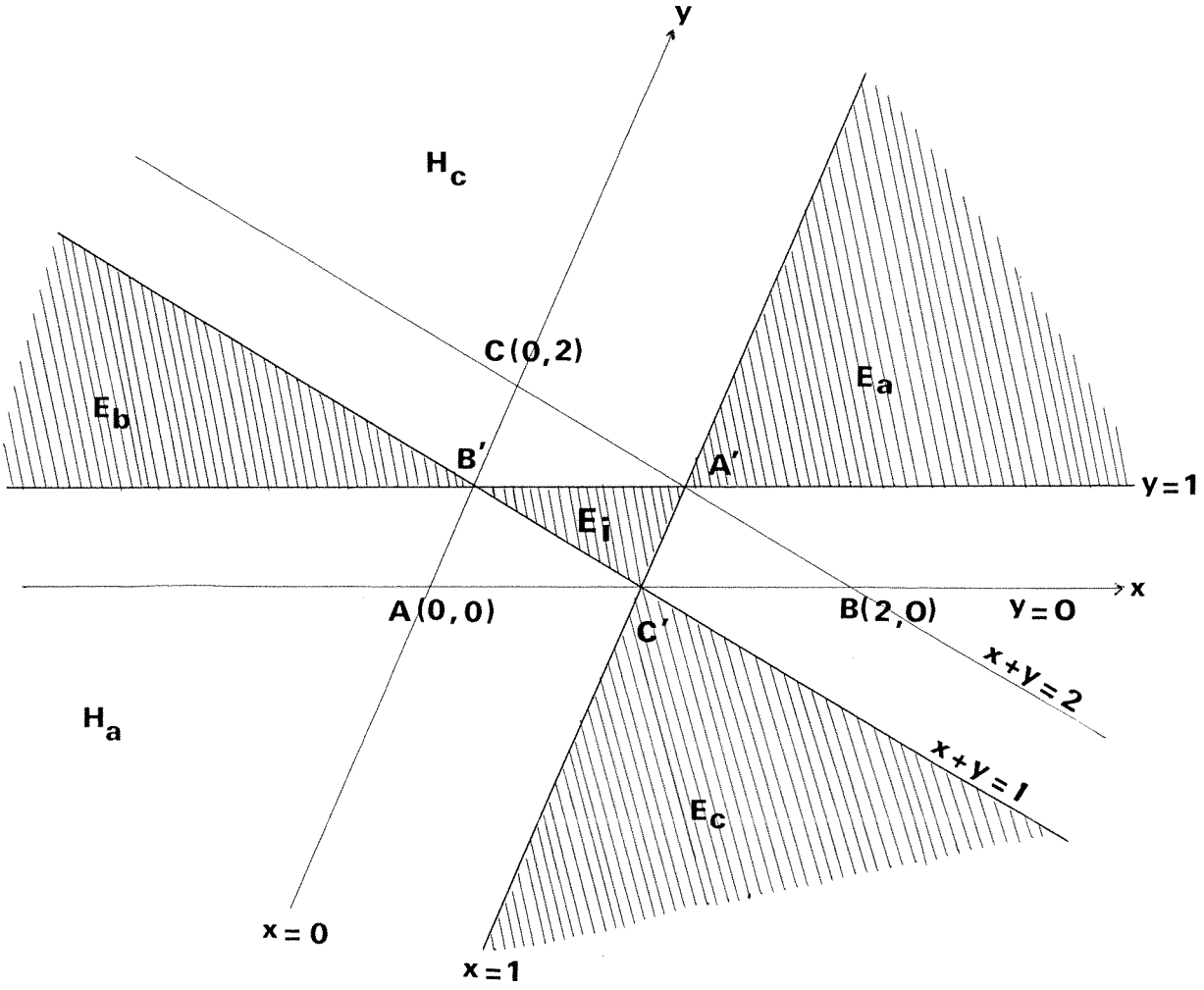
Le discriminant de la deuxième équation est :

$$[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]^2 - \lambda^2\mu^2 = 4(\lambda+\mu-1)^2 - 4\lambda\mu(\lambda+\mu-1) =$$
$$-4(\lambda+\mu-1)(\lambda\mu - (\lambda+\mu-1)) = -4(\lambda+\mu-1)(\lambda-1)(\mu-1)$$

soit

$$\boxed{\Delta = -4(\lambda-1)(\mu-1)(\lambda+\mu-1)}$$

Selon le signe de Δ on obtient un régionnement du plan par les droites $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$ qui sont les droites passant par les milieux des côtés du triangle ABC.



• Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de tangentes issues de O. La conique est une **ellipse**. O se trouve dans l'une des zones E du diagramme ci-dessus.

• Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si O se trouve sur l'une des trois droites $(A'B'), (B'C'), (A'C')$ formant la frontière des zones précédentes, on est en présence de singularités.

• Si $\Delta > 0$, il existe deux tangentes distinctes issues de O (ce sont des asymptotes) et la conique est une **hyperbole**. O se trouve dans l'une des zones marquées H.

L'équation tangentielle $\lambda^2 u^2 - 2[2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu]uv + \mu^2 v^2 = 0$ représente deux droites d'équation ponctuelle $u(x - \lambda) + v(y - \mu) = 0$ où u et v, satisfont la relation précédente. L'élimination de u et v, par : $u = k(y - \mu), v = -k(x - \lambda)$ où $k \neq 0$, donne alors par substitution :

$$\mu^2(x - \lambda)^2 + 2[2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu](x - \lambda)(y - \mu) + \lambda^2(y - \mu)^2 = 0$$

qui est l'équation ponctuelle de l'ensemble des deux asymptotes de l'hyperbole obtenue lorsque $\Delta > 0$.

Remarque : Lorsque $\Delta < 0$, l'expression trouvée à la suite du calcul précédent représente l'ensemble des asymptotes (droites imaginaires) de l'ellipse.
Dans tous les cas, on vérifie que l'équation ponctuelle de la conique cherchée s'écrit :

$$\mu^2(x-\lambda)^2 + 2[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu](x-\lambda)(y-\mu) + \lambda^2(y-\mu)^2 + \Delta = 0,$$

ce qui met en évidence le centre et les asymptotes (éventuelles).

Examen des différents cas

1) Cas singulier : $\Delta = 0$
Ce cas se produit lorsque $\lambda = 1$ ou $\mu = 1$ ou $\lambda + \mu = 1$, c'est-à-dire lorsque O est choisi sur l'une des trois droites passant par les milieux des côtés du triangle ABC.

• $\lambda + \mu = 1$. O est un point de la droite $(B'C')$
L'équation tangentielle de la conique devient :

$$w(2\lambda u + 2\mu v + w) = 0.$$

La conique est dégénérée en deux points :
$w = 0$, équation tangentielle du point $A\ (0,0)$
$2\lambda u + 2\mu v + w = 0$, équation tangentielle du point $A_1(2\lambda, 2\mu)$ situé sur la droite d'équation $x + y = 2$ (car $\lambda + \mu = 1$) et il est clair que O est le milieu de AA_1.

• $\lambda = 1$ ou $\mu = 1$ ces cas se traitent de façon analogue. Donc :
Lorsque O est choisi sur l'une des droites $(B'C'), (A'C')$ ou $(A'B')$ contenant les milieux des côtés du triangle ABC, la conique est dégénérée en deux points, respectivement A, B ou C et son symétrique par rapport à O.

2) Ellipse : $\Delta < 0$
a) Domaine E_i intérieur au triangle $A'B'C'$.
Alors, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$ et $1 < \lambda + \mu < 2$.
Il s'ensuit que les coordonnées des points de contact A_0, B_0 et C_0 vérifient, comme on s'en assure aisément :
– pour A_0 : $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$
– pour B_0 : $0 < y < 2$
– pour C_0 : $0 < x < 2$.
Ces points de contact sont donc situés respectivement sur les segments BC, AC et AB. Dès lors, en vertu de la convexité de l'ellipse, courbe fermée, celle-ci est intérieure au triangle ABC, aux côtés duquel elle est tangente en A_0, B_0, C_0. Il s'agit donc d'une **ellipse inscrite** dans le triangle.

b) Domaine Ea, angle extérieur de sommet A'.
Alors, $\lambda > 1$ et $\mu > 1$.
On s'assure comme précédemment que les coordonnées des points de contact A_0, B_0, C_0 vérifient :
= pour A_0 : $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$
= pour B_0 : $y > 2$

= pour C_0 : $x > 2$.

Ces points de contact sont situés respectivement sur le segment BC et sur les prolongements du côté opposé à A des côtés AC et AB. Une ellipse de ce type est donc **exinscrite** dans l'angle A du triangle.

De même pour les domaines E_b et E_c définis de façon analogue.

Puisque les centres des ellipses forment les quatre domaines E_i, E_a, E_b et E_c, ceci montre que **l'ensemble des centres des ellipses inscrites dans un triangle ABC est le domaine E_i intérieur au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC; l'ensemble des centres des ellipses exinscrites dans l'angle A, (respectivement B, C) du triangle ABC est le domaine E_a (respectivement E_b, E_c) intérieur au secteur angulaire extérieur au triangle $A'B'C'$, de sommet A' (respectivement B', C').**

3) Hyperbole : $\Delta > 0$

On obtient dans le plan trois domaines Ha, Hb, Hc contenant respectivement les points A, B, C. Par raison de symétrie, il suffit d'étudier l'un de ces domaines, Hb par exemple, dans lequel on a :

$$\lambda > 1, \mu < 1 \text{ et } \lambda + \mu > 1.$$

Comme une hyperbole comporte deux branches, deux configurations sont possibles : ou bien les trois points de contact A_0, B_0, C_0 se situent sur la même branche, ou bien on a deux des points sur une branche, le troisième sur l'autre.

Nous savons caractériser deux points situés sur une même branche d'hyperbole par le fait que les tangentes en ces points se coupent dans la région du plan limitée par les asymptotes contenant la courbe.

Par suite la disposition des trois points de contact A_0, B_0, C_0 sur une seule ou bien sur les deux branches de l'hyperbole dépend de la position des points de concours des tangentes en ces points par rapport aux asymptotes.

$$\begin{cases} \text{Les tangentes en } B_0 \text{ et } C_0 \text{ sont les droites } AC \text{ et } AB \text{ qui se coupent en } A, \\ \text{les tangentes en } A_0 \text{ et } C_0 \text{ sont les droites } BC \text{ et } AB \text{ qui se coupent en } B, \\ \text{les tangentes en } A_0 \text{ et } B_0 \text{ sont les droites } BC \text{ et } AC \text{ qui se coupent en } C. \end{cases}$$

• Les trois points de contact sont sur la même branche d'hyperbole si, et seulement si, A, B, C sont tous trois dans la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe;

• Deux des points de contact sont sur une branche d'hyperbole et le troisième sur l'autre si, et seulement si, **un seul** des trois points A, B, C se trouve dans la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe, les deux autres se trouvant dans l'autre.

Pour un point $M(x, y)$ du plan on pose :

$$f(M) = \mu^2(x-\lambda)^2 + 2[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu](x-\lambda)(y-\mu) + \lambda^2(y-\mu)^2.$$

La quantité $f(M)$ s'annule sur les asymptotes de l'hyperbole. Elle prend la valeur $-\Delta$ sur l'hyperbole puisqu'ainsi qu'il a été vu précédemment l'équation de l'hyperbole s'écrit :

$$f(M) + \Delta = 0.$$

Par suite $f(M) < 0$ dans toute la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe.

Remarque : Ce résultat pouvait être trouvé en l'absence des propriétés évoquées ci-dessous, puisqu'on connaît trois points situés sur l'hyperbole, les points A_0, B_0 et C_0.

Choisissant B_0, puisque nous sommes assurés que $\lambda \neq 0$ (car $\lambda > 1$) dans le domaine étudié on a :
* coordonnées de B_0 : $x = 0$, $y = \frac{2(\lambda+\mu-1)}{\lambda}$.

$$\begin{aligned} * \qquad f(B_0) &= \lambda^2\mu^2 - 2[2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]^2 + [2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]^2 \\ &= \lambda^2\mu^2 - [2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu]^2 \\ &= [\lambda\mu + 2(\lambda+\mu-1) - \lambda\mu][2\lambda\mu - 2(\lambda+\mu-1)] \\ &= 4(\lambda+\mu-1)(\lambda\mu - \lambda - \mu + 1) \\ \text{soit } f(B_0) &= 4(\lambda-1)(\mu-1)(\lambda+\mu-1) = -\Delta < 0. \end{aligned}$$

* Il en résulte bien que $f(M) < 0$ dans toute la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe.

Discussion : Deux configurations sont possibles.
I.– Ou bien A_0, B_0, C_0 sont sur une même branche d'hyperbole. Alors A, B, C sont tous trois situés dans la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe. Cette configuration est caractérisée par :

$f(A), f(B), f(C)$ sont tous trois négatifs.

II.– Ou bien A_0, B_0 et C_0 sont, deux d'entre eux sur une branche et le troisième sur une autre. Alors, des trois points A, B, C, l'un seulement est situé dans la région limitée par les asymptotes et contenant la courbe. Cette configuration est caractérisée par :

Seul l'un des trois nombres $f(A), f(B), f(C)$ est négatif.

On calculera donc $f(A), f(B)$ et $f(C)$. La caractérisation des configurations I et II se réduit alors à :
• On a la configuration II, si et seulement si un et un seul, des trois nombres $f(A), f(B)$ et $f(C)$ est **négatif**.
• On a la configuration I si, et seulement si les trois nombres $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont **négatifs**.

1) Coordonnées de A : $x = 0, y = 0$.

$$f(A) = \lambda^2\mu^2 + 2\lambda\mu[2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu] + \lambda^2\mu^2 = 2\lambda\mu[\lambda\mu + 2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu]$$
$$f(A) = 4\lambda\mu(\lambda + \mu - 1).$$

2) Coordonnées de B : $x = 2, y = 0$.

$$\begin{aligned} f(B) &= \mu^2(2 - \lambda)^2 - 2\mu(2 - \lambda)[2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu] + \lambda^2\mu^2 \\ &= \mu^2(\lambda - 2)^2 + 4\mu(\lambda - 2)(\lambda + \mu - 1) - 2\lambda(\lambda - 2)\mu^2 + \lambda^2\mu^2 \\ &= 4\mu^2 + 4\mu(\lambda - 2)(\lambda + \mu - 1) \end{aligned}$$

soit par un calcul simple :

$$f(B) = 4\mu(\lambda - 1)(\lambda + \mu - 2).$$

3) Coordonnées de C : $x = 0, y = 2$

$$f(C) = \lambda^2\mu^2 - 2\lambda(2 - \mu)[2(\lambda + \mu - 1) - \lambda\mu] + \lambda^2(2 - \mu)^2$$

Un calcul analogue donne :

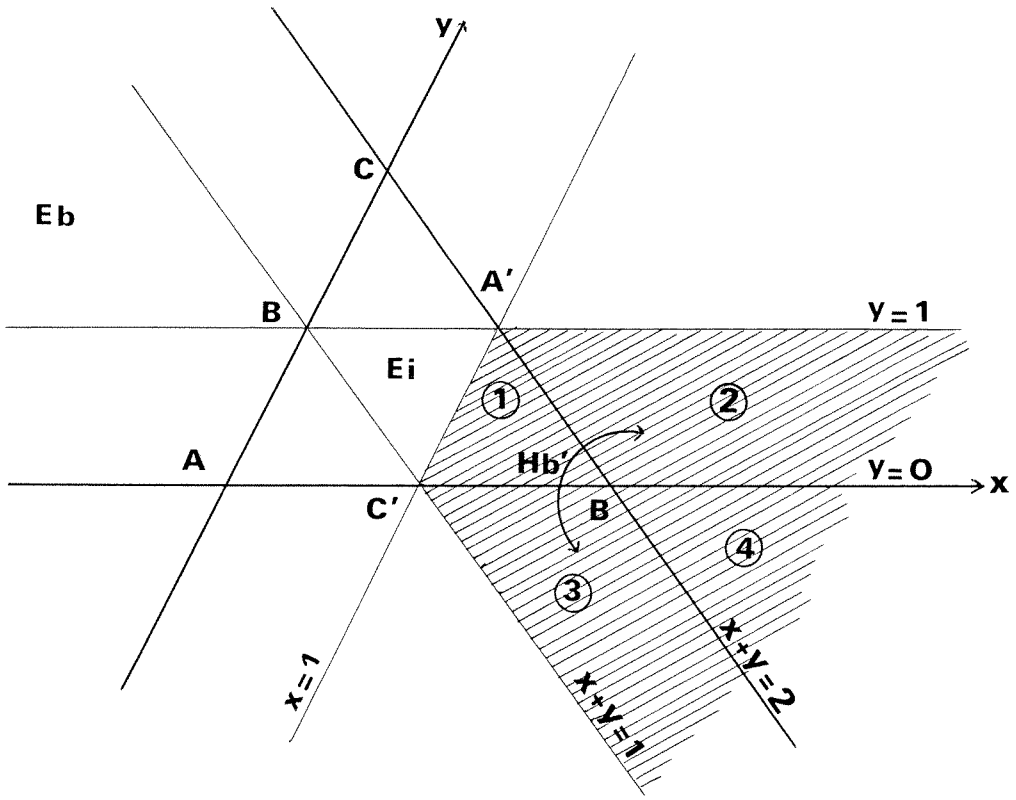
$$f(C) = 4\lambda(\mu - 1)(\lambda + \mu - 2)$$

On note que :

$$\begin{aligned} f(A)f(B)f(C) &= 64\lambda^2\mu^2(\lambda + \mu - 2)^2(\lambda - 1)(\mu - 1)(\lambda + \mu - 1) \\ &= -(4\lambda\mu(\lambda + \mu - 2))^2\Delta < 0 \text{ comme il était à prévoir} \end{aligned}$$

Le domaine H_b étudié satisfait à : $\lambda > 1, \mu < 1, \lambda + \mu > 1$. Il est partagé (voir figure) par les droites $y = 0$ et $x + y = 2$ en quatre parties notées ① , ② , ③ , ④ .

Dans les domaines ① et ② on a $\mu > 0$ d'où $f(A) > 0$. On a donc alors la configuration II.



Dans les domaines ① et ③ on a : $\lambda + \mu < 2$ d'où $f(C) > 0$.
On a aussi la configuration II.
Dans le domaine ④ on a $\mu < 0$ et $\lambda + \mu > 2$. D'où $f(A) < 0$ et $f(B) < 0$: c'est la configuration I.

On subdivise donc le domaine H_b en deux parties : H_b (limitée à la région ④) correspondant aux trois points de contact sur la même branche, et $H_{b'}$ (réunion des régions ① , ② et ③) correspondant à deux points de contact sur une branche et un sur l'autre.

Remarque : Dans la région ① , on a $f(B) < 0$: ce sont les points A_0 et C_0 qui sont sur une branche d'hyperbole, B_0 sur l'autre.
Dans la région ② , on a $f(C) < 0$: ce sont les points A_0 et B_0 qui sont sur la même branche, C_0 sur l'autre.
Dans la région ③ , on a $f(A) < 0$: les points B_0 et C_0 sont sur la même branche, A_0 est sur l'autre.

Une étude plus poussée permet en outre de préciser la position des points de contact sur les côtés du triangle ABC, en utilisant leurs coordonnées déjà déterminées.

On raisonnera, ce qui n'est pas compliqué, dans la totalité de la zone $(\lambda + \mu - 1)(\mu - 1) < 0$ (qui englobe aussi les régions E_b et E_i).

1) Le point de contact B_0 a pour coordonnées $x = 0, y = 2\frac{\lambda+\mu-1}{\lambda}$ d'où $y - 2 = 2\frac{\mu-1}{\lambda}$.

Si $\lambda+\mu-1<0$ alors $\mu-1>0$ et donc $\lambda<0$.
Si $\lambda+\mu-1>0$ alors $\mu-1<0$ et donc $\lambda>0$.
Il en résulte $y>0$ et $y-2<0$ donc $0<y<2$.
Dans tous les cas B_0 est situé sur le segment AC.

2) Le point de contact C_0 a pour coordonnées $x=2\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}, y=0$ d'où $x-2=2\frac{\lambda-1}{\mu}$.

• Si $\lambda+\mu-1<0$ alors $\mu-1>0$ et on se trouve dans Eb. Il en résulte $x<0$ et C_0 se trouve sur la demi-droite Ax'.

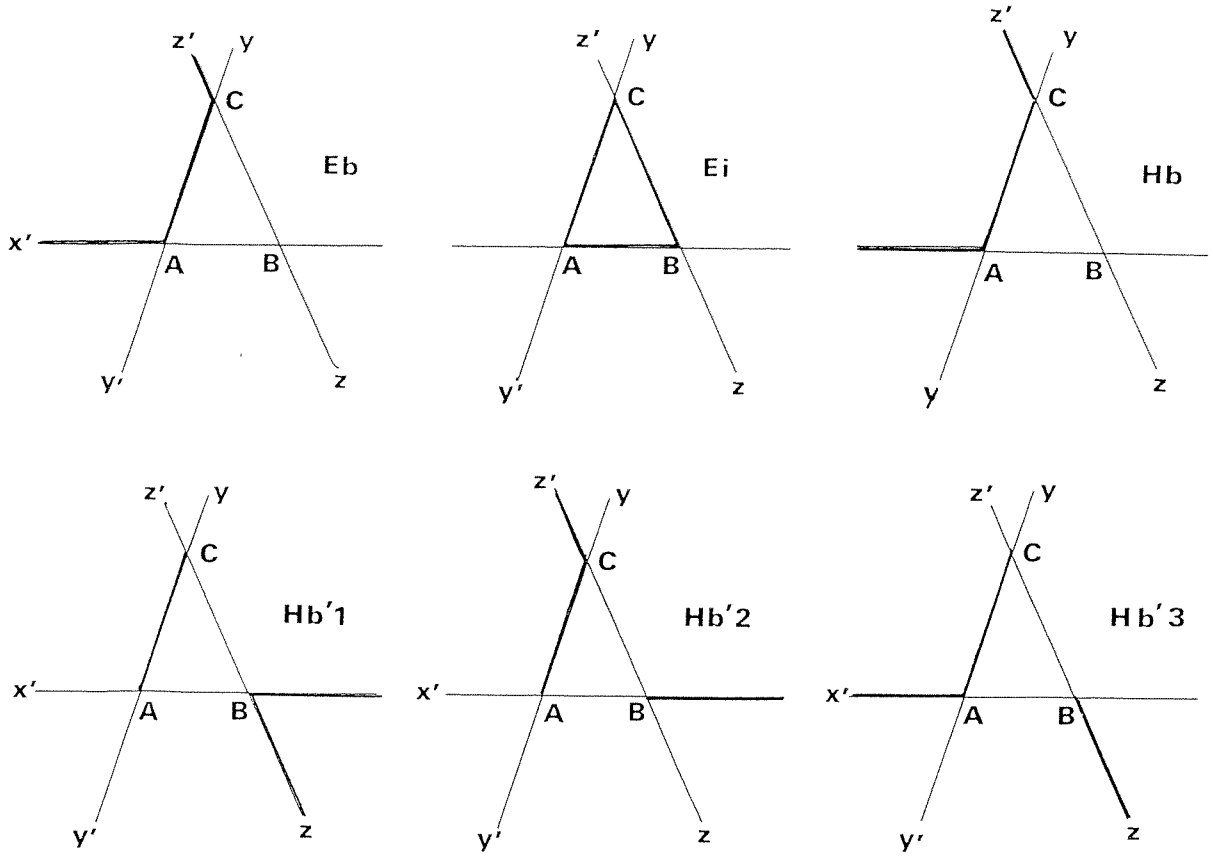
• Si $\lambda+\mu-1>0$ alors $\mu-1<0$ d'où aussi $\lambda>0$.
– Si $0<\lambda<1$, on se trouve dans E_i. On voit que $\lambda-1<0$, d'où $\mu>0$ et on voit que $x>0$ et $x-2<0$, soit $0<x<2$: C_0 se trouve sur le segment AB.
– Si $\lambda>1$ on a $\lambda-1>0$
Ou bien $0<\mu<1$ et on se trouve dans Hb'_1 ou Hb'_2 ;
comme $x-2>0$, C_0 est situé sur la demi-droite Bx.
Ou bien $\mu<0$ et on se trouve dans Hb'_3 ou Hb;
comme $x<0$, C_0 est situé sur la demi-droite Ax'.

3) Le point de contact A_0 a pour coordonnées $x=2\frac{\mu-1}{\lambda+\mu-2}, y=2\frac{\lambda-1}{\lambda+\mu-2}$ et, puisque $x+y=2$ on a $x-2=-y$.

• Si $\lambda+\mu-1<0$ alors $\mu-1>0$ et par suite $\lambda<0$. On se trouve dans Eb et, comme $\lambda+\mu-2<0$ on a $x<0$ et A_0 est située sur la demi-droite Cz'.

• Si $\lambda+\mu-1>0$ alors $\mu-1<0$ et donc $\lambda>0$.
– Si $0<\lambda<1$ on se trouve dans E_i. $\lambda-1<0$ entraîne $\mu>0$, et $\lambda+\mu-2=(\lambda-1)+(\mu-1)<0$ donne $x>0$ et $y>0$, soit $x<2$. On a donc $0<x<2$ et A_0 se trouve sur le segment BC.
– Si $\lambda>1$ on a $\lambda-1>0$
Ou bien $\lambda+\mu-2<0$ et on se trouve dans Hb'_1 ou Hb'_3 ;
on a $y<0$ donc $x>2$: A_0 est sur la demi-droite Bz
Ou bien $\lambda+\mu-2>0$ et on se trouve dans Hb'_2 ou Hb;
on a $x<0$, et A_0 est situé sur la demi-droite Cz'.

Les schémas ci-dessous résument les résultats obtenus sur la disposition des points de contact suivant la zone où se trouve O :



On pourra remarquer, ce qui ne présentait aucune évidence a priori, que les points de contact situés sur une même branche d'hyperbole se trouvent sur des segments ou demi-droites contiguës.

Cas particulier

Il a déjà été noté que, si on choisissait O sur l'une des trois droites contenant les milieux des côtés du triangle, la conique correspondante était dégénérée en deux points dont l'un est toujours l'un des trois sommets A, B ou C du triangle.

Mais trois autres sépératrices interviennent, qui sont les trois droites portant les trois côtés du triangle ABC. Si par exemple on choisit O sur la droite AB on a $\mu = 0$ et l'équation ponctuelle de l'ensemble des deux asymptotes devient :

$$4(\lambda - 1)(x - \lambda)y + \lambda^2 y^2 = 0$$
$$\text{soit } y[\lambda^2 y + 4(\lambda - 1)(x - \lambda)] = 0,$$

c'est-à-dire qu'on a effectivement une hyperbole dont l'une des asymptotes est la droite AB. Bien entendu, si on choisit O en B, la conique de centre O (c'est-à-dire B), tangente aux trois côtés du triangle est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites AB et BC, résultat au demeurant fort logique puisque dans une conique, les tangentes passant par le centre sont les asymptotes (qui ne sont réelles que si la conique est une hyperbole).

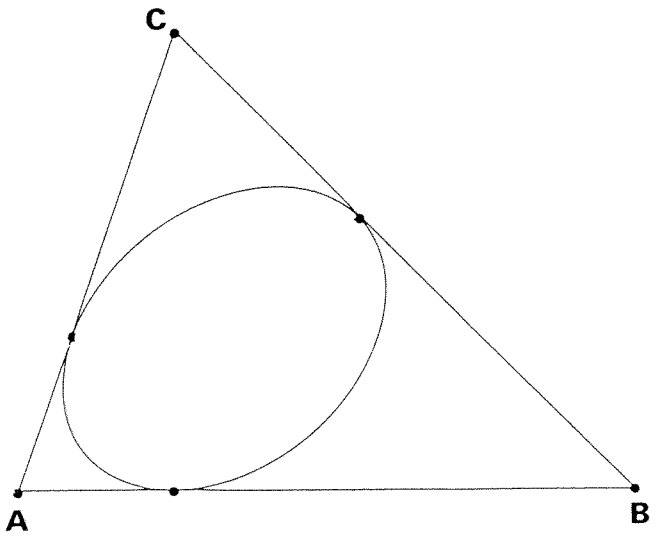
Régionnement complet du plan

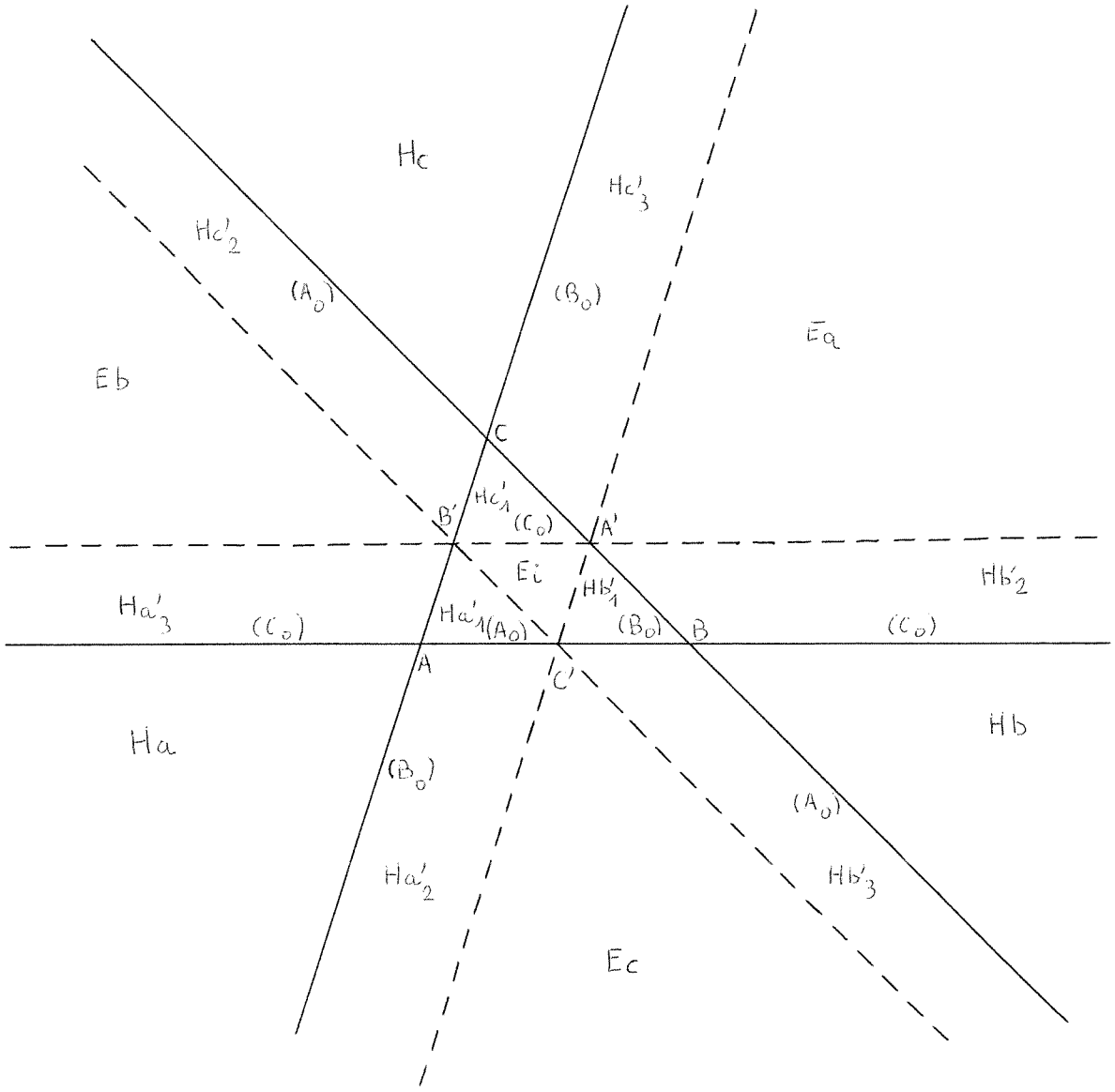
En permutant circulairement les sommets A, B, C aux deux autres secteurs angulaires, de sommets $A'[(\lambda+\mu-1)(\lambda-1)>0]$ et $C'[(\lambda-1)(\mu-1)<0]$ les zonages obtenus dans les secteurs de sommet $B'[(\lambda+\mu-1)(\mu-1)<0]$ et l'ensemble recouvre bien le plan avec une partie commune Ei.

Le zonage est représenté page suivante et doit être lu de la façon suivante : si le centre O de la conique est choisi :

- sur l'une des droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC, la conique est dégénérée en deux points dont l'un est A, B ou C,
- dans Ei la conique est une ellipse inscrite dans le triangle;
- dans Ea, Eb ou Ec la conique est une ellipse exinscrite;
- dans Ha, Hb ou Hc la conique est une hyperbole telle que les trois côtés du triangle soient tangents à la même branche;
- dans Ha'_i, Hb'_i, Hc'_i $(i \in \{1,2,3\})$ la conique est une hyperbole telle que deux côtés du triangle soient tangents à une branche, le troisième à l'autre. Pour $i=1$ les deux côtés du triangle tangents à la même branche sont issus du sommet du triangle intérieur à la zone;
- sur l'un des côtés du triangle, la conique est une hyperbole dont l'une des asymptotes est le côtés considéré.

Dans les régions H' où deux points de contact sont sur une branche et le troisième sur l'autre, les considérations précédentes permettent de déterminer dans chacune des zones Hb'_i le point de contact isolé et par suite, par permutation circulaire, dans les autres zones. Ce point est indiqué sur le régionnement.



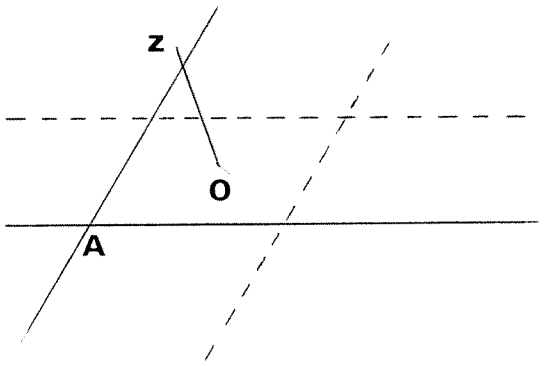


3. Approche géométrique

Une approche géométrique du problème proposé, déjà esquissée dans la partie ① , est certainement beaucoup plus intuitive, mais la rigueur mathématique n'est pas nécessairement au rendez-vous.

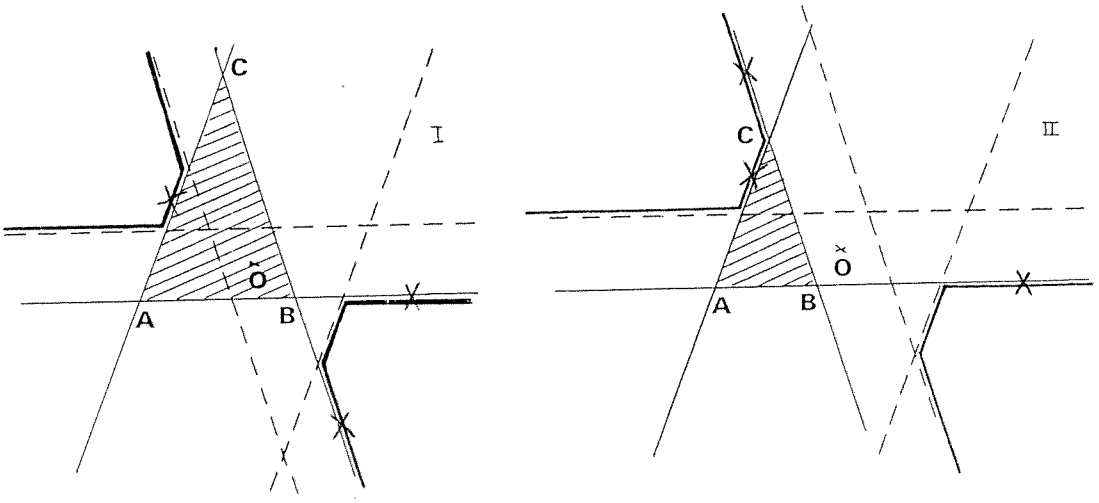
La conique cherchée doit être tangente à six droites deux à deux parallèles, dont trois quelconques d'entre elles ne sauraient être parallèles ni passer par un même point, cet ensemble de six droites ayant un centre de symétrie O (centre de la conique cherchée). La première exclusion ne saurait se produire, mais il est clair que la deuxième nécessite que O soit choisi en dehors des droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC.

Les deux premières paires de droites parallèles se recoupent en définissant un parallélogramme de centre O, point imposé comme centre de la conique. On peut alors supposer, moyennant éventuellement des symétries affines adéquates, que la figure obtenue présente la disposition ci-contre par rapport à la direction Oz du troisième côté, les droites en trait plein étant les supports de deux des côtés du triangle, se coupant en A et celles figurées en trait tireté étant leurs symétriques par rapport à O.



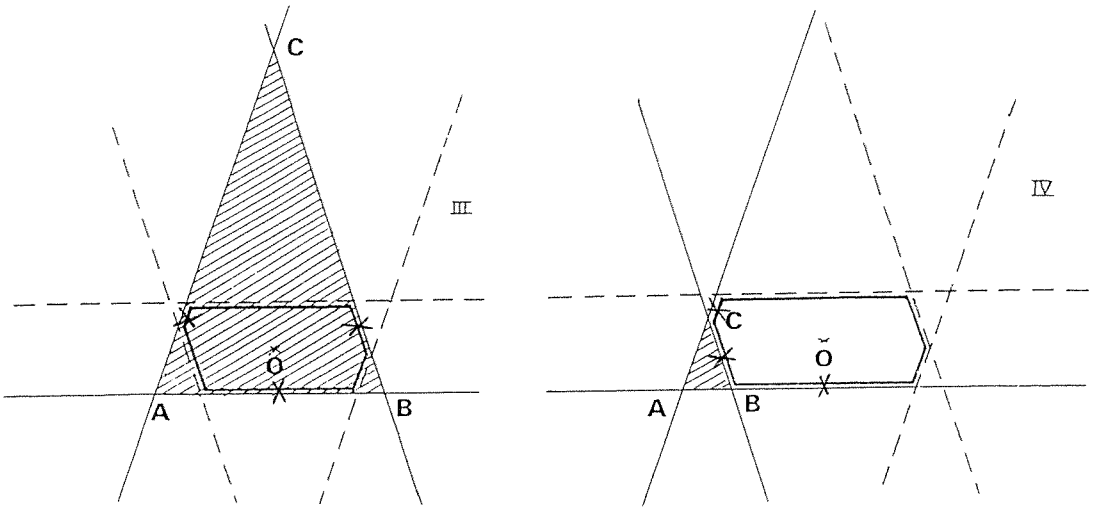
La troisième paire de droites parallèles est formée de deux droites parallèles à Oz, symétriques par rapport à O, dont l'une est le troisième côté du triangle et l'autre son symétrique par rapport à O. Ces droites ne doivent pas passer par un sommet du parallélogramme, et nonobstant cette restriction **six** configurations sont possibles, représentées ci-dessous :

1)



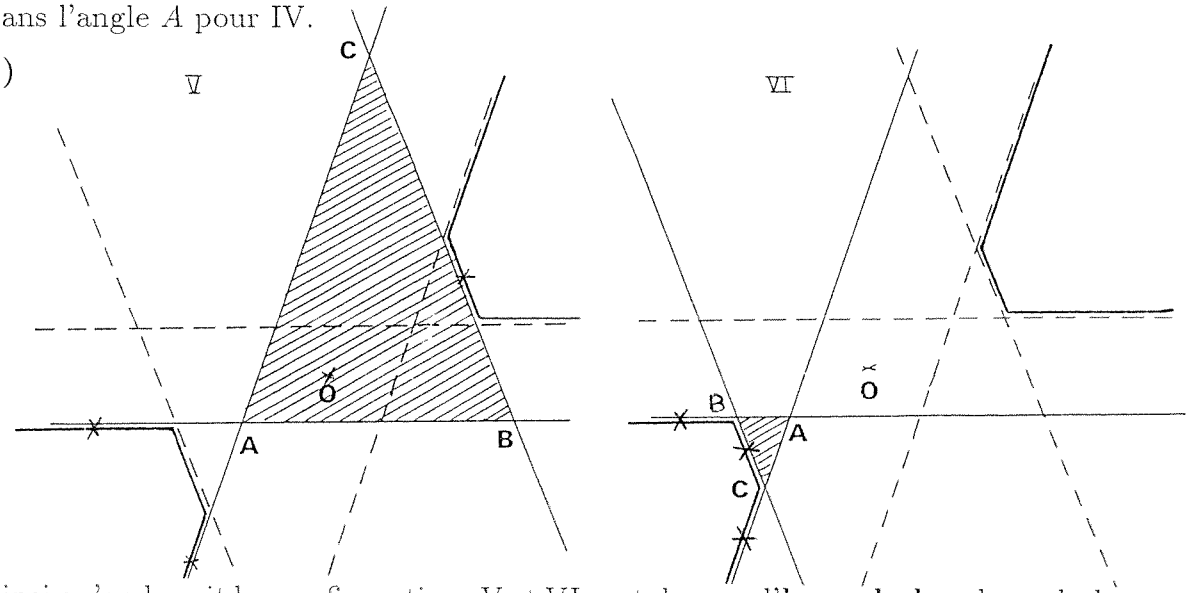
Dans ces deux configurations, les six droites se divisent en deux groupes de trois, chacun délimitant une figure convexe, les deux étant symétriques par rapport à O. On se trouve là dans le cas de l'**hyperbole** dont une branche est tangente à deux côtés du triangle, l'autre au troisième côté.

2)



Dans les configurations III et IV, les six droites délimitent un hexagone convexe de centre O. On se trouve donc dans le cas de l'**ellipse**, inscrite pour III, exinscrite dans l'angle A pour IV.

3)

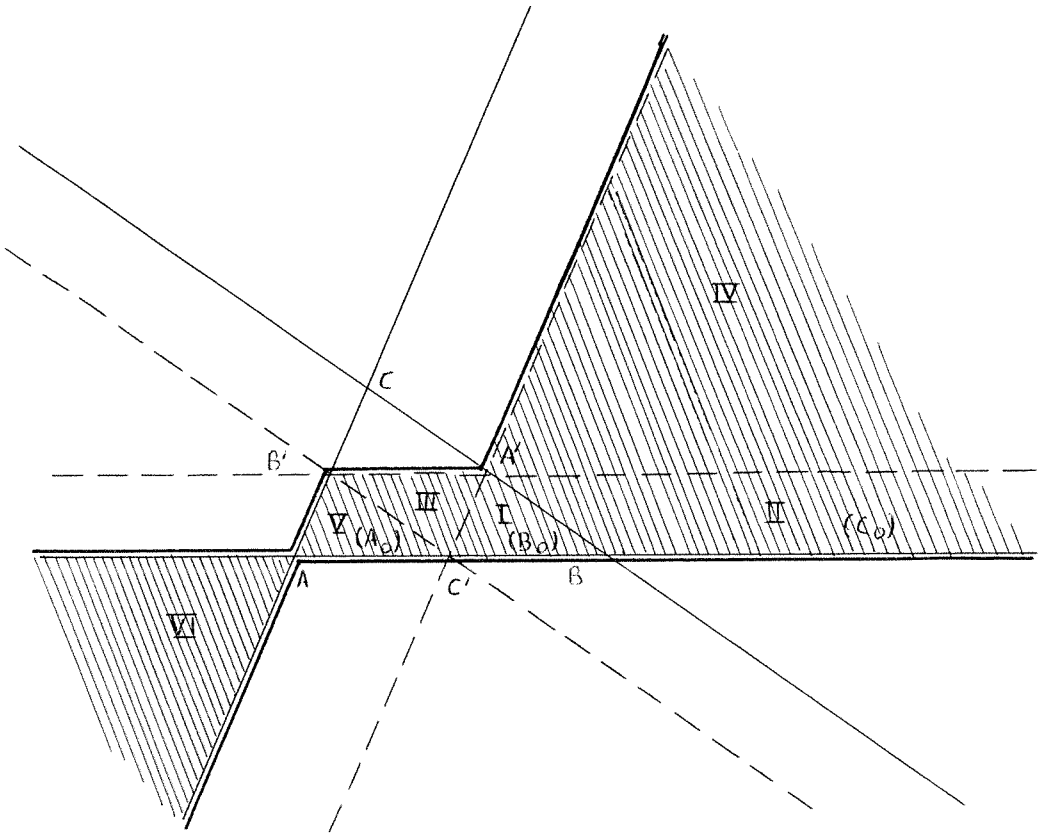


Ainsi qu'on le voit les configurations V et VI sont des cas d'**hyperboles** : hyperbole dont une branche est tangente à deux côtés et l'autre au troisième côté dans V, tandis qu'en VI les trois côtés sont tangents à la même branche.

Ces différentes configurations ont été établies, pour O donné, en fonction de la disposition du côté BC (on s'est limité ici au secteur délimité par les demi-droites AB et AC et à son opposé). Il faut les traduire par un régionnement du plan en fonction de la position du point O par rapport au triangle ABC.

On voit que les conditions d'intersection font intervenir les trois droites $A'B'$, $B'C'$ et $C'A'$ joignant les milieux des côtés du triangle ABC. Ainsi, dans la configuration I, O est en dessous de $A'B'$ et à droite de $A'C'$, donc intérieur au triangle $BA'C'$. Les autres cas se verront facilement de façon analogue. On obtient alors dans le plan un régionnement figuré ci-dessous, regroupant dans la

portion de plan limitée par un surlignage les zones précédemment dénommées (voir fin du (2)) : $Ei, Ea, Ha, Ha'_1, Hb'_1, Hb'_2$. En permutant A, B, C de toutes les façons possibles, on obtient (grâce aux zones communes à deux ou plusieurs découpages) un recouvrement complet du plan, reproduisant finalement le zonage exposé à la fin de la partie (2) .



Par exemple, en laissant A fixe et en échangeant B et C on obtient les zones $Ei, Ea, Ha, Ha'_1, Hc'_1, Hc'_3$ et ainsi de suite.

On ne reviendra pas sur ce qui se passe lorsque O est choisi sur l'un des côtés du triangle mais la géométrie ne nous dit rien sur la dégénérescence de la conique lorsque O est choisi sur l'une des droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC.