PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

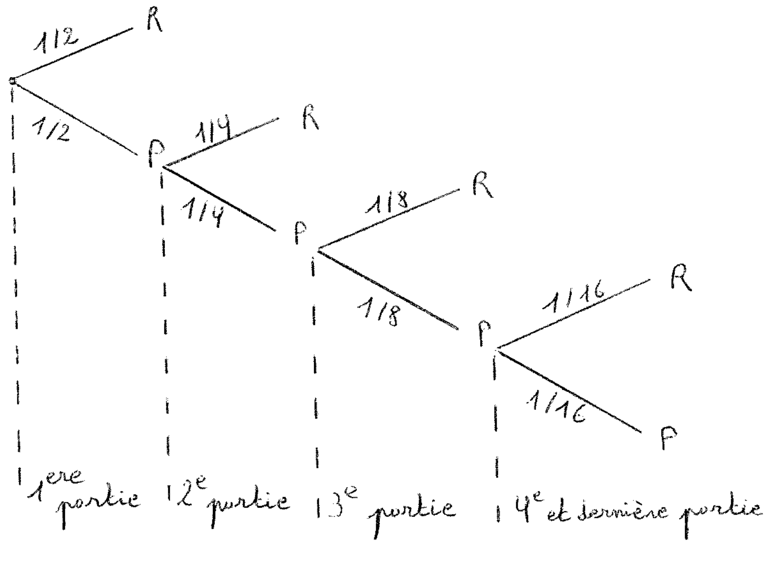
Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

Nous publions ici les réponses aux problèmes 1 et 3 envoyés respectivement par Bruno Muller et Estelle Schneider, tous deux élèves de Terminale C au Lycée Fustel de Coulanges de Strasbourg. Nous vous convions à envoyer des solutions des problèmes 2, 4 et 5 (de préférence d'élèves).

SOLUTION DU PROBLÈME 1

Je vais tout d'abord représenter sur un schéma les probabilités de chaque joueur de gagner :

Appelons : R : l'évènement où le riche gagne.
P : l'évènement où le pauvre gagne.
1/2 représente la probabilité de chaque évènement.



Lorsque le pauvre gagne, il accepte de rejouer. Le nombre de parties maximum par jour est de 4.

Donc pour que le pauvre gagne un jour, il doit gagner les 4 parties du jour. La probabilité pour que le pauvre gagne un jour est de

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad \text{(voir schéma)}$$

Par contre, le riche arrête le jeu dès qu'il gagne, donc sa probabilité de gagner est de

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} .$$

Pour la première partie, il y a 2 pièces d'or en jeu (une provenant du pauvre et une provenant du riche).

Pour la 2e partie, si elle a lieu, il y aura 4 pièces d'or en jeu (deux provenant du pauvre, les deux gagnées à la 1ère partie, et deux pièces supplémentaires du riche).

S'il y a une 3e partie, il y aura 8 pièces d'or en jeu (quatre provenant du pauvre, et quatre nouvelles pièces du riche)

Enfin la 4e partie, si elle a lieu, rassemblera 16 pièces d'or.

Donc si le pauvre gagne, il aura 16 pièces d'or (une provenant de lui, la première pièce jouée, et 15 autres pièces provenant du riche).

Par contre, quelque soit la partie, le riche ne gagne que <u>la</u> pièce d'or du pauvre jouée à la première partie, plus éventuellement les siennes qu'il récupère.

Donc, si on multiplie les probabilités de gagner par la somme gagnée, on obtient

pour le pauvre : $\frac{1}{16} \times 15 = \frac{15}{16}$

pour le riche $\frac{15}{16} \times 1 = \frac{15}{16}$

Donc, même si le riche gagne souvent, les deux joueurs jouent dans les mêmes conditions ; après plusieurs mois, le riche ne verra pas sa fortune s'accroître, tandis que le pauvre restera toujours pauvre.

SOLUTION DU PROBLÈME 3

. $3°$ peut encore s'écrire $3° = 18° - 15°$

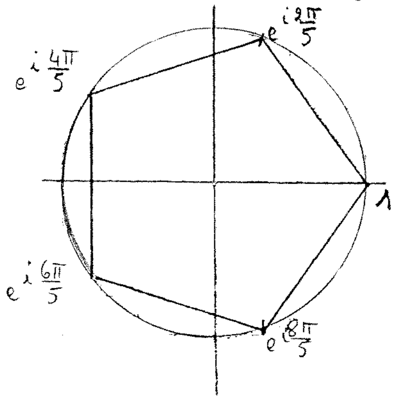
$$= (90° - 72°) - (45° - 30°)$$

Avec les formules de duplication on pourra trouver cos $3°$, sin $3°$ et tan $3°$.

Les cosinus et sinus de $90°$, $45°$ et $30°$ sont connus

1) Calcul du cosinus et du sinus de $72° = \frac{2\pi}{5}$ rad

Déterminons les racines 5^e de 1



$$z^5 - 1 = 0$$

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

Si $z \neq 1$ $\quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

En divisant les 2 membres par z^2 :

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

or $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$

d'où $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0$

- Soit $u = z + \frac{1}{z}$

$$u^2 + u - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ donc $u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Si $\varepsilon = \pm 1$ $u = \frac{-1 + \varepsilon\sqrt{5}}{2}$

- Si $u = z + \frac{1}{z}$ $uz = z^2 + 1$

$$z^2 - uz + 1 = 0$$

$$\Delta = u^2 - 4$$
$$= \left(\frac{-1 \pm \varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4$$
$$= \frac{6 - 2\varepsilon\sqrt{5}}{4} - 4$$
$$= \frac{3 - \varepsilon\sqrt{5}}{2} - 4$$
$$= \frac{-5 - \varepsilon\sqrt{5}}{2}$$

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{\frac{5+\varepsilon\sqrt{5}}{2}}}{2}$$

$$z = \frac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{4} \pm i \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\varepsilon\sqrt{5}}{2}}$$

Sous cette forme, on peut déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$

* $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

* $\sin \frac{2\pi}{5} > 0$ donc $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

2) <u>Déterminons $\cos 3°$, $\sin 3°$, $\tan 3°$.</u>

* <u>Calcul de $\cos 18°$ et $\sin 18°$</u>

$$\begin{aligned}\cos 18° &= \cos(90° - 72°)\\ &= \cos 90° \cos 72° + \sin 90° \sin 72°\\ &= \sin 72° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 18° &= \sin(90° - 72°)\\ &= \sin 90° \cos 72° - \sin 72° \cos 90°\\ &= \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{aligned}$$

* <u>Calcul de $\cos 15°$ et $\sin 15°$</u>

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot \sin 15° &= \sin(45° - 30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

* Calcul de $\cos 3°$

$$\cos 3° = \cos(18° - 15°)$$
$$= \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{5+\sqrt{5}} \times \frac{1}{4} \times \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\boxed{\cos 3° = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}} \times (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)}$$

* Calcul de $\sin 3°$

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°)$$
$$= \sin 18° \cos 15° - \sin 15° \cos 18°$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\sin 3° = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]}$$

* Calcul de $\tan 3°$

$$\tan 3° = \frac{\sin 3°}{\cos 3°} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) + (1-\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + (1+\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Soit $\alpha = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$$\tan 3^\circ = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)+(1-\sqrt{3})\alpha}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+(1+\sqrt{3})\alpha}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{2(\sqrt{5}-1)^2+2(10+2\sqrt{5})+\alpha\left[(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{5}-1)(4+2\sqrt{3})\right]}{(4-2\sqrt{3})(6-2\sqrt{5})-(4+2\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{32+8\alpha(1-\sqrt{5})}{-16-32\sqrt{3}-16\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}\ \frac{4+\alpha(1-\sqrt{5})}{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{4(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})+\alpha(1-\sqrt{5})(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})}{8+4\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{8}\ \frac{4(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})+\alpha(6+2\sqrt{3}-2\sqrt{5}-2\sqrt{15})}{2+\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(2-\sqrt{3})(2+4\sqrt{3}-2\sqrt{5})+\alpha(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15})\right]$$

$$= -\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\left[(\sqrt{3}-1)(2+4\sqrt{3}-2\sqrt{5})+\alpha(\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15})\right]$$

$$= -\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\left[10-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{15}+\alpha(2\sqrt{3}-2\sqrt{5})\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\left[\alpha(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\underbrace{\sqrt{15}-\sqrt{5}+\sqrt{3}-5}_{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{5})}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{3})\left[\alpha-\sqrt{5}-1\right]$$

$$\boxed{\tan 3^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{3})\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right)}$$

ÉNONCÉ DU PROBLÈME 5

Problème sur le jeu des sauvages, appelé jeu des noyaux

Le baron de la Hontan fait mention de ce jeu dans le second tome de ses Voyages de Canada. Voici comment il s'explique :

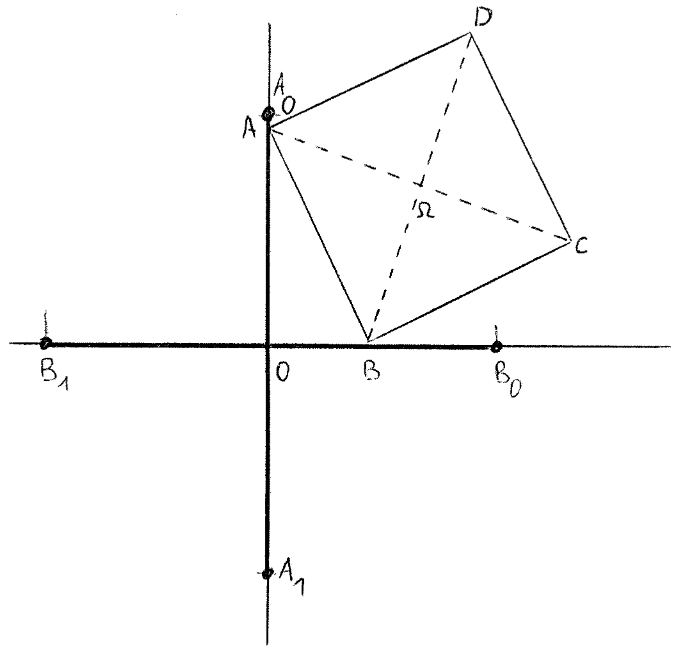
On y joue avec huit noyaux noirs d'un côté et blancs de l'autre; on jette les noyaux en l'air : alors si les noirs se trouvent impairs, celui qui a jeté les noyaux gagne ce que l'autre Joueur a mis au jeu. S'ils se trouvent ou tous noirs ou tous blancs, il en gagne le double; et hors de ces deux cas il perd sa mise.

On demande lequel des deux Joueurs a de l'avantage, en supposant qu'ils mettent également au jeu.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME 6

Les segments $[A_0A_1]$ et $[B_0B_1]$ sont perpendiculaires, ont même milieu O et même longueur $4a$.

Un carré $ABCD$ **direct** de côté $2a$ varie de telle façon que
A décrit le segment A_0A_1
B décrit le segment B_0B_1.



1) Trouver le lieu que décrit le centre ω du carré.
2) Montrer qu'il y a une infinité de points fixés solidement au carré qui décrivent chacun respectivement un segment de droite.
3) Trouver le lieu décrit par un point P fixé quelconque du carré.