A VOS STYLOS

PROBLÈME 27

Énoncé

Soient α et x_0 des nombres strictement positifs. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n}.$$

Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Solution (E. Kern, M. Krier et D. Schneider)

Il est clair que les x_n sont strictement positifs et strictement croissants ; ne pouvant avoir de limite finie (une telle limite, soit l, devrait vérifier $l = l + \frac{\alpha}{l}$), ils tendent vers l'infini. En additionnant les relations

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{x_n^2},$$

on obtient

$$x_n^2 = 2n\alpha + x_0^2 + \alpha^2(\frac{1}{x_0^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2}).$$

Divisons les deux membres par n. Puisque la suite $1/x_n^2$ tend vers zéro, il en va de même de ses moyennes de Cesaro. Donc x_n^2/n tend vers 2α, et x_n est équivalent à $\sqrt{2n\alpha}$.

Nous avons reçu des solutions de F. Brassart (Arras), J. Dautrevaux (06 Saint-André), X. Fernique (Strasbourg), G. Hecquet (Toulouse), E. Kern (Strasbourg), M. Krier (Strasbourg), P. Renfer (Ostwald), D. Schneider (Strasbourg) et A. Trœsch (Strasbourg).

Trois d'entre elles (celles de X. Fernique, E. Kern et, par une méthode non-standard, A. Trœsch) mettent en évidence le lien entre le comportement de x_n et celui de la solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{x}$.

Plus généralement, E. Kern pose $g(x) = \alpha x^{1-\beta}$ ou $g(x) = \alpha e^{-\beta x}$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) et montre que, pour $f > 0$, continue et équivalente à g au voisinage de $+\infty$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ sont équivalentes, quand n tend vers l'infini, entre elles et à $y(n)$, où y est n'importe quelle solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = g(y)$. Il demande pour quelles autres fontions g ce résultat subsiste.

G. Hecquet nous signale un résultat plus précis, figurant en exercice dans le livre de J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, "Cours de mathématiques - 2 : Analyse", Chapitre II.4 (éd. Dunod, 1988) (nos excuses aux lecteurs; nous tâcherons d'être plus originaux la prochaine fois) : la différence

$$x_n - \sqrt{x_0^2 + 2\alpha n}$$

tend vers zéro. Ceci peut s'obtenir en l'écrivant

$$\frac{x_n^2 - (x_0^2 + 2\alpha n)}{x_n + \sqrt{x_0^2 + 2\alpha n}}$$

et en remarquant que le numérateur, égal à $\frac{\alpha^2}{x_0^2} + \cdots + \frac{\alpha^2}{x_{n-1}^2}$, croît logarithmiquement en n alors que le dénominateur est en $\sqrt{n}$. Bien entendu, la constante x_0^2 sous le radical n'a aucune influence et peut être omise.

PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donnés un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x, y\} \in G \text{ et } \{y, z\} \in G \Longrightarrow \{x, z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.

Indication

La formule dépend de la parité de n.

PROBLÈME 29

Énoncé

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.

PROBLÈME 30

Énoncé

Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?