ROTATIONS, NOMBRES COMPLEXES ET QUATERNIONS

Constantin TZANAKIS
DEPARTEMENT D' ÉDUCATION
UNIVERSITÉ DE CRÈTE
74100 RETHYMNON, CRÈTE, GRÈCE

1. INTRODUCTION

L'approche habituelle de l'enseignement des Mathématiques, est essentiellement déductive. Mais cette approche a l'inconvénient de cacher la motivation de l'introduction de nouveaux concepts, théorèmes et théories, et empêche par conséquent la compréhension profonde du sujet. Il est difficile de discerner la relation entre concepts ou domaines mathématiques qui de prime abord sont tout à fait differents.

D'autre part, en suivant les étapes fondamentales du développement historique d'un problème mathématique et en présentant les questions et problèmes qui ont servi comme prototypes à ce développement, le problème peut être enseigné, en mettant au clair les motivations qui ont permis d'introduire les nouveaux concepts ou axiomes. Ainsi la relation entre différents concepts mathématiques ou théories peut être présentée avec clarté et l'étudiant peut se servir de ces notions pour une étude plus approfondie de résultats plus avancés qui sont assez souvent hors du contexte du cours enseigné.

Comme exemple de cette approche, nous allons considérer la relation entre les concepts suivants : (i) nombres complexes (ii) groupe de rotations (iii) isomorphisme et homomorphisme de structures algébriques abstraites, comme elles peuvent être enseignées à un niveau élémentaire au lycée, ou au niveau plus élevé d'un cours universitaire. Plus spécialement, nous présenterons des aspects d'importants développements de l'algèbre du 19^{e} siècle, qui ont été motivés par l'interprétation géométrique des nombres complexes. La présentation n'est pas strictement historique mais elle est inspirée par les étapes décisives de cette évolution.

Il est bien connu que pendant une longue période, après leur première introduction au 16^{e} siècle, comme moyen de résolution d'équations algébriques, les nombres complexes ont été considérés comme un concept, logiquement non satisfaisant, d'où le nom d'unité imaginaire pour $i = \sqrt{-1}$. Leur présentation géométrique comme points du plan euclidien (Wessel 1797, Argand 1806, Gauss 1831 et autres) et la formulation ultérieure de Hamilton, comme couples de nombres réels (1833–1837), jouèrent un rôle crucial pour leur acceptation comme un concept mathématique admissible (voir [6] p. 7–11, 23–26). En plus, cette présentation géométrique suivie par une présentation trigonométrique qui lui est associée, était étroitement liée

© L'OUVERT 75 (1994)

aux rotations du plan (voir les citations du travail de Wessel dans [19] p. XIV). Mais ce qui est moins connu est que ce fait joua un rôle important dans l'évolution de l'algèbre du 19^{e} siècle, en soulevant naturellement la question :
"Est-il possible de généraliser les nombres complexes, en établissant d'une manière ou d'une autre, une relation avec les rotations de l'espace?"

A cette question, formulée précisement en langage moderne dans la section 2, beaucoup de mathématiciens ont essayé de donner une réponse; entre autres, Wessel, Argand, Français, Servois, Gauss et Rodrigues ([19] p.XV–XVI, [12] p. 172–173, [6] p. 10–11 et références incluses). Certains ont approché la solution du problème (en particulier Gauss (1819), Rodrigues (1840) et Servois, comme le reconnaît Hamilton, voir [12] p. 173, [6] p. 10 et références citées). Cependant, Hamilton était le premier à donner une réponse explicite en 1843 en introduisant les quaternions. Même s' il faut admettre que l'approche originale de Hamilton était algébrique, il avait certainement à l'esprit que la généralisation demandée des nombres complexes, (ou triplets comme il les a originellement appelés, voir le commentaire historique en section 4) devait être liée aux rotations de l'espace, dans le sens que nous avons déjà esquissé (voir l'abstract de sa procédure dans [6] p. 28). Ceci est confirmé par les remarques suivantes : (a) Dans la première moitié du 19^{e} siècle, les mathématiciens ont essayé de généraliser le concept de nombre (réel) en respectant les lois usuelles d'opérations algébriques et en les interprétant géométriquement. Il paraît que Gauss était convaincu qu'il n' y avait qu'une seule possibilité, en l'occurence les nombres complexes, dont il a établi l'interprétation géométrique bien connue ([3] p. 84–85 et p. 151). Bien sûr ce fait n' a pas arrêté la recherche pour la généralisation des systèmes de nombres. (b) Dans sa formulation abstraite de nombres complexes comme couples de nombres réels, Hamilton interprétait leur produit en termes de rotations du plan et il a cherché une généralisation de nombres complexes permettant d'établir une interprétation analogue des rotations de l'espace ([4] p.625). Ceci est explicitement exprimé dans la préface de son fameux livre "lectures on quaternions" achevé en 1848 et publié en 1853 ([10] p. 117–155, particulièrement §§36, 43, [3] p. 85). En plus, dans ses "Elements of quaternions" publié pour la première fois en 1866, il introduisit les quaternions et interpréta leurs propriétés algébriques – en particulier la non commutativité de leur produit – par le moyen des rotations de l'espace (voir la citation de ce travail, dans [16] p. 677–683, particulièrement p. 679–680, 683).

Même si Peacock et De Morgan avaient déjà étudié des algèbres différentes de l'algèbre des nombres réels, leurs travaux n' étaient pas largement reconnus comme importants. "C'est l'application géométrique des quaternions de Hamilton qui conduisit à une appréciation générale de nouvelles algèbres qui étaient essentiellement non-commutatives ou associatives dans le sens classique" ([16] p. 678). Ainsi l'invention des quaternions était en fait la première structure non commutative étudiée, influençant énormément l'évolution de l'algèbre, la signification des lois [commutative, associative et distributive des opérations algébriques] seulement

après le développement des systèmes de nombres (particulièrement, les quaternions) qui ne leur obéissent pas" ([6] p. 26).

Au moins implicitement, la question mentionnée ci-dessus a joué un rôle dans le travail de Grassman "Ausdehnungslehre" (1844, 1862) ancêtre du calcul différentiel extérieur ([6] ch. 3). En plus il est possible que ce même problème ait influencé indirectement[1] le travail de Cayley sur la formulation et l'étude de la théorie des matrices et des transformations linéaires. Ceci est d'autant plus plausible que Cayley s'intéressait profondément aux quaternions et publia, le premier après Hamilton, un travail sur le sujet en 1845 ([6], p. 35) où il examine explicitement la correspondance entre rotations de l'espace et quaternions (voir section 4, fin de section 3 et [5] vol. 1, p. 123, [9] p. 74–75). Finalement en 1848 il suivit les fameux exposés donnés par Hamilton sur les quaternions où Hamilton présentait la liaison entre quaternions et autres concepts mathématiques, et particulièrement ceux de déterminant ([6] p. 35–36).

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans ce travail nous inversons l'approche habituelle du problème précité. Inspirés par le processus historique, nous allons être amenés à définir d'importantes notions mathématiques, comme le groupe de rotations, les quaternions, les homomorphismes de groupes etc, au lieu de les utiliser comme point de départ, comme il est fait habituellement.

Dans la section 2 la relation de $\mathbb{C}$ au groupe de rotations du plan est présentée brièvement et le problème de généralisation de $\mathbb{C}$ sera précisément formulé. Dans la section 3 les rotations de l'espace tridimensionel sont étudiées et leur représentation matricielle est donnée. Ainsi en section 4, nous sommes amenés à la découverte des quaternions et à la résolution de notre problème. Afin d'éviter l'utilisation de quaternions pour la représentation de rotations de l'espace nous expliquons en section 5, comment on est amené naturellement à l'étude de matrices unitaires 2×2. En plus nous présentons leur relation aux quaternions et à la fondation de la cinématique des corps solides réalisée par Cayley et Klein. Il doit être remarqué que les travaux originaux ne sont pas explicitement mentionnés. Nous avons préféré donner une bibliographie plus accessible, où l'intéressé trouvera les références des papiers originaux.

2. NOMBRES COMPLEXES ET ROTATIONS DU PLAN

Dans un système de coordonnées donné, chaque nombre complexe a une représentation trigonométrique qui correspond à un point du plan euclidien

$$z \in \mathbb{C}, z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta},\ \theta \in]-\pi, \pi] \tag{2.1}$$

où la dernière relation, suggérée par le théorème de de Moivre définit la fonction exponentielle complexe, de telle manière que les principales propriétés algébriques de la fonction exponentielle réelle restent valables sur $\mathbb{C}$. En plus, elle implique

[1] Il doit être souligné que Cayley en 1894 a explicitement nié avoir introduit la notion de matrice à partir des quaternions.

une interprétation géométrique de la multiplication de z par $e^{i\phi}$, c'est à dire une rotation de z autour de 0 d'angle ϕ. D'autre part, si une telle rotation applique le point $A = (x, y)$ au point $A' = (x', y')$ alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Donc une rotation plane d'angle ϕ, definit une matrice 2×2

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) donne une forme générale pour les matrices orthogonales 2×2 de déterminant 1 c.a.d une matrice satisfaisant

$$A^{-1} = A^t \tag{2.3'i}$$

$$\det A = 1 \tag{2.3'ii}$$

En général les matrices $n \times n$ satisfaisant (2.3') forment un groupe multiplicatif qui s' appelle groupe orthogonal spécial $SO(n)$. Le nom vient du fait que pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{x'} = A\vec{x}$, A satisfait (2.3'i), si et seulement si

$$|\vec{x'}| = |A\vec{x}| = |\vec{x}| \tag{2.4}$$

où $|\vec{x}|$ est la norme euclidienne de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Notez que $SO(2)$ est un groupe Abélien, et il est facile de vérifier que la matrice $A_{\phi_1} A_{\phi_2}$ provenant de la composition de deux rotations d' angles ϕ_1 et ϕ_2 est égale à $A_{\phi_1+\phi_2}$. Donc nous sommes amenés à la

Proposition 2.1 : $SO(2)$ muni de la multiplication des matrices est un groupe Abélien, isomorphe au groupe de rotations du plan, muni de l'opération de composition, (l'angle de rotation appartenant à $]-\pi, \pi](2\pi)$)

Par le théorème de de Moivre, nous pouvons obtenir le corollaire suivant :

Corollaire : Le groupe $(SO(2), .)$ est isomorphe au sous-groupe multiplicatif $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$, l'isomorphisme étant établi par :

$$e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Les égalités (2.1) et (2.5) suggérent la définition de l'application :

$$a + bi = \rho e^{i\theta} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.5'}$$

et exactement de la même façon nous pouvons démontrer :

Proposition 2.2 : Si

$G = \left\{ A : A \text{ est une matrice réelle } 2 \times 2 \text{ de la forme } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ |a| + |b| \neq 0 \right\}$

et $G_0 = G \cup \{0\}$ alors : (a) G_0 est un espace vectoriel réel de dimension 2, pour les opérations habituelles sur les matrices. (b) L'équation (2.5′) définit un isomorphisme entre les espaces vectoriels G_0 et $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ étant identifié avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. (c) G et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ sont des groupes multiplicatifs, isomorphes, abéliens, et la relation (2.5′) définit leur isomorphisme.

La proposition 2.2(b,c), montre que G_0 est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$. D'autre part chaque $A \in G$ définit la composition d'une rotation d'angle $\theta = \arccos\left(\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}\right)$ et d'une homothétie $\vec{x} \mapsto \rho\vec{x}$ où $\rho = \sqrt{\det A} = \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi "la question se pose maintenant : comment les transformations correspondantes dans l'espace de dimension 3 peuvent-elles être représentées par calculs de nombres complexes d'un ordre supérieur" ([12] p. 172). Cette question est identique a celle soulevée en section 1 et la proposition 2.2 permet d'établir une formulation précise :

Question : **Est-il possible de trouver un corps, extension de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qui contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}$), dont le groupe de multiplication est isomorphe au groupe généré par les rotations et les homothéties de l'espace euclidien tridimensionel?**

Il est évident que ce que nous cherchons est une généralisation de la Proposition 2.2(c) dans l'espace, pour une sorte de nombres "complexes généralisés".

Remarques (a) : Contrairement à ce qui se passe en deux dimensions, rotations et similitudes dans l'espace tridimensionel, ne génèrent pas un ensemble de matrices qui soit un espace vectoriel réel. En section 5 nous généralisons la Proposition 2.2(b,c) pour les matrices complexes 2×2.

(b) : En 1833 Peacock introduisit le "Principle of Permanence" selon lequel, chaque généralisation d'une notion algébrique doit obéir à des règles de calcul, ayant les mêmes propriétés que celles de la notion d'origine ([7], vol. II p.360–361 et vol I p. 92–93 et 106. Voir aussi remarques sur quaternions en section 1). Ce principe apparaît alors en langage mathématique moderne dans la formulation de la question mentionnée plus haut.

(c) : Chaque $a + ib$ définit biunivoquement un opérateur linéaire sur $\mathbb{C}$:

$$x + iy \mapsto x' + iy' = (a + ib)(x + iy) \tag{2.6}$$

qui, d'un point de vue géométrique, est la composition d'une rotation et d'une homothétie dans le plan (cf (2.5′), (2.2)). C'est un point essentiel qui révèle la relation entre $\mathbb{C}$ et les rotations du plan, contenue dans la Proposition 2.2. Cependant, une deuxième interprétation, mathématiquement équivalente mais conceptuellement différente, est de regarder (2.6) comme une relation qui permet

la multiplication des vecteurs du plan. Et c'est un fait historique qu'au début tous les mathématiciens (y compris Hamilton) pensaient que les vecteurs dans l'espace étaient une sorte de généralisation de nombres complexes, pour lesquels une règle de multiplication devait être inventée ayant une interprétation analogue à celle impliquée par (2.6) pour les vecteurs du plan ([10] Préface au "Lectures on Quaternions" §§36, 43). Mais de ce point de vue, la question posée plus haut ne pourrait pas être formulée si précisement, étant donné que la deuxième interprétation de la multiplication de $\mathbb{C}$ est essentiellement due à la Proposition 2.2(a,b) pour laquelle il n' existe pas d'analogue dans l'espace tridimensionel (voir remarque (a) et les commentaires historiques en Section 4).

D'autre part, cette seconde interprétation, était plus évidente en ce temps là (c'est-à-dire avant 1843) parce que la notion de matrice (si bien adaptée pour l'étude des rotations et des transformations linéaires en général) n' était pas encore disponible : en fait, comme il était affirmé plus tard par Gibbs ([6] p. 76, [19] p. XXIII), l'idée décisive permettant de l'établir ne peut pas être recherchée avant le travail de Grassmann, en 1844. En 1850 Sylvester introduisit la notion—et le nom— de matrice et il montra comment former son déterminant ([7] vol. I p. 96, [3] p. 85, [14] vol. 3 ch. XLII, §704). Cependant, c'est Cayley qui en 1855 définit la multiplication de matrices et ultérieurement en 1858 et 1866, présenta la théorie algébrique adéquate et leur relation aux transformations linéaires ([5] vol. 2 p. 475, [7] vol. I p. 96, [11] p. 204–205). En fait "la réponse est venue directement de la simple observation de la méthode par laquelle les transformations (linéaires) de la théorie des invariants algébriques [dans laquelle Cayley et Sylvester ont été impliqués à la fois] sont combinées.

3. LES ROTATIONS DE L'ESPACE

Nous allons étudier maintenant les rotations de l'espace. Sans perdre en généralité, nous considérons seulement des rotations autour d'un axe passant par l'origine O d'un système de coordonnées $Oxyz$ arbitrairement choisi. Une rotation est complètement déterminée si (a) : on connait l' axe de rotation, disons la ligne droite (ϵ) et l'angle de rotation ω ou si (b) : on sait que le système $Oxyz$ est amené, par rotation à coincider avec le système $Ox'y'z'$.
Cas (a) : Soit (ϵ) dans la direction du vecteur unitaire $\vec{n}$, et α, β, γ les angles de direction : en général nous pouvons supposer α, β, $\gamma \in [0, \pi]$ (figure 1).

Alors,

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{3.1}$$

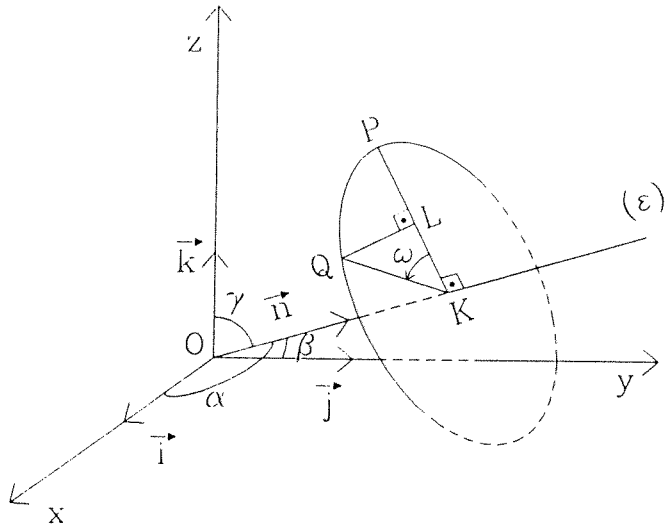

Figure 1

Soit le point $P = (x, y, z)$ transformé en $Q = (x', y', z')$ sous l'effet de la rotation. Nous voulons exprimer x', y', z' comme fonctions de x, y, z. Si Π est le plan de P, K, Q où K est la projection de P sur (ϵ) et si L est la projection de Q sur PK, alors par les figures 1 et 2 et grâce à la relation $|\overrightarrow{KQ}| = |\overrightarrow{KP}|$ nous pouvons trouver facilement :

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LQ} \tag{3.2}$$

$$\overrightarrow{PL} = (1 - \cos\omega)\overrightarrow{PK} = (1 - \cos\omega)(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OP}) = -(1 - \cos\omega)(\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n})\vec{n}) \tag{3.3i}$$

$$\overrightarrow{LQ} = \frac{|\overrightarrow{LQ}|\vec{n} \times \overrightarrow{KP}}{|\vec{n} \times \overrightarrow{KP}|} = \frac{|\overrightarrow{KQ}| \sin\omega\vec{n} \times \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{KP}|} = \sin\omega\vec{n} \times \overrightarrow{OP} \tag{3.3ii}$$

où nous avons utilisé la notation habituelle pour le produit scalaire et le produit vectoriel de vecteurs. La substitution de (3.3) dans (3.2) nous permet d'obtenir finalement :

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - (1 - \cos\omega)(\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n})\vec{n}) + \sin\omega\ \vec{n} \times \overrightarrow{OP} \tag{3.4}$$

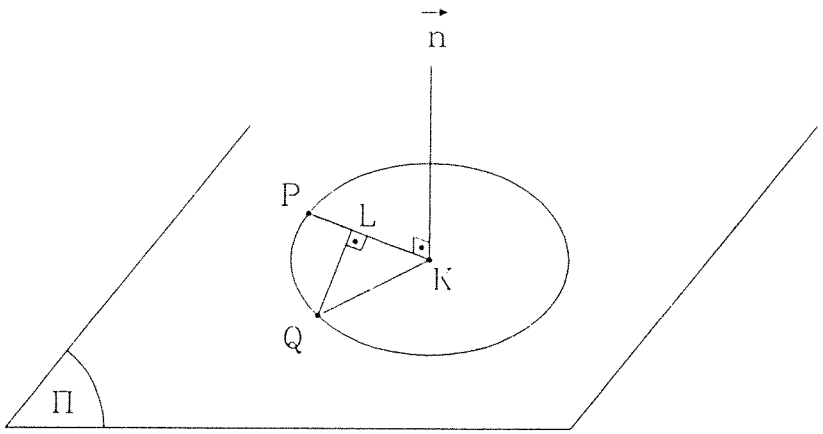

Figure 2

L'équation (3.4) écrite sous forme de composantes algébriques, nous suggère l'introduction des paramètres d'Euler (voir notice historique à la fin de cette section) définis par

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= \cos(\omega/2), \qquad e_1 = \cos\alpha \sin(\omega/2) \\ e_2 &= \cos\beta \sin(\omega/2), \; e_3 = \cos\gamma \sin(\omega/2) \end{aligned}\right\} \text{ ou } \begin{cases} e_0 = \cos(\omega/2) \\ \vec{e} \equiv (e_1, e_2, e_3) = \vec{n}\sin(\omega/2) \end{cases} \tag{3.5}$$

Remarquez que (3.4) peut être mise sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OQ} = (2e_0^2 - 1)\overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e})\vec{e} + 2e_0\vec{e} \times \overrightarrow{OP}$$

ou sous forme matricielle, en utilisant la relation

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{3.6}$$

qui est déduite de (3.5), comme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_1e_3 + e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 + e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_0e_2) & 2(e_2e_3 + e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.4'}$$

Le sens de (3.6) sera étudié en section 4. Ici nous remarquons seulement que si A est la matrice définie en (3.4'), alors après quelques calculs algébriques nous trouvons que $A \in SO(3)$. Des démonstrations plus simples qui évitent des calculs, peuvent être obtenues à partir de (3.7) ou par l'équation de conservation de la norme du vecteur, (2.4). Inversement pour chaque $A \in SO(3)$, il est évident que la transformation $\vec{x'} = A\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$ définit une rotation autour de l'origine du système de coordonnées. Ainsi $SO(3)$ est en correspondance biunivoque avec les rotations de l'espace.

Cas (b) : Supposons que le système $Oxyz$ soit transformé en $Ox'y'z'$. Soit $O\xi$ l'intersection des plans Oxy et $Ox'y'$. Alors les angles d'Euler (Euler 1776) ϕ, θ, ψ sont déterminés de façon unique par (Figure 3c)

$$\phi, \psi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\phi = \angle(Ox, O\xi),\ \psi = \angle(O\xi, Ox'),\ \theta = \angle(Oz, Oz')$$

où la notation indique qu'ils sont mesurés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Maintenant, il est évident que la rotation de $Oxyz$ à $Ox'y'z'$ est la composition des rotations suivantes, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
— une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe Oz (système $O\xi\eta\zeta$)
— une rotation d'un angle θ autour de l'axe $O\xi$ (système $O\xi'\eta'\zeta'$)
— une rotation d'un angle ψ autour de l'axe $O\zeta'$ (système $Ox'y'z'$)
Remarque : Dans la littérature concernant les angles d'Euler, la définition n'est pas unique. Ici nous suivons [8] ch. 4

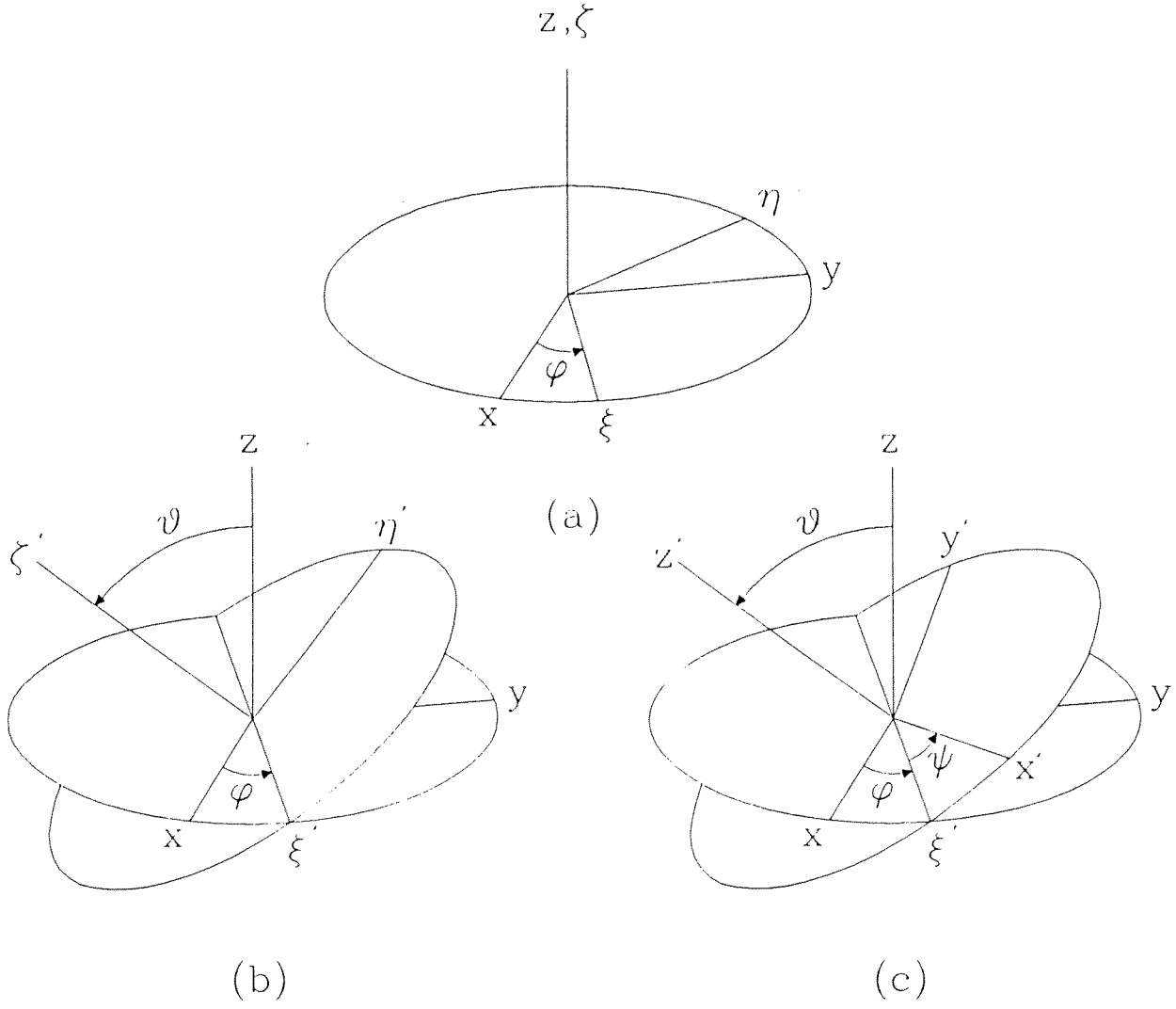

Figure 3

Une expression explicite des rotations définies plus haut peut être obtenue en remarquant que chacune d'entre elles est une rotation autour d'un des axes du système de coordonnées correspondant. Par exemple pour la rotation ϕ, il est clair que z n'est pas changé et en conséquence l'équation matricielle correspondante est [cf (2.2)]

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De la même façon :

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_\psi A_\theta A_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Les descriptions des rotations de l'espace (a) et (b) données par (3.4′) et (3.7) sont évidemment équivalentes, et par conséquent la relation entre les angles d'Euler et les paramètres d'Euler est donnée par l' identification des matrices correspondantes. Ainsi après quelques calculs élémentaires nous obtenons :

$$\begin{aligned} e_0 &= \pm\cos\left(\tfrac{\psi+\phi}{2}\right)\cos\tfrac{\theta}{2} \quad & e_2 &= \pm\sin\left(\tfrac{\psi-\phi}{2}\right)\sin\tfrac{\theta}{2} \\ e_1 &= \pm\cos\left(\tfrac{\psi-\phi}{2}\right)\sin\tfrac{\theta}{2} \quad & e_3 &= \pm\sin\left(\tfrac{\psi+\phi}{2}\right)\cos\tfrac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'équation (3.5) nous permet facilement de déduire que chaque ensemble $\{e_i\}$ définit exactement une rotation dans l'espace. L'inverse n' est pas vrai, parce que $\{-e_i\}$ définit la même rotation à cause de (3.5). Nous y reviendrons dans les sections suivantes. D'après (3.4′), (3.7) il est clair que la représentation des rotations par les angles d'Euler est plus compliquée et moins symétrique que celle basée sur les paramètres d'Euler ou $(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$. Bien sûr l'avantage de leur utilisation est la factorisation de la rotation (3.7) et le fait qu'elles sont indépendantes, contrairement à ce qui se passe avec $\{e_i\}$ ou $\{\omega, \alpha, \beta, \gamma\}$ (cf (3.1), (3.6)). Dans une terminologie plus rigoureuse, elles forment un ensemble de coordonnées pour $SO(3)$ considéré comme groupe de Lie.

Commentaire historique : En 1770, Euler introduisit les e_i dans l'expression paramétrique d'une isométrie de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ (il obtint aussi le résultat correspondant pour $\mathbb{R}^4$). Ils apparaissent aussi en 1776 dans son étude

de la mécanique des corps rigides. En 1841 ils sont introduits par Rodrigues dans la description de rotations infinitésimales dans $\mathbb{R}^3$. En 1845, c'est en utilisant les quaternions, que Cayley obtient les expressions d'Euler dans la toute première publication sur les quaternions après celle de Hamilton (voir Sections 1 et 4) et en 1846 il réussit à les généraliser dans $\mathbb{R}^n$. Un peu plus tard, Hermite donna la forme paramétrique des isométries de toute forme quadratique dans $\mathbb{R}^3$. Finalement, en 1855 Cayley exprima les résulats de Hermite comme produit de matrices. Il parait que ce fait joua un rôle essentiel dans sa formulation du calcul matriciel en 1858 (pour des détails supplémentaires voir [7] vol. I p. 66–67, 95–96, [5] vol. 1 p. 123 et 2 p. 475, [9] p. 71, [20] §9 et références ci mentionnées).

4. "LE PROBLÈME DE HAMILTON" ET LES QUATERNIONS

Maintenant nous sommes preparés à étudier en détail la question posée à la fin de la Section 2. Appelons ce problème "problème de Hamilton" non pour cause de précision historique mais dans le but de mettre en évidence le fait que ce problème dans sa vague formulation présentée en section 1, était une des motivations principales de Hamilton, dans son effort vers une de ses plus grandes découvertes qui était la définition des quaternions. Dans cette section cette notion sera décrite en langage moderne . Comme point de départ nous prenons (3.6) qui nous suggère de considérer $\{e_i\}$ comme coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^4$. Par conséquent si nous écrivons :

$$\vec{p} \in \mathbb{R}^4, \vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{\imath} + e_2\vec{\jmath} + e_3\vec{k} \tag{4.1}$$

où

$$\vec{1} = (1,0,0,0),\ \vec{\imath} = (0,1,0,0),\ \vec{\jmath} = (0,0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,0,1) \tag{4.2}$$

est le repère canonique de $\mathbb{R}^4$, alors (3.7) représente la sphère tridimensionelle de rayon 1, S^3, dont chaque point définit exactement une rotation. L'inverse n'est pas vrai, voir dernier paragraphe de la Section 3.

Le pas crucial vers la découverte des quaternions, relié au problème de Hamilton, est l'étude de la composition (produit) de deux rotations de l' espace et des paramètres d'Euler correspondants. Plus spécialement, si pour deux rotations de matrices A, A' et de paramètres d'Euler respectifs $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$, leur composition de matrice $A'' = AA'$ a comme paramètres d'Euler $\{e''_i\}$, alors en utilisant (3.4) et (3.6) nous obtenons (après quelques calculs algébriques, fastidieux mais élémentaires) que :

$$\begin{aligned}
e''_0 &= e_0e'_0 - e_1e'_1 - e_2e'_2 - e_3e'_3 \\
e''_1 &= e_1e'_0 + e_2e'_3 - e_3e'_2 + e_0e'_1 \\
e''_2 &= e_2e'_0 + e_3e'_1 - e_1e'_3 + e_0e'_2 \\
e''_3 &= e_3e'_0 + e_1e'_2 - e_2e'_1 + e_0e'_3
\end{aligned} \tag{4.3}$$

L'interprétation la plus intéressante de (4.3) est qu'elle nous définit une règle de multiplication pour les éléments de $\mathbb{R}^4$. Plus précisément si $\vec{p}$, $\vec{p'} \in \mathbb{R}^4$ avec

$$\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{\imath} + e_2\vec{\jmath} + e_3\vec{k}, \quad \vec{p'} = e'_0\vec{1} + e'_1\vec{\imath} + e'_2\vec{\jmath} + e'_3\vec{k} \tag{4.3'}$$

et si nous définissons le produit

$$\vec{p}\vec{p'} = \vec{p''} = e_0''\vec{1} + e_1''\vec{\imath} + e_2''\vec{\jmath} + e_3''\vec{k} \tag{4.3''}$$

où $\{e_i''\}$ sont donnés par (4.3), alors en prenant successivement $\vec{p}$, $\vec{p'}$ comme éléments du repère canonique (4.2) nous obtenons que $\vec{1}$ est l'élément neutre et que

$$\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = \vec{k}^2 = -\vec{1} \tag{4.4i}$$

$$\vec{\imath}\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}\vec{\imath} = \vec{k}, \qquad \vec{\jmath}\vec{k} = -\vec{k}\vec{\jmath} = \vec{\imath}, \qquad \vec{k}\vec{\imath} = -\vec{\imath}\vec{k} = \vec{\jmath} \tag{4.4ii}$$

qui sont les relations réputées de Hamilton définissant le produit des éléments du repère de quaternions. Il est clair maintenant que à cause de (4.4) les équations (4.3) et (4.3'') sont équivalentes. Alors de (4.4) nous concluons que cette multiplication est non communative, dotant ainsi $\mathbb{R}^4$ de la structure d'un corps non abélien. Donc nous pouvons donner la

Définition 4.1 : $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ avec l'addition habituelle et le produit défini par (4.4) (et étendu linéairement à tous les éléments) est le corps (non abélien) H des quaternions.

Remarques : Si pour $\vec{p}$ dans (4.1), $|\vec{p}|$ est la norme euclidienne et si nous définissons son conjugué $\vec{p^*}$ par :

$$\vec{p^*} = e_0\vec{1} - e_1\vec{\imath} - e_2\vec{\jmath} - e_3\vec{k} \tag{4.5}$$

nous pouvons démontrer facilement :

$$(\vec{p}\vec{q})^* = \vec{q^*}\vec{p^*}, \quad |\vec{p}\vec{q}| = |\vec{p}||\vec{q}|, \quad \vec{p}^{-1} = \frac{\vec{p^*}}{|\vec{p}|^2} \tag{4.6}$$

et par conséquent que

(a) : l'ensemble $H_1 = \{\vec{p} \in H : |\vec{p}| = 1\}$ est un sous groupe multiplicatif de H

(b) : le sous ensemble de H, $\{\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{\imath},\ e_0, e_1 \in \mathbb{R}\}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Ceci explique la notation inhabituelle dans (4.2).

(c) : L'application

$$H_1 \to SO(3) : e_0\vec{1} + e_1\vec{\imath} + e_2\vec{\jmath} + e_3\vec{k} \mapsto \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \tag{4.7}$$

est un homomorphisme injectif de groupes, son expression explicite étant (3.4'). En fait, un calcul direct montre qu'en utilisant les quaternions, (3.4') peut être présentée dans une forme plus élégante :

$$\vec{x'} = \vec{p}\vec{x}\vec{p}^{-1} \tag{4.8}$$

Ici $\vec{p}$ est donné par (4.1) en termes d'angles d'Euler et :

$$\vec{x} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \quad \vec{x'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$

Cette relation des quaternions aux rotations de l'espace fut découverte par Cayley dès 1845 dans sa publication déjà mentionnée en section 1. En plus, celle-ci montre clairement que $\vec{p}$ et $-\vec{p}$ définissent la même rotation comme nous l'avons mentionné déjà au dernier paragraphe de la Section 3.

Finalement si la contrainte (3.6) ne s' impose plus, alors (4.7) est un homomorphisme injectif de $H - \{0\}$ dans le groupe généré par les rotations et les similitudes de l'espace. Il est clair maintenant que (b) et (c) impliquent une réponse négative au problème de Hamilton pour deux raisons : (i) La multiplication dans H est non commutative, (ii) (4.7) n'est pas un isomorphisme (voir (4.8)). Dans la section suivante nous verrons comment nous pouvons surmonter (ii) pour obtenir une compréhension plus profonde des rotations de l'espace et généraliser ainsi la proposition (2.2). D'autre part, la raison (i) qui constitue l'innovation majeure de Hamilton dans son travail sur les quaternions vue dans un contexte moderne, est insurmontable à cause du fait que $SO(3)$ est un groupe non abélien et l'isomorphisme entre groupes conserve la (non) commutativité du produit.
Commentaires historiques : Comme nous l'avons déjà mentionné en Section 1, l'approche originale de Hamilton était de caractère algébrique. Exprimée en langage moderne, elle consiste à munir $\mathbb{R}^4$ d'un produit de telle façon qu'avec l'addition habituelle il devienne un corps commutatif satisfaisant (4.6*ii*) ([7] ch. III p. 106 ff). Hamilton dépensa bien du temps en essayant d'obtenir un résultat semblable dans $\mathbb{R}^3$. En fait il essaya de définir le produit de deux vecteurs de l'espace en respectant les propriétés principales du produit de deux vecteurs du plan (particulièrement (4.6ii)), imposée par la représentation géométrique des nombres complexes (voir remarque (c) en Section 2). Bien sûr il s'avéra que c'était impossible. En fait il lui a fallu presque 14 ans pour se rendre compte que la réponse à son problème pouvait être obtenue en considérant $\mathbb{R}^4$ et en rejetant la commutativité du produit ([6] §2 IV, [18]). Plus tard, Cayley (en 1881) et Hurwitz (en 1898) montrèrent que si un produit est défini dans $\mathbb{R}^n$, et induit une structure d'algèbre (en général non associative) réelle, alors (4.6*ii*) peut être valable pour la norme euclidienne seulement si $n = 1, 2, 4, 8$. D'autre part, Frobenius en 1878 et C.S Pierce en 1881 avaient déjà montré que chacune de ces algèbres qui en même temps est un corps (non nécessairement commutatif) c'est-à-dire avec une division non ambigüe, est (isomorphe à) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou H ou à une somme directe de ces corps ([2] p. 159, [7] vol I p. 108, [3] p. 151 et références là-dedans).

5. LES PARAMÈTRES DE CAYLEY–KLEIN ET LE GROUPE $SU(2)$

Dans la section précédente nous avons vu qu'avec la notion des quaternions une réponse négative fut donnée au problème de Hamilton, suggérée par les deux raisons (i) et (ii) données à la fin de la Section 4. Ici nous verrons qu'il est possible (i) de formuler la proposition 2.2 pour H en utilisant des "rotations" dans l'espace complexe $\mathbb{C}^2$, (ii) de donner une réponse au problème de Hamilton en terme de ces "rotations".

Nous avions constaté qu'à cause de (3.6), les paramètres d'Euler peuvent être

interprétés comme coordonnées d'un point sur la sphère S^3 dans $\mathbb{R}^4$. Ceci nous amène aux quaternions dont le calcul correspondant ne nous est pas très familier.

C'est pourquoi si nous voulons éviter cette interprétation évidente des paramètres d'Euler, alors (3.8) suggère naturellement l'introduction des paramètres de Cayley–Klein (CK) (Cayley 1879, Klein 1896)[2]

$$a = \cos(\theta/2)e^{i(\phi+\psi)/2}, \qquad b = \sin(\theta/2)e^{i(\psi-\phi)/2} \tag{5.1i}$$

$$d = a^*, \qquad c = -b^* \tag{5.1ii}$$

En choisissant le signe + dans (3.8) nous avons

$$\left.\begin{aligned} a &= e_0 + ie_3 \\ b &= e_1 + ie_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} e_0 &= \tfrac{a+d}{2} \quad e_1 = \tfrac{b-c}{2} \\ e_3 &= \tfrac{a-d}{2i} \quad e_2 = \tfrac{b+c}{2i} \end{aligned}\right. \tag{5.1$'$}$$

$$ad - bc = 1 \tag{5.2}$$

C'est une question d'algèbre élémentaire de montrer qu'avec l'aide de (5.1′) l'égalité (3.4) s' écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2} & \frac{i(a^2-b^2+c^2-d^2)}{2} & -i(ab+cd) \\ \frac{i(-a^2-b^2+c^2+d^2)}{2} & \frac{(a^2-b^2-c^2+d^2)}{2} & dc-ab \\ i(ac+bd) & db-ac & ad+bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Maintenant si, comme en Section 4, nous considérons des rotations de matrices A, A' et de paramètres CK correspondants (a,b,c,d), (a',b',c',d') et si leur composition ayant comme matrice $A'' = AA'$, a pour paramètres CK $\{a'',b'',c'',d''\}$ alors par (5.3) nous obtenons après des calculs fastidieux mais élémentaires que :

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Ainsi nous sommes amenés naturellement à considérer des matrices complexes de la forme suivante

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

L'égalité (5.5) donne la forme la plus générale d'une matrice complexe 2×2 qui satisfait

$$TT^+ = I \tag{5.6}$$

et ayant comme déterminant $+1$, où T^+ est la matrice adjointe de T. Des matrices $n \times n$ ayant cette propriété sont appelées unitaires. Elles ont un déterminant ± 1 et forment le groupe multiplicatif $U(n)$. Celles qui ont un déterminant $+1$ forment le groupe $SU(n)$ qui est un sous-groupe de $U(n)$. Il est clair que $U(1) = S^1$. En plus pour $T \in U(n)$ et $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$

$$|T\vec{x}| = |\vec{x}| \tag{5.7}$$

[2] Dans son travail original, Cayley utilisa a^*, ib au lieu de a, b ([5], vol 10 p. 153)

où $|\vec{x}|$ est la norme habituelle de $\mathbb{C}^n$. Ainsi (5.7) est l'analogue de (2.4) justifiant l'image présentant les matrices unitaires, comme "rotations" dans $\mathbb{C}^n$. Nous pouvons donc conclure que par (4.1) (5.1′) et (5.5) il existe une correspondance biunivoque entre H et $SU(2)$. De ce qui a été dit plus haut, et en se rappelant de (5.4), (4.3″) il est maintenant facile de compléter les détails dans la démonstration de la proposition :

Proposition 5.1 : Si

$$F = \left\{ T : T \text{ est une matrice } 2 \times 2 \text{ complexe, de forme } \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},\ |a|+|b| \neq 0 \right\}$$

alors (a) : $F \cup \{0\} \equiv F_0$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.
(b) : L'application (voir (5.1′))

$$\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \rightarrow T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

de H à F_0 est un isomorphisme entre espaces vectoriels.
(c) : L'égalité (5.8) définit un isomorphisme entre les groupes H^* et F, et H_1 et $SU(2)$. Celle-ci est la généralisation de la proposition 2.2 mentionnée au début de cette Section et elle nous donne une réponse positive au problème de Hamilton si au lieu de "rotations" dans $\mathbb{R}^3$, elle est formulée pour les "rotations" dans $\mathbb{C}^2$ et si nous ne demandons pas un produit commutatif. Pour exprimer son contenu explicitement nous notons que avec l'aide de (5.1′) l'égalité (5.8) prend la forme :

$$\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \rightarrow T = e_0 I + e_1\tau_1 + e_2\tau_2 + e_3\tau_3 \tag{5.8′}$$

où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Ici les τ_n $(n = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli. Pauli les introduisit en 1927 pour réussir à formuler mathématiquement le concept du spin de l'électron, introduit peu de temps avant (1925) par Goudsmidt et Uhlenbeck ([11] §3.4, [15] §13 b). Les $\{\tau_n\}$ ont un tableau de multiplication identique à celui de la base de quaternions. Ceci entraine la démonstration de la proposition 5.1(c).

Finalement, puisque les groupes H_1, $SU(2)$ sont isomorphes et (4.7) définit un 2-1 homomorphisme de H_1 sur $SO(3)$, la même chose est valable pour $SU(2)$ (les quaternions $\vec{p}, -\vec{p}$ et les matrices $T, -T$ dans (5.8′) définissent la même rotation dans $\mathbb{R}^3$).

Néanmoins il est intéressant d'écrire explicitement cet homomorphisme, puisque ceci est possible dans une forme compacte et élégante, ce qui n'est pas le cas pour (4.7). Plus spécifiquement, de (5.1) et (5.5) nous obtenons immédiatement :

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = T_\psi T_\theta T_\phi \tag{5.10}$$

Par conséquent l'expression explicite de l'homomorphisme cité plus haut est :

$$SU(2) \to SO(3) : A \mapsto T \tag{5.11}$$

où A est donnée par (3.7). La factorisation (5.10) de $T \in SU(2)$ correspond exactement à (3.7) pour $SO(3)$. Une comparaison entre (3.7) et (5.11) nous amène à quelques remarques très intéressantes :

(i) Les matrices T_ψ, T_θ, T_ϕ correspondent à A_ψ, A_θ, A_ϕ respectivement, définissant en même temps des sous-groupes à un paramètre de $SU(2)$ et $SO(3)$.

(ii) Le fait que (5.11) n'est pas un isomorphisme est dû à l'apparition de demi-angles dans (5.10) en contraste avec (3.7).

(iii) L'équation (5.11) montre que l'homomorphisme $SU(2) \to SO(3)$ est plus explicite en termes d'angles d'Euler qu'en termes de paramètres d'Euler ou de paramètres CK. Ceci est lié directement au fait que les deux groupes sont étroitement reliés comme groupes de Lie et les angles d'Euler peuvent êtres utilisés comme coordonnées (locales) pour tous les deux. En effet $SU(2)$ est ce qu'on appelle le revêtement universel de $SO(3)$. Mais cela nous amène directement dans les domaines de la Topologie et de la Géométrie Differentielle.

Nous concluons ce travail avec quelques commentaires historiques sur les équations (5.11) et (5.8) : Historiquement la relation entre $SU(2)$ et $SO(3)$ contenue dans (5.11), ne fût pas trouvée comme nous venons de le présenter. Cayley et Klein procédèrent d'une manière différente mais équivalente; nous donnons ici un bref aperçu : (voir [5] Vol. 10, p. 153, "Princeton Lectures" de 1896 de Klein sur "The mathematical theory of the top" réédité en [13] ch. LXXV et [20] §12 et références là-dedans. Pour un traitement plus détaillé consultez le travail assez accessible de Synge dans [17]) : Klein dans son travail sur les solides réguliers (1875) et spécialement sur l'icosaèdre (1875), considéra la relation entre les rotations d'une sphère et les transformations homographiques ([13] chs. LI, LIV). Plus spécifiquement il considéra la projection stéréographique d'une sphère centrée à l'origine des coordonnées, du pôle nord défini lui même comme le point d'intersection avec l' axe des z, sur le plan complexe. Par conséquent chaque rotation de la sphère induit une transformation (conforme) sur le plan. Puisque les cercles sont projetés stéréographiquement sur des cercles, nous concluons facilement que la transformation induite sur le plan, applique disques circulaires sur disques circulaires. Alors en tenant compte d'un résultat de la théorie des fonctions, c'est une transformation homographique $z \mapsto z = (az+b)/(cz+d)$, où a, b, c, d sont par démonstration les paramètres CK (Cayley (1879), Klein (1896)). Maintenant il suffit de quelques calculs directs pour montrer que la composition de deux rotations, induit la composition des transformations homographiques correspondantes, c'est-à-dire l'équation (5.4) sur laquelle est basée la démonstration de la proposition 5.1 ([20], §12).

Remerciements : L'auteur est reconnaissant au professeur M. Lambrou des nombreuses discussions fructueuses et des remarques critiques ainsi qu'aux Docteurs A. Dimakis et J. Stratis qui lui ont rendu accessible une partie de la littérature originale.

RÉFÉRENCES

1. E.T. Bell, "Men of Mathematics", Penguin books 1953.
2. E.T. Bell, "Mathematics : Queen and Servant of Science", McGraw-Hill, New York 1951.
3. N.Bourbaki, "Éléments d'histoire des Mathématiques", Hermann, Paris 1969.
4. C.B. Boyer, "A history of mathematics", J. Wiley, New York 1968.
5. A. Cayley, "Collected Mathematical Papers", Cambridge University Press, Cambridge 1889-1898.
6. M.J. Crowe, "A history of vector analysis", Dover Publications Inc., New York 1985.
7. J. Dieudonné (editeur), "Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700–1900", Hermann, Paris 1978.
8. H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading Massachussets 1980.
9. G. Greenhill, "Gyroscopic theory", Chelsea Publishing Co., New York 1966.
10. W.R. Hamilton, "The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton", Vol. III, Cambridge University Press, Cambridge 1967.
11. M. Jammer, "The conceptual development of Quantum Mechanics", McGraw-Hill, New York 1966.
12. F. Klein, "Development of Mathematics in the 19th century", Mathematical Science Press, Brookline Massachussets 1979.
13. F. Klein, "Gessamelte Mathematische Abhandlungen" Vol. 2, Springer, Berlin 1973.
14. G. Loria, "Storia delle Matematiche", U. Hoepli, Milan 1950.
15. W. Pauli, "General Principles of Quantum Mechanics", Springer Verlag, Berlin 1980.
16. D.E. Smith, "A source book in Mathematics", Dover, New York 1959.
17. J.L. Synge, dans le "Handbuch der Physik", édité par S. Flügge, Springer, Berlin 1960, Vol III/1, Section 13.
18. B.L. van der Waerden, Mathematics Magazine, vol. 49 No 4, 1976.
19. A.P. Wills, "Vector analysis with an introduction to tensor analysis", Dover, New York 1958.
20. E.T. Whittaker, "Analytical Dynamics of particles and rigid bodies", Cambridge University Press, Cambridge (1937, 1970).