QUELQUES RÉSULTATS SUR LES COURBES PLANES

Paul GIRAULT

Strasbourg, U.F.R de Mathématiques et d'Informatique

En hommage au Professeur Marcel Berger

L'objet de cet exposé est de promener le lecteur dans le merveilleux jardin des propriétés globales des courbes planes. Pour cela, j'ai choisi parmi les résultats les plus récents ceux qui m'ont paru les plus séduisants, les plus élégants, bref, ceux dont la beauté étonne. C'est pourquoi je ne lésinerai pas sur les nombreuses illustrations nécessaires à l'intelligence de l'exposé. L'apparente simplicité des résultats obtenus a été aussi un mobile puissant de sélection.

Je donnerai quelques démonstrations lorsqu'elles me paraissent originales, me bornant — la plupart du temps — à indiquer les outils modernes utilisés pour atteindre l'alléluia de la solution. Bien sûr — et ceci afin de maintenir le lecteur en haleine — je n'hésiterai pas à replacer ces résultats (quand c'est possible) dans un cadre plus général.

1. Introduction. — Le tracé des courbes fermées planes est toujours une activité fascinante à cause de la variété des formes obtenues. Mais comment caractériser la *forme* d'une courbe ?

La théorie *globale* des courbes va nous aider à préciser ce point qui paraît — a priori — fort vague. Pour cela, on part de la connaissance de propriétés locales : une courbe peut avoir des points doubles, des points d'inflexion, des points de rebroussement, des sommets, etc. Dans les bons cas, ces quantités sont en nombre fini, ce qui permet de passer du local au global en montrant qu'on a une relation, alias une formule, entre certaines de ces quantités pour toute courbe fermée. C'est tout le secret de la géométrie moderne ! La suite sera en grande partie une illustration massive de cette démarche.

2. La formule de Fabricius-Bjerre. — A cause des allusions qui seront faites ultérieurement, et par souci d'autonomie, nous allons commencer par un bref rappel des formules de Plücker, qui furent les premiers résultats globaux obtenus sur les courbes algébriques planes.

2.1. Les formules de Plücker (1834–1836). — Commençons par rappeler quelques définitions classiques.

a) *Le plan projectif complexe.* — Nous désignerons par $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ le plan projectif complexe. Un élément de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ s'appelle un *point* et se représente à l'aide des triplets $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nous dirons encore que le triplet $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2)$ est un ensemble de *coordonnées* du point P.

L'application $(x_1, x_2) \mapsto (1, x_1, x_2)$ définit un plongement canonique de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Un *automorphisme linéaire* de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une application de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même induite par un automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^3$. Une propriété est *projective* si elle est invariante par tout automorphisme linéaire de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

b) *Courbes algébriques*

- Une courbe *algébrique affine* $\mathcal{C}_0$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathbb{C}^2 \ ; \ f(x) = 0, \ f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]\}. \tag{1}$$

Le *degré* de $\mathcal{C}_0$ est le degré de f.

- Une *courbe algébrique projective* (ou plus simplement une courbe algébrique) est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de la forme

$$\mathcal{C} = \{\underline{x} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ ; \ F(x) = 0\}, \tag{2}$$

où F est un polynôme *homogène* non constant de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Le *degré* de la courbe $\mathcal{C}$ est celui du polynôme F.

Du plongement canonique de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, il résulte qu'il existe une relation entre courbes algébriques affines et courbes algébriques projectives. Plus précisément, soit $\mathcal{C}_0$ la courbe affine (1) et posons

$$F(\xi) = F(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (\xi_0)^{\deg f} f\Big(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}\Big).$$

La courbe algébrique $\mathcal{C}$ définie par l'équation $F(\xi) = 0$ vérifie

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2 = \mathcal{C}_0. \tag{3}$$

Réciproquement, considérons une courbe projective et posons :

$$f(x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2).$$

La courbe affine $\mathcal{C}_0$ définie par (1) vérifie alors (3).

Considérons maintenant la courbe algébrique $\mathcal{C}$. Nous pouvons décomposer F en un produit de *facteurs homogènes irréductibles*

$$F = F_1^{m_1} \cdots F_k^{m_k}.$$

Comme cette factorisation est unique à des constantes multiplicatives près, ceci nous autorise à écrire

$$\mathcal{C} = m_1 \mathcal{C}_1 + \cdots + m_k \mathcal{C}_k,$$

où les $\mathcal{C}_i$ sont les courbes algébriques

$$\mathcal{C}_i = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ ; \ \ F_i(x) = 0. \right\}$$

Ces courbes sont appelées les *composantes irréductibles* de la courbe algébrique $\mathcal{C}$; l'entier m_i est la *multiplicité* de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}$.

On dit que $\mathcal{C}$ est une courbe *irréductible* lorsque le polynôme F est irréductible.

Exemples. — Soit n le degré de l'équation F de $\mathcal{C}$.

• Si $n = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *droite projective* (ou plus simplement une droite). Une droite est bien évidemment une courbe irréductible.

• Si $n = 2$, nous devons distinguer deux sous-cas. Si F est irréductible, la courbe $\mathcal{C}$ s'appelle une *conique* (irréductible). Si $F = F_1 F_2$ avec $\deg F_1 = \deg F_2 = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une droite *comptée deux fois* lorsque $F_2 = \lambda F_1$ et la *réunion de deux droites concourantes* sinon.

Terminons par deux remarques importantes :

• Le degré d'une courbe est un invariant projectif.

• Soient $\mathcal{C}$ une courbe de degré n et $\mathcal{D}$ une droite qui n'est pas une composante de $\mathcal{C}$. Si on convient de compter les points multiples de $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ avec leur multiplicité, on a :

$$\operatorname{card}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = n,$$

c) *Tangentes et points singuliers*

• Soit $\mathcal{C}_0$ une courbe affine. Un point $P = (p_1, p_2)$ de cette courbe est appelé un *point simple* (ou encore un *point ordinaire*) s'il existe un indice j pour lequel on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \neq 0.$$

En un tel point, la droite affine

$$T_P(\mathcal{C}_0) = \left\{ y \in \mathbb{C}^2 \ ; \ \ (y_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + (y_2 - p_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0 \right\}$$

s'appelle la *tangente* au point P à $\mathcal{C}_0$. Concrètement, on peut interpréter la tangente en P comme la position limite des sécantes PQ lorsque le point Q tend vers P tout en restant sur $\mathcal{C}_0$ (Fig. 1). Les points de $\mathcal{C}_0$ qui ne sont pas des points simples sont appelés des *points singuliers*. On dit encore que $\mathcal{C}_0$ est *lisse* (ou encore *non singulière*) lorsque tous ses points sont simples.

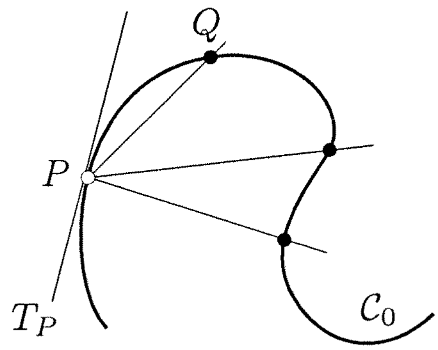


Figure 1

• Considérons maintenant une courbe algébrique $\mathcal{C}$. Un point P de cette courbe est appelé un *point simple* (ou encore un *point ordinaire*) s'il existe un indice j pour lequel on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(P) \neq 0.$$

En un tel point, la droite projective

$$T_P(\mathcal{C}) = \left\{ \underline{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \; ; \; y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0 \right\}$$

s'appelle la *tangente* au point P à $\mathcal{C}$. On peut faire la même remarque que précédemment (Fig. 1).

Les points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas des points simples sont appelés des *points singuliers*. On dit encore que $\mathcal{C}$ est *lisse* (ou encore *non singulière*) lorsque tous ses points sont simples.

• Il résulte assez facilement du plongement canonique de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que l'on a :

$$T_P(\mathcal{C}_0 \cap \mathbb{C}^2) = T_{(1,P)}(\mathcal{C}) \cap \mathbb{C}^2.$$

Ces généralités étant dites, considérons une courbe algébrique $\mathcal{C}$ et soit P un point simple de cette courbe. En vertu du théorème des fonctions implicites, nous voyons que — dans un voisinage du point P — la courbe $\mathcal{C}$ est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$. Il en résulte qu'il faut s'attendre à des complications au voisinage des points singuliers. C'est ce que nous allons examiner avec plus de précision.

Soit P un point *quelconque* de $\mathcal{C}$ et choisissons un système de coordonnées de telle sorte que $P = (1, 0, 0,)$. Posons alors :

$$f(x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2).$$

La courbe d'équation $f(x_1, x_2) = 0$ correspond donc à $\mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2$. Nous pouvons écrire $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ sous la forme

$$f = f_k + f_{k+1} + \cdots + f_n,$$

où f_j est un polynôme homogène de degré j et $f_k \neq 0$. Puisque $f(0,0) \neq 0$, nous avons certainement $k \geq 1$.

- Si $k = 1$, nous pouvons écrire

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Comme $a = \partial f / \partial x_1(P)$ et $b = \partial f / \partial x_2(P)$, nous voyons ainsi que P est un point simple et que la tangente en P est la droite

$$f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2.$$

Il peut arriver que f_1 divise $f_2, \ldots, f_{\ell-1}$ mais pas f_ℓ. Si $\ell = 3$, on dit que P est un *point d'inflexion ordinaire*. Si $\ell > 3$, on dit que l'on a un point d'*inflexion d'ordre élevé* (on a par exemple un *point d'ondulation* pour $\ell = 4$, ce que Maupertuis appelait très joliment un *point de serpentement* en 1729).

- Si $k \geq 2$, on voit facilement que le point P est un point singulier (condition nécessaire et suffisante). On dit alors que le point P est un *point multiple* d'ordre k et que les k droites $f_k = 0$ sont les *tangentes* en P à la courbe. Si ces tangentes sont distinctes, on dit que P est un point *multiple ordinaire* d'ordre k.

Si $k = 2$, on dit encore que le point P est un *point double ordinaire* ou un *point de rebroussement* (alias une *pointe*) selon que les deux tangentes sont distinctes ou confondues. Si les tangentes sont confondues, on a donc

$$f(x_1, x_2) = \big(u_1(x_1, x_2)\big)^2,$$

le polynôme u_1 étant homogène de degré 1. On dit alors que P est un point de rebroussement de *première espèce* si u_1 ne divise pas f_3.

Nous n'irons pas plus loin dans l'étude des points singuliers. Nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant.

THEORÈME (MacLaurin, 1720). — *Une courbe algébrique irréductible de degré n possède au plus*

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

points doubles, un point multiple d'ordre k comptant pour $\frac{1}{2}k(k-1)$ points doubles.

d) *Le théorème de Bézout.* — Ce résultat, démontré vers 1765, s'énonce comme suit :

THEORÈME. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux courbes algébriques irréductibles, distinctes et de degrés n et n'. La somme des multiplicités d'intersection des points communs à ces deux courbes est égale à nn'.*

Nous avons déjà vu un cas particulier de ce théorème lorsque $\mathcal{C}'$ est une droite. Mais cet énoncé n'est pas une généralisation banale. Examinons en effet la figure 2. Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ peuvent se couper transversalement comme en P ; elles peuvent aussi présenter des contacts comme en R ou — pire encore — se couper en des points singuliers comme S et Q ! Si nous nous rappelons la petite incursion faite dans le zoo des singularités, nous voyons que nous sommes loin d'avoir épuisé les situations les plus affreuses. C'est pourquoi on associe à chaque point de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ une « multiplicité » de manière à se débarrasser des cas d'espèces afin d'obtenir exactement l'égalité du théorème.

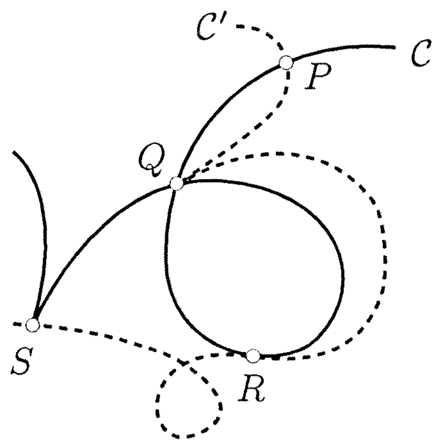


Figure 2

Nous invoquerons plusieurs fois le théorème de Bézout par la suite. Nous ne donnerons cependant pas la définition exacte de la multiplicité de l'intersection pour la bonne raison que cela nous entraînerait beaucoup trop loin.

e) *Polaires et duale d'une courbe.* — Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique de degré n et P un point de coordonnées (y_0, y_1, y_2) n'appartenant pas à cette courbe.

La courbe $\mathcal{P}$ définie par

$$\mathcal{P} = \big\{(\underline{x} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ ; \ y_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0\big\}$$

s'appelle la *polaire* de P relativement à $\mathcal{C}$. Cette courbe est de degré $(n-1)$ si $\mathcal{C}$ est de degré n.

Observons que la polaire passe par les points singuliers de la courbe...

Exercice. — Quelle est la polaire d'un point relativement à une droite, à une conique ?

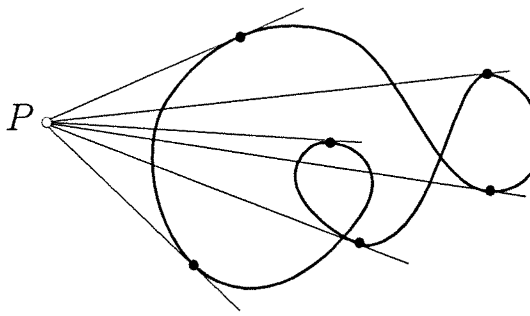


Figure 3

Selon Gergonne (vers 1827), désignons par ν la *classe* de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ que l'on peut mener d'un point non situé sur la courbe (Fig. 3). Les points de contacts avec $\mathcal{C}$ des tangentes issues de P sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ y_0 \partial F/\partial x_0 + y_1 \partial F/\partial x_1 + y_2 \partial F/\partial x_2 = 0. \end{cases}$$

On se convainc ainsi que la classe ne dépend pas du point P choisi ; c'est donc une quantité parfaitement définie qui est manifestement un invariant projectif. Si $\mathcal{C}$ est une courbe non singulière, le théorème de Bézout montre que nous avons

$$\nu = n(n-1).$$

Il ne nous reste plus qu'à introduire la compagne favorite d'une courbe algébrique, à savoir sa *duale*. Pour cela, commençons par interpréter l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ comme un autre plan projectif $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))^*$ en considérant le triplet (a_0, a_1, a_2) comme un ensemble de coordonnées de la droite $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Soient maintenant $\mathcal{C}$ une courbe algébrique et P un point simple de cette courbe et T_P la tangente à $\mathcal{C}$ en P. Désignons enfin par $\mathrm{sing}(\mathcal{C})$ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{C}$. L'application

$$\psi : P \longmapsto T_P$$

définit une application de $\mathcal{C} \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{C})$ dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))^*$. La *duale* $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ est par définition la courbe algébrique

$$\mathcal{C}^* = \overline{\psi\big(\mathcal{C} \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{C})\big)}.$$

Il est remarquable que l'on retrouve la courbe de départ en dualisant sa duale, i.e.

$$\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}.$$

La détermination explicite de la duale d'une courbe est une activité périlleuse car il s'agit d'éliminer x_0, x_1, x_2 et λ dans le système

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ \lambda \xi_i = \partial F / \partial x_i, \quad i = 0, 1, 2. \end{cases}$$

(Ce système montre en passant que la duale d'une courbe algébrique est encore une courbe algébrique.) S'il est facile de prouver que la duale d'une conique est une conique, il est déjà beaucoup plus difficile de déterminer la duale d'une courbe d'ordre 3. Le lecteur intéressé pourra s'exercer avec la courbe $x_0^3 + x_1^3 + x_0^2 = 0\ldots$

Il serait pourtant plaisant de déterminer l'ordre n^* de la duale $\mathcal{C}^*$ d'une courbe $\mathcal{C}$ d'ordre n. Heureusement, l'équation de $\mathcal{C}^*$ est inutile. En effet, nous avons vu qu'il suffit de compter le nombre d'intersections d'une droite générique avec $\mathcal{C}^*$. Par dualité, on s'aperçoit qu'il s'agit tout bonnement du nombre de tangentes que l'on peut mener à $\mathcal{C}$ d'un point générique du plan, ce qui nous donne

$$n^* = \nu.$$

Si $\mathcal{C}$ n'est pas singulière, nous avons donc

$$n^* = \nu = n(n-1).$$

Mais nous avons encore $n = n^*(n^* - 1)$ par dualité puisque $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$. Lorsque $n > 2$, on aboutit à un joli enquiquinement ! C'est en levant cette *aporie* que Plücker obtint ses formules célèbres.

Question. — Pourquoi le raisonnement précédent est-il incorrect ?

f) *Les formules de Plücker.* — Nous dirons qu'une courbe $\mathcal{C}$ n'a que des *singularités traditionnelles* si chaque point P de $\mathcal{C}$ satisfait l'une des assertions suivantes :

- P est un point simple.
- P est un point d'inflexion ordinaire.

Remarque. — On peut montrer que sous cette hypothèse, le point P appartient aussi à la Hessienne $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la courbe

$$\mathcal{H} = \Big\{\underline{x} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ ; \ \det\Big(\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}\Big) = 0\Big\}.$$

- P est un point de rebroussement de première espèce.
- P est un point double ordinaire.
- On a une bitangente en P, ce qui signifie que la tangente en P (que l'on suppose ne pas être un point d'inflexion) est tangente en $\mathcal{C}$ à un autre point $Q \neq P$.

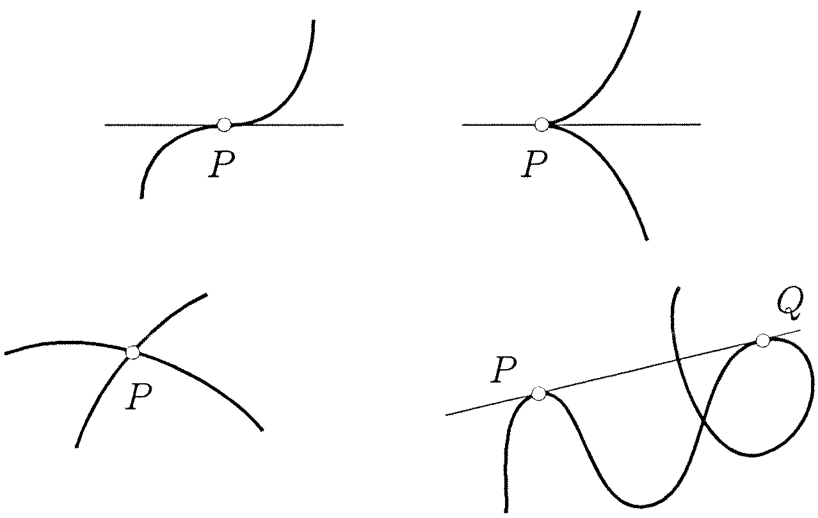


Figure 4

La figure 4 illustre les différentes situations.

Lorsque la courbe $\mathcal{C}$ n'a que des singularités traditionnelles, désignons par :

- n l'ordre de $\mathcal{C}$;
- ν la classe de $\mathcal{C}$;
- d le nombre de points doubles de $\mathcal{C}$;
- δ le nombre de bitangentes de $\mathcal{C}$;
- r le nombre de points de rebroussement de $\mathcal{C}$;
- ρ le nombre de points d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Les formules de Plücker sont alors les suivantes :

$(P_1)\qquad \nu = n(n-1) - 2d - 3r,$

$(P_2)\qquad n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\rho,$

$(P_3)\qquad \rho = 3n(n-2) - 6d - 8r,$

$(P_4)\qquad r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\rho,$

$(P_5)\qquad \delta = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (n^2-n-6)(2d+3r) + 2d(d-1) + 6dr + \frac{9}{2}r(r-1),$

$(P_6)\qquad d = \frac{1}{2}\nu(\nu-2)(\nu^2-9) - (\nu^2-\nu-6)(2\delta+3\rho) + 2\delta(\delta-1) + 6\delta\rho + \frac{9}{2}\rho(\rho-1).$

Exemples

• Si la courbe $\mathcal{C}$ est de degré 4 et non singulière, nous avons :

$$n = 4, \quad \nu = 12, \quad \rho = 24, \quad \delta = 28, \quad d = r = 0.$$

• Si la courbe $\mathcal{C}$ est l'astroïde complexe $x_1^{2/3} + x_2^{2/3} + = \lambda^{2/3} x_0^{2/3}$, nous avons :

$$n = 6, \quad \nu = 4, \quad \rho = 0, \quad \delta = 3, \quad d = 4, \quad r = 6.$$

Évidemment, énoncées sans démonstration, ces formules ne sont pas très parlantes. Une preuve élémentaire consiste à étudier l'effet des singularités sur la première polaire et la Hessienne. On obtient alors les formules (P_1) et (P_3) à l'aide du théorème de Bézout, puis (P_2) et (P_4) par dualité. Les formules (P_5) et (P_6) sont plus difficiles à obtenir. Indiquons une démarche heuristique afin de bien faire comprendre comment la présence de singularités modifie les formules.

Remarquons tout d'abord que si $\mathcal{C}$ est non singulière, en patouillant un peu, on peut déduire des formules (P_1), (P_2) et (P_3) l'égalité $2\delta = n(n-2)(n^2-9)$. Maintenant, si $\mathcal{C}$ n'a que des singularités traditionnelles, ce nombre diminue compte tenu des remarques suivantes :

• de tout point double, on peut mener $(\nu - 4)$ tangentes à la courbe et chacune de ces tangentes compte pour 2 bitangentes;

• de tout point de rebroussement, on peut mener $(\nu - 3)$ tangentes et chacune d'elles compte pour 3 bitangentes;

• toute droite qui joint deux points doubles compte pour 4 bitangentes;

• toute droite qui joint un point double et un point de rebroussement compte pour 6 bitangentes;

• toute droite qui joint deux points de rebroussement compte pour 9 bitangentes.

Cela donne $2\delta = n(n-2)(n^2-9) - 4d(\nu-4) - 6r(\nu-3) - 4d(d-1) - 12dr - 9r(r-1)$. La formule (P_5) s'en déduit par un petit calcul et (P_6) par dualité. Avec un peu d'imagination, la figure 5 justifie ce qui vient d'être dit !

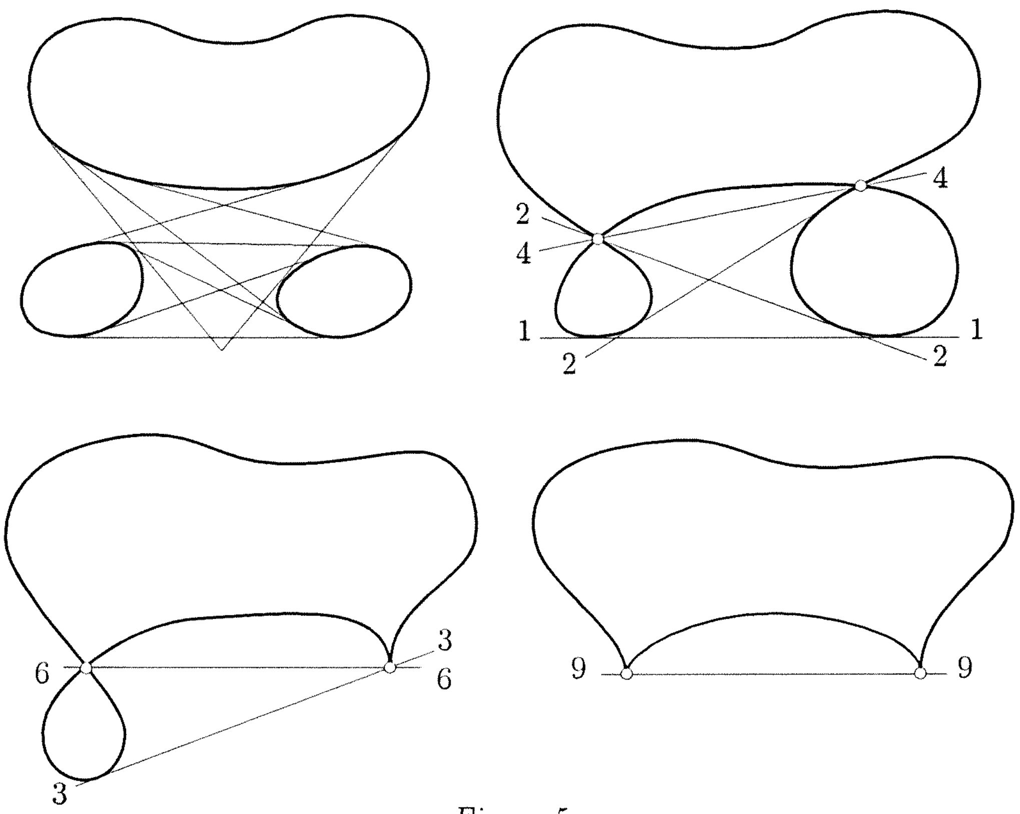


Figure 5

On pourrait bien sûr trouver la formule (P_5) en calculant $(8n-3r)$ et en utilisant la formule (P_1), mais une telle démonstration — irréprochable quant à la rigueur — ne nous apprend rien géométriquement !

En combinant ces relations, nous pouvons en obtenir bien d'autres :

$$(P_7) \qquad r - \rho = 3(n - \nu)$$

$$(P_8) \qquad 2(\delta - d) = (\nu - n)(\nu + n - 9)$$

$$(P_9) \qquad \tfrac{1}{2} n(n+3) - d - 2r = \tfrac{1}{2}\nu(\nu+3) - \delta - 2\rho,$$

$$(P_{10}) \qquad \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r = \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \delta - \rho.$$

Arrêtons-nous un instant sur la dernière formule et posons :

$$g(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r.$$

L'entier $g(\mathcal{C})$ s'appelle le *genre* de la courbe $\mathcal{C}$ (nom introduit par Clebsch en 1864). La formule (P_{10}) montre alors qu'une courbe et sa duale ont même genre.

Dans son mémoire de 1857 — riche en idées nouvelles — Riemann a montré que le genre est un invariant *birationnel*, inaugurant ainsi l'étude de la *géométrie birationnelle* qui a dominé presque toute la géométrie algébrique par la suite.

La formule (P_{10}) établit donc une relation entre l'invariant «intrinsèque» g et les quantités «extrinsèques» n, d, r et ν, δ, ρ.

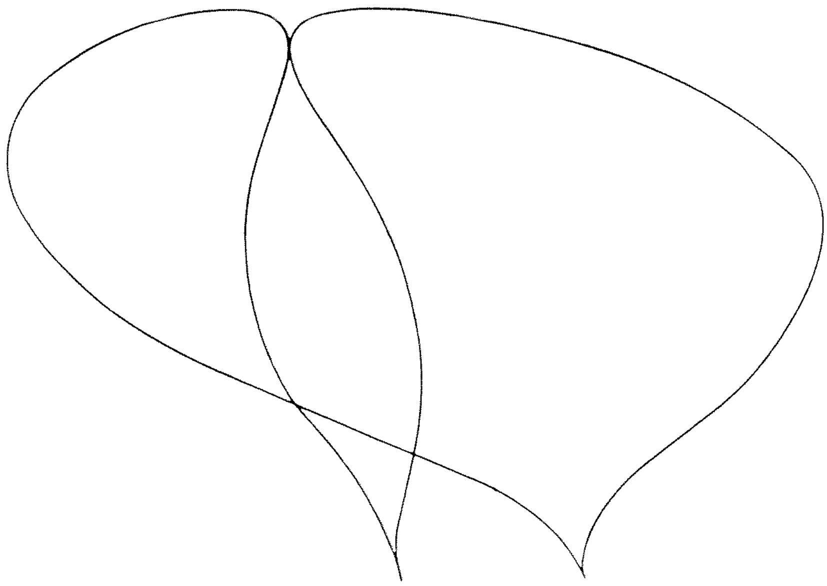
Notons encore que des formules «à la Plücker» ont été obtenues pour les courbes et les surfaces de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ par Cayley, Salmon et bien d'autres auteurs du milieu du siècle dernier. Admirons au passage le *flair* de ces mathématiciens en nous rappelant l'état de l'étude des singularités des surfaces à cette époque. Salmon, pour ne citer que lui, avait annoncé dès 1854 — après quelques considérations heuristiques — que le nombre t des plans tritangents à une surface est donné par la formule

$$6t = n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 548n - 960).$$

Les surfaces de degré 4 ont donc 3 200 plans tritangents, celles de degré 5 en ont 56 575 et celles de degré 6 en ont 449 520 ! Il revint à Ronga en 1984 de donner la démonstration de cette formule, ainsi que son domaine de validité.

Nous avons donc atteint notre but, qui était d'exposer succinctement les formules de Plücker. Cette première incursion dans l'univers de la géométrie algébrique ne donne qu'une très faible idée de l'immense domaine qu'elle recouvre ainsi que la diversité et le renouvellement des idées qu'elle met en œuvre.

à suivre ...



$$216\,x = (36 \pm y\sqrt{3y})\,(3 \pm \sqrt{48-2y})^2$$