

QUELQUES RÉSULTATS SUR
LES COURBES PLANES
(suite)

Paul GIRAULT

Strasbourg, U.F.R de Mathématiques et d'Informatique

2.2 *La géométrie finie et les formules de J.v. Szökefalvi-Nagy.* — Nous venons de voir les formules de Plücker pour les courbes algébriques *complexes* du plan. Mais nos courbes sont en fait des variétés holomorphes compactes de dimension *complexe* 1, c'est-à-dire que ce sont topologiquement des surfaces compactes, alias des surfaces de Riemann, dans le cas non singulier. La figure 6 illustre le cas d'une courbe de genre 1.

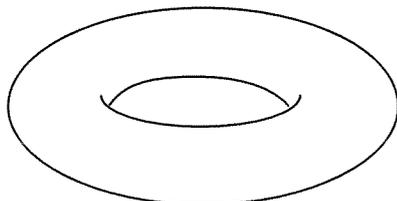


Figure 6. La courbe $X_3X_2^2 = X_1(X_1^2 - X_3^2)$ de genre $g = 1$.

Ce n'est pas la représentation que l'on se fait usuellement d'une courbe! Par conséquent, les parties réelles des courbes tracées précédemment n'étaient qu'une petite partie des figures complètes! Il est néanmoins tentant de savoir si l'on peut avoir des formules à la Plücker pour les courbes algébriques réelles et — pourquoi pas — pour les courbes ordinaires. En fait, la fin du XIX^e siècle a vu peu de travaux consacrés à la forme des courbes : citons les noms de Mœbius (1848), Perrin (1877), Brunn (1889), Kneser (1893), sans oublier — comme toujours — Gauss.

Les seuls résultats intéressants ont été obtenus pour les courbes algébriques réelles par Harnack et Klein : nous y reviendrons. Les immenses perspectives offertes par les idées de Riemann, sont certainement à l'origine de l'apparent désintérêt pour ce genre de questions car c'est à ce moment que se bâtissent la géométrie algébrique et la géométrie différentielle modernes. . . Vastes programmes.

Au début de ce siècle, tout change avec ce qu'on appelle — assez plaisamment d'ailleurs — la *géométrie finie* ou *géométrie de Juel*, en l'honneur du chercheur qui a le plus contribué au sujet. De quoi s'agit-il ?

a) *La géométrie finie.* — Soit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le *plan projectif réel* ou tout simplement *le plan* : sa définition est analogue à celle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, il suffit de changer le corps des complexes par celui des réels. Dans ce plan, on a des points et des droites. . .

Définissons l'élément simple qui va nous servir à construire les courbes planes. Cet élément est l'*arc élémentaire* : c'est un arc de courbe coupée en au plus deux points par toute droite du plan et qui possède une tangente variant continûment avec le point de contact. Un tel arc sera aussi appelé *arc convexe*.

Assemblons deux arcs élémentaires AB et AC par une extrémité commune A de telle sorte que les tangentes coïncident : nous obtenons ainsi les quatre possibilités représentées par la figure 7.

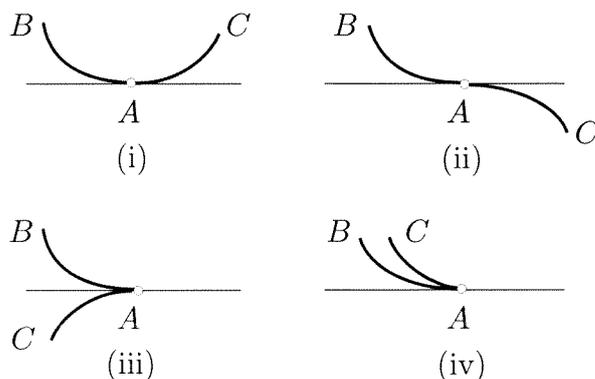


Figure 7. *Point intérieur, point d'inflexion, épine et bec.*

(i) A devient un point intérieur à un arc élémentaire.

(ii) A est *point d'inflexion* et la tangente en A est *tangente inflexionnelle*.

(iii) A est une *épine* ou *point de rebroussement*¹ *de première espèce* : la tangente en A est de type ordinaire car elle tourne toujours dans le même sens lorsque le point de contact se déplace de B vers A , puis de A vers C .

(iv) A est un *bec* ou *point de rebroussement*¹ *de deuxième espèce* : la tangente en A est de type inflexionnelle car la tangente tourne d'abord dans un sens lorsque le point de contact se déplace de B vers A , puis revient en sens contraire lorsque le point de contact se déplace de A vers C .

¹ Les points de rebroussement sont encore appelés *pointes*.

Observons maintenant les différentes situations lorsque les tangentes sont distinctes au point A :

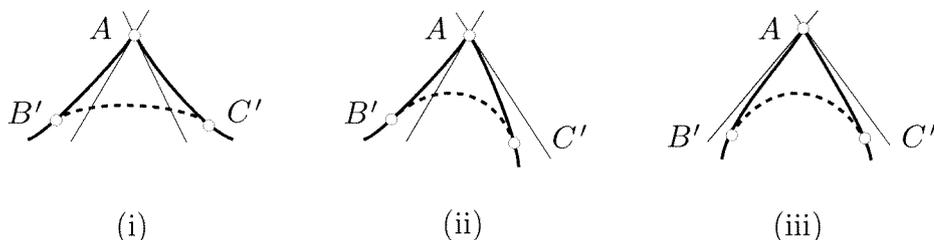


Figure 8. *Épine, bec et chapeau.*

Nous obtenons ainsi un *point anguleux* :

- dans le cas (i), on a une *épine*;
- dans le cas (ii), on a un *bec*;
- dans le cas (iii), on a un *chapeau*.

On peut faire disparaître la discontinuité de la tangente en A à l'aide d'un *raccordement* (Fig. 8). Suivant l'espèce du point anguleux, le raccordement fait apparaître deux, un ou zéro points d'inflexion. On peut évidemment appliquer l'opération du raccordement au bec et à l'épine ordinaires. C'est une opération importante en géométrie finie.

Après ces préambules, il est alors possible de définir *une courbe élémentaire* : c'est une courbe fermée du plan projectif réel formé par la réunion d'un nombre fini d'arcs élémentaires.

Une courbe élémentaire possède un nombre fini de points d'inflexions ou de pointes. Il en est de même du nombre de points de rencontre avec une droite du plan. Toujours dans les généralités, indiquons qu'elles peuvent présenter des *points doubles* (ou points à croisements normaux) et des *tangentes doubles* (ou bitangentes) : pour la définition, le mieux est de se reporter à la figure 4.

Il nous reste à introduire deux notions importantes pour l'étude des courbes élémentaires inspirées de l'étude des courbes algébriques complexes. Soit \mathcal{C} une courbe élémentaire.

- L'*ordre de réalité* ou, tout simplement, l'*ordre* de \mathcal{C} est le nombre maximum de ses points de rencontre avec une droite du plan. Remarquons en passant que, lorsque la droite varie, le nombre des points de rencontre change, mais sa *parité* est invariable puisqu'il augmente ou diminue de deux unités à chacune de ses variations.
- La *classe de réalité* ou simplement la *classe* de \mathcal{C} (Fig. 2) est le nombre maximum de tangentes à la courbe que l'on peut mener par un point du plan : le nombre de ces tangentes a une parité invariable quand le point se déplace.

EXEMPLE. — Soit $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), F(x) = 0\}$ où F est un *polynôme homogène* non constant de $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Désignons par n le degré de F . Si l'ensemble \mathcal{C} n'est pas vide, c'est une courbe élémentaire mais aussi une courbe algébrique projective réelle. L'ordre de \mathcal{C} est inférieur au degré n de F , la classe de \mathcal{C} est inférieure à la classe complexe de \mathcal{C} . Par exemple, la quartique de Fermat, $x_1^4 + x_2^4 = x_0^4$ est d'ordre 2 et de classe 2.

La géométrie finie est donc une généralisation naturelle de la géométrie algébrique réelle. Mais il y a une différence considérable entre les deux : en effet, la géométrie algébrique réelle — ayant à son service une puissante machinerie mathématique — est bien plus élaborée. Ce sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

De ces définitions, on déduit facilement les résultats suivants :

- Le nombre de tangentes d'inflexion et l'ordre d'une courbe élémentaire ont la même parité.
- Le nombre de pointes et la classe ont la même parité.
- Le nombre de points de rencontre de deux courbes élémentaires dont l'une est d'ordre pair est un nombre pair ; le nombre de points de rencontre de deux courbes élémentaires d'ordre impair est un nombre impair (ces deux résultats remontent à Möbius).
- Un raccordement ne peut pas augmenter l'ordre d'une courbe.

A partir des résultats précédents, on peut esquisser une classification des courbes de petit ordre :

Ordre 1. — Une courbe élémentaire d'ordre 1 est une droite.

Ordre 2. — Une courbe du second ordre n'a aucune singularité : pas de point double, pas de pointe, pas de tangente double, pas de tangente inflexionnelle.

Une courbe d'ordre deux n'a qu'une composante connexe et on peut la transformer en un ovale par projection. Réciproquement, Möbius et Juel ont montré que :

- toute courbe plane sans singularités est d'ordre 2 et de classe 2 ;
- toute courbe plane qui possède au plus des points doubles et des tangentes doubles mais pas d'autres singularités ponctuelles et tangentielles est d'ordre 2 et de classe 2.

Plus curieux est le fait suivant : pour tout entier positif pair k , il existe deux courbes d'ordre deux qui ont k points communs : elles ont alors k tangentes communes. Un tel résultat est impossible pour les courbes algébriques planes du second degré un vertu du théorème de Bézout.

Ordre 3. — Une courbe du troisième ordre sans point double et sans pointe a trois points d'inflexion qui partagent la courbe en trois arcs convexes. Une courbe d'ordre trois a au plus un point singulier, à savoir un point double ou une pointe.

COURBES PLANES

Une courbe singulière d'ordre trois a exactement une tangente inflexionnelle.

Une courbe d'ordre trois a au plus deux composantes connexes comme dans le cas algébrique.

Les courbes d'ordre trois sans point singulier sont de classe 6 ou 4. Par une perspective, on peut les ramener à présenter l'une des dispositions de la figure 9, où l'on a tracé d'un trait plein les courbes d'ordre trois formées d'une seule composante connexe.

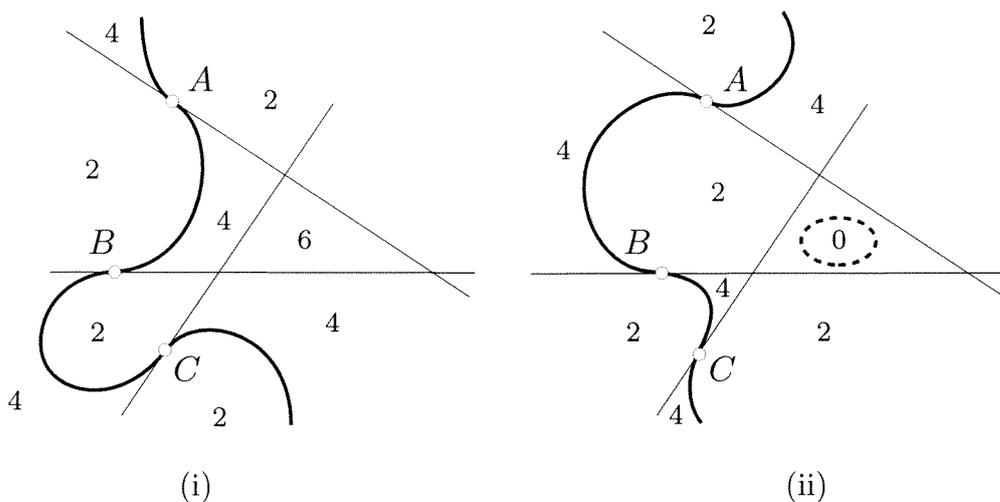


Figure 9. Présentation canonique d'une courbe d'ordre 3.

Les nombres placés sur la figure indiquent le nombre de tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point de la région correspondante. A la courbe donnée par la figure 9 (ii), on peut ajouter un ovale situé à l'intérieur du triangle délimité par les tangentes inflexionnelles, la classe augmentant alors de deux unités : la courbe reste du troisième ordre, mais est de classe 6 avec deux composantes connexes.

Ordre 4. — Nous ne donnerons pas la classification des courbes de cet ordre car elle est beaucoup plus compliquée (Fig. 10). Indiquons toutefois que si k est un entier positif, il existe toujours une courbe d'ordre 4 qui admet k composantes connexes. Le contraste est alors saisissant avec les courbes algébriques réelles de degré 4 : d'après un résultat de Zeuthen (1874), elles ont au plus quatre composantes connexes. Le lecteur amusé pourra construire autant de courbes du quatrième ordre qu'il voudra en s'inspirant de la figure 10.

Pour terminer, rappelons qu'une courbe du quatrième ordre peut avoir un nombre de points doubles d , de tangentes doubles t , de points d'inflexion w , tout à fait quelconque. Si la courbe n'a qu'une composante connexe et si elle est sans pointe, alors on a $w = 2(t - d)$ d'après Juel.

Ordres supérieurs à 5. — A ma connaissance, rien n'a été tenté pour ces ordres. Avis aux amateurs !

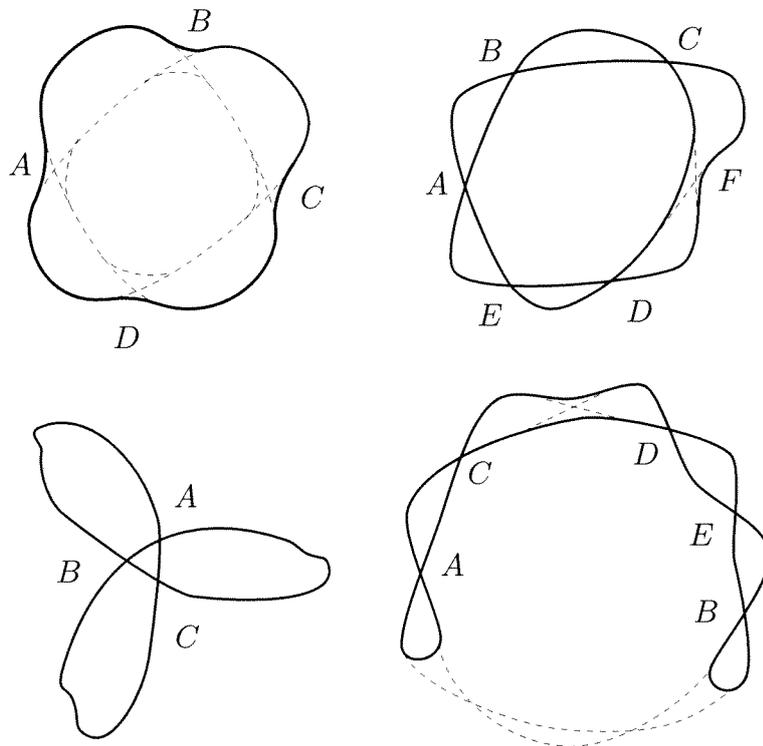


Figure 10.

b) *Les formules de J.v. Szökefalvi-Nagy.* — D'après ce qui précède, il paraît donc difficile, voire aventureux, de tenter une classification générale des courbes élémentaires en utilisant l'ordre pour seul outil. Il est certainement plus judicieux d'établir d'abord une relation entre un certain nombre de paramètres qui caractérisent la forme d'une courbe. Pour cela, on peut choisir comme paramètres ceux qui apparaissent dans les formules de Plücker, quitte à en introduire de nouveaux si cela s'avère insuffisant. Nous allons donc exposer quelques résultats de J.v. Szökefalvi-Nagy dont les travaux — quoique assez oubliés aujourd'hui (comme d'ailleurs tout ce qui ressortit à la géométrie finie) — ont porté essentiellement sur les courbes et les surfaces en géométrie finie.

Soit C une courbe élémentaire. On a défini son *ordre* et sa *classe*. Il reste à définir son *index* (linéaire) et son *index de classe* ou *index tangentiel*.

- L'*index* est le nombre *minimum* de ses points de rencontre avec une droite du plan.
- L'*index de classe* est le nombre *minimum* de tangentes à C que l'on peut mener par un point du plan.

Rappelons que le genre $p(D)$ d'un domaine D du plan est le nombre des sections transverses que l'on peut pratiquer sans morceler le domaine. Plus vulgairement c'est le nombre de «trous» (Fig. 12).

COURBES PLANES

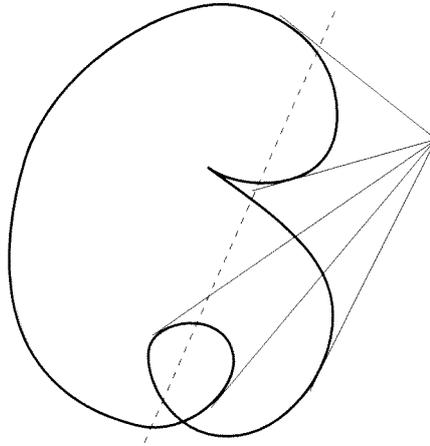


Figure 11. Une courbe d'ordre 6, d'index 0, de classe 5 et d'index de classe 1.

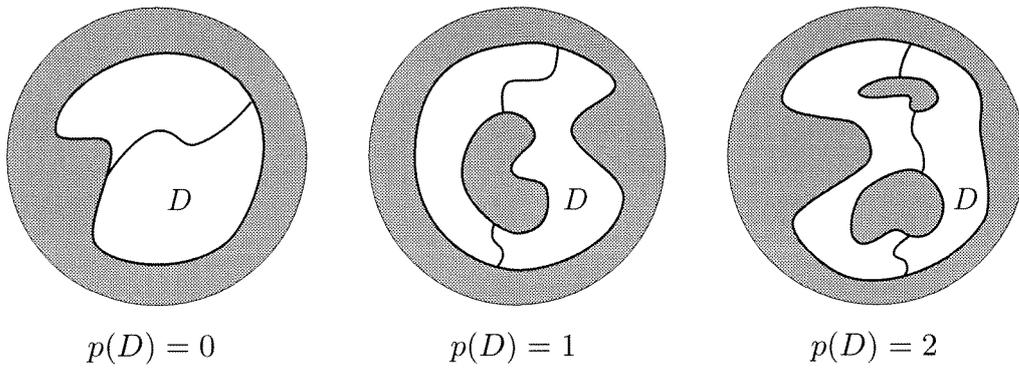


Figure 12. Pas de trou, un trou, deux trous, etc.

On a alors le théorème suivant.

THEORÈME (Szökefalvi-Nagy, 1923). — Soit C une courbe élémentaire de classe n , d'index de classe $(n - 2)$. Désignons

- le nombre de points doubles par d ,
- le nombre de pointes par r ,
- le nombre de tangentes inflexionnelles par w ,
- le nombre de tangentes doubles par t .

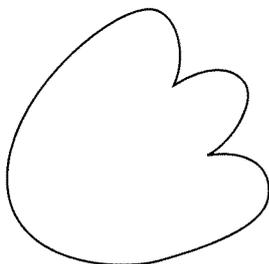
Avec ces notations, on a $d = 0$ et $w = 0$ ou 1 . En outre, si p est le genre du domaine d'où l'on peut mener exactement $n - 2$ tangentes à C , on a

$$r = n - 2 + 2p, \quad p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - t - w,$$

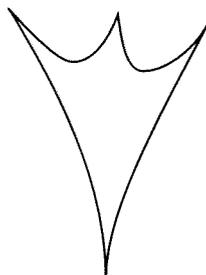
et si m est l'ordre de C ,

$$m \leq n(n - 1) - 2t - 3w = n + r - w = 2n - 2 + 2p - w.$$

REMARQUE. — La dernière inégalité est la meilleure possible (Fig. 13).



$$n = 4, w = 0, r = 2, \\ p = 0, t = 3$$



$$n = 4, w = 0, r = 3, \\ p = 1, t = 2$$

Figure 13.

Par dualité, il est facile d'obtenir une série de relations pour les courbes d'ordre m et d'index $(m - 2)$.

Indiquons pour terminer que les formules de Szökefalvi-Nagy ont été obtenues *sans calculs*, par voie géométrique. Il en est de même des principaux résultats de la géométrie finie. Il s'agit d'une démarche intellectuelle particulièrement élégante, mais tout de même limitée comme le montre l'étude des surfaces dans cette discipline.

2.3 *La formule de Fabricius-Bjerre.* — Soit \mathcal{C} une courbe fermée du plan affine réel. On permet à cette courbe d'avoir des pointes et des croisements normaux (ou points doubles ordinaires). Désignons

- l'ensemble des becs par B et posons $b = \text{Card}(B)$;
- l'ensemble des épines par C et posons $c = \text{Card}(C)$;
- l'ensemble des points d'inflexion par F et posons $f = \text{Card}(F)$;
- l'ensemble des points doubles par N et posons $n = \text{Card}(N)$;
- l'ensemble des tangentes doubles par D , (Fig. 14 (i));
- l'ensemble des droites joignant deux éléments de $B \cup C$ par D_S (ce qui est illustré Fig. 14 (iii));
- l'ensemble des tangentes à la courbe au point régulier x passant par un point $y \in B \cup C$ par D_* , (Fig. 14 (ii));

Maintenant, considérons une droite s de $\Delta = D \cup D_S \cup D_*$. Désignons par p_1 et p_2

- les deux points de contact entre s et \mathcal{C} (Fig. 14 (i));
- ou les deux points singuliers, (Fig. 14 (iii));
- ou le point singulier et le point de contact avec \mathcal{C} , (Fig. 14 (i)).

Prenons deux voisinages suffisamment petits D_1, D_2 de p_1, p_2 et posons $\sigma_i = \mathcal{C} \cap D_i$. Le complémentaire de s dans \mathbb{R}^2 a *deux composantes connexes* : si $\sigma_1 \setminus \{p_1\}, \sigma_2 \setminus \{p_2\}$ appartiennent à la même composante, on dit que s est un élément *positif* de Δ , sinon s est un élément *négatif*.

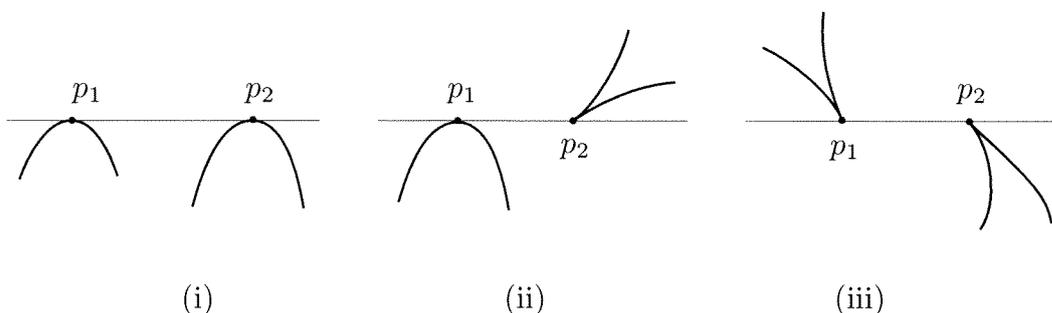


Figure 14.

Désignons :

— par d^+ le nombre de *tangentes doubles positives* et par d^- le nombre de *tangentes doubles négatives*;

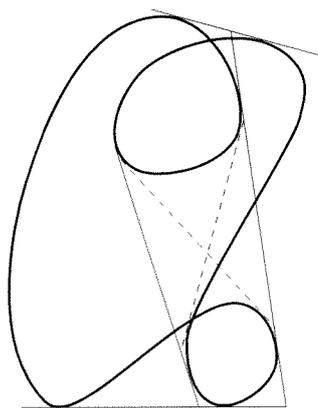
— par d_S^+ le nombre d'*éléments positifs* de D_S et par d_S^- le nombre d'*éléments négatifs*);

— par d_*^+ le nombre d'*éléments positifs* de D_* et par d_*^- le nombre d'*éléments négatifs*.

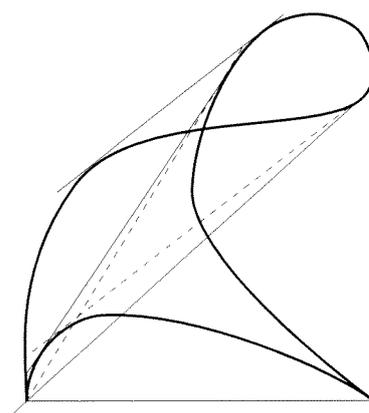
On a alors le petit joyau suivant.

THEORÈME (Fabricius-Bjerre). — *Sous des conditions raisonnables, de telle sorte que chacun des ensembles B, C, D, F et N soit de cardinal fini, on a l'égalité :*

$$b + f + 2(n + c) = 2(d^+ - d^- + d_S^+ - d_S^- + d_*^+ - d_*^-).$$



$$\begin{aligned} d^+ &= 5, \quad d^- = 2, \\ d_S^+ &= d_S^- = d_*^+ = d_*^- = 0, \\ b &= 0, \quad f = 2, \quad n = 2, \quad c = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d^+ &= 2, \quad d^- = 1, \\ d_S^+ &= 1, \quad d_S^- = 0, \quad d_*^+ = 2, \quad d_*^- = 1, \\ b &= 1, \quad f = 1, \quad n = 1, \quad c = 1 \end{aligned}$$

Figure 15. Deux exemples de la formule de Fabricius-Bjerre.

COROLLAIRE. — (*Juel, voir plus haut*) Soit C une courbe du plan affine, non singulière et d'ordre 4. Alors, on a l'égalité :

$$f = 2(d^+ - n), \quad d^- = 0.$$

REMARQUE. — La formule de Fabricius-Bjerre est loin d'être banale comme le montre la figure 16 sur laquelle pourra s'exercer le lecteur peu convaincu.

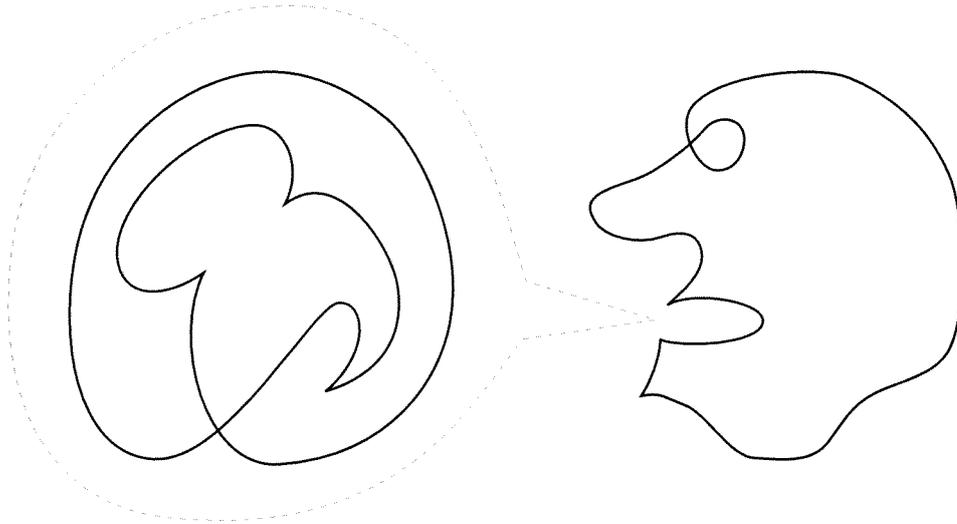


Figure 16. Fabricius-Bjerre exposant ses travaux.

Cette formule a d'abord été prouvée par Fabricius-Bjerre en 1962, dans le cas non singulier, en utilisant les méthodes de la géométrie finie, puis par Halpern (1969) à l'aide de la théorie des zéros des champs de vecteurs. Mais c'est en 1977 que Fabricius-Bjerre — le diable d'homme — obtint la formule générale énoncée plus haut par voie géométrique. C'est grâce à l'expérience acquise sur les formules de Plücker que celui-ci a pu obtenir l'extension désirée. A ma connaissance, il n'existe pas de démonstration analytique de son théorème, mais est-ce bien utile ?

2.4 *Résultats épars.* — Dans son travail de 1969, Halpern a prouvé l'énoncé suivant.

THEORÈME. — Soient C et C' deux courbes fermées du plan \mathbb{R}^2 non singulières. Désignons

- le nombre de tangentes doubles positives par d^+ ,
- le nombre de tangentes doubles négatives par d^- ,
- le nombre de points d'intersection (transversale) de C avec C' par n .

Dans ces conditions, on a l'égalité $d^+ = n + d^-$ (Fig. 17).

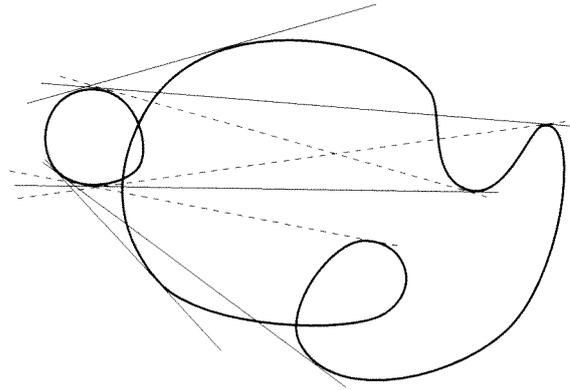


Figure 17. Un cas particulier de la formule d'Halpern : $d^+ = 5$, $d^- = 3$ et $n = 2$.

La contemplation du théorème de Fabricius-Bjerre suggère le problème suivant : construire *effectivement* des courbes vérifiant l'égalité de ce théorème.

En 1972, Halpern a montré que si $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ et $a_4 > 0$ sont des entiers quelconques, il existe toujours une courbe \mathcal{C} non singulière qui vérifie $d^+ = a_1$, $d^- = a_2$, $n = a_3$ et $f = 2a_4$. En revanche, il avait conjecturé $f = 0$ implique $d^- \leq n(n-1)$, résultat qui fut prouvé par Ozawa en 1984. Ceci montre que nos courbes, dans le cas non singulier, ne satisfont pas d'autres conditions nécessaires.

A-t-on épuisé le sujet ? Loin de là ! La formule de Fabricius-Bjerre — formule plückerienne, ne l'oublions pas — admet bien des généralisations.

Une première généralisation, déjà suggérée en 1969 par Halpern, démontrée par Girault (1984, non publié), Weiner (1987) concerne le cas des courbes sphériques. Une généralisation plus naturelle et plus intéressante à la fois est le cas des courbes élémentaires du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Contemplant encore une fois la formule de Fabricius-Bjerre : il saute aux yeux qu'elle n'est pas projective. En effet, si d est une droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, alors $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus d$ est *connexe* ! Par conséquent, la notion d'élément positif (resp. négatif) est inadéquate (on se reportera aux préliminaires à la formule de Fabricius-Bjerre). En surmontant cette difficulté, Pignoni a réalisé en 1992 le tour de force de prouver la généralisation souhaitée. Malheureusement, la grande technicité de la formule de Pignoni ne permet pas son exposé succinct.

Prenons maintenant un peu de hauteur et abordons le cas des courbes dans l'espace dont l'étude est beaucoup plus difficile ! Dans le plan, on s'est intéressé aux bitangentes d'une courbe ; dans l'espace il est naturel d'examiner les plans tritangents d'une courbe. C'est ce que nous allons faire en guise de conclusion en exposant essentiellement les résultats d'Ozawa (1985).

Débutons par quelques rappels et notations. Soient \mathcal{C} une courbe fermée et $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de classe C^∞ de cette courbe. On suppose que le vecteur tangent unitaire, le vecteur normal principal et le vecteur binormal sont définis en chaque point de \mathcal{C} . Si la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne,

les vecteurs précédents notés e_1, e_2 et e_3 vérifient les formules de Serret-Frenet :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

où κ et τ sont la *courbure* et la *torsion* de \mathcal{C} .

Dans la suite, nous supposons que la *courbure est non nulle* en chaque point de \mathcal{C} . Désignons encore par $w(s)$ le plan osculateur² au point d'abscisse s .

Soient $A(2,3)$ l'ensemble des plans affines de \mathbb{R}^3 et P un plan affine de \mathbb{R}^3 tangent à \mathcal{C} au point d'abscisse s . On définit l'*ordre du contact* n de P avec \mathcal{C} en ce point comme suit :

$$n = \begin{cases} 0 & \text{si } e_1(s) \text{ n'est pas parallèle à } P, \\ 1 & \text{si } e_1(s) \text{ est parallèle à } P \text{ et } e_2(s) \text{ n'est pas parallèle à } P \\ 2 & \text{si } e_1(s) \text{ et } e_2(s) \text{ sont parallèles à } P \text{ et } \tau(s) \neq 0, \\ 3 & \text{si } e_1(s) \text{ et } e_2(s) \text{ sont parallèles à } P \text{ et } \tau(s) = 0, \tau'(s) \neq 0. \end{cases}$$

DEFINITION 1. — L'ordre total du contact de P avec \mathcal{C} est la somme des ordres de contact en chaque point de P avec \mathcal{C} .

DEFINITION 2. — Une courbe \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 est dite en *position générale* si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un plongement, ce qui se traduit géométriquement en disant que \mathcal{C} est sans points doubles et sans pointes.

(ii) La courbure κ n'est jamais nulle.

(iii) Si $\tau(s) = 0$, alors $\tau'(s) \neq 0$.

(iv) Les ordres totaux de contact de tout plan avec \mathcal{C} sont ≤ 4 .

(v) Si $P \in A(2,3)$ est tangent à \mathcal{C} en trois points, ces trois points ne sont pas alignés.

(vi) Si un plan osculateur $w(s_1)$ de \mathcal{C} au point d'abscisse s_1 est tangent à \mathcal{C} au point d'abscisse s_2 , avec $s_1 \neq s_2$, alors le point d'abscisse s_2 n'est pas sur la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse s_1 .

Cette longue liste de conditions vérifiées par une courbe en position générale est inquiétante, mais le théorème suivant nous apporte un soulagement très vif.

THEORÈME (Banchoff, Gaffney, McCrory, 1985). — *L'ensemble des courbes qui sont en position générale est un ouvert partout dense de $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$.*

Dans la suite, nous supposons que \mathcal{C} est en position générale.

² Le mot osculateur provient du latin *osculari* qui veut dire embrasser. Cette terminologie remonte à Lagrange.

COURBES PLANES

DEFINITION 3. — Soit $P \in A(2, 3)$. On dit que P est un *plan tritangent* de la courbe \mathcal{C} si l'ordre total du contact est égal à 3.

Nous dirons encore qu'un plan tritangent est un *T-plan* (Fig. 18 (i)), un *C-plan* (Fig. 18, (ii)) ou un *I-plan* (Fig. 18, (iii)), selon que le nombre de points de contact est 3, 2 ou 1.

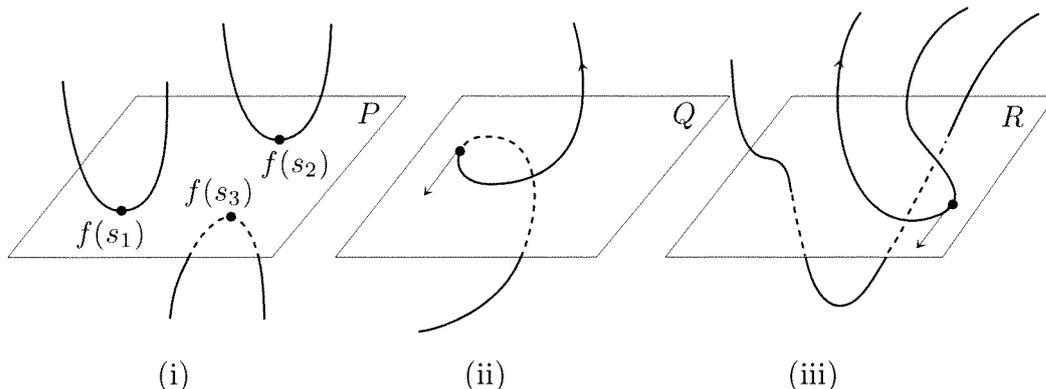


Figure 18.

Passons aux ultimes définitions. Munissons \mathbb{R}^3 de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soient P un T-plan de \mathcal{C} et s_1, s_2 et s_3 les abscisses des points de contacts avec $s_1 < s_2 < s_3$. Posons :

$$v = (f(s_2) - f(s_1)) \times (f(s_3) - f(s_1)).$$

Puisque \mathcal{C} est en position générale, v n'est pas nul et orthogonal à P . Posons encore :

$$H_v = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \langle x - f(s), v \rangle \geq 0\}.$$

DEFINITION 4. — L'index $\text{Ind}(P)$ du T-plan P est défini par :

$$\text{Ind}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si le nombre de branches locales de } \mathcal{C} \\ & \text{qui se trouvent dans } H_v \text{ est impair,} \\ -1 & \text{si ce nombre est pair.} \end{cases}$$

Sur la figure 18 (i) (orientée conformément à la règle de la main gauche), le vecteur v est dirigé vers le haut, d'où $\text{Ind}(P) = -1$.

Soient Q un C-plan de \mathcal{C} , s_1 et s_2 les abscisses des points de contact avec pour ordres de contact 1 et 2 respectivement. Le vecteur tangent unitaire $e_1(s_2)$ et le vecteur normal principal $e_2(s_2)$ sont parallèles à Q , tandis que $e_1(s_1)$ est parallèle à Q et $e_2(s_1)$ n'est pas parallèle à Q .

DEFINITION 5. — L'index $\text{Ind}(Q)$ du C -plan Q est défini par :

$$\text{Ind}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle e_1(s_2) \cdot (f(s_1) - f(s_2)), e_2(s_1) \rangle > 0, \\ -1 & \text{si } \langle e_1(s_2) \cdot (f(s_1) - f(s_2)), e_2(s_1) \rangle < 0. \end{cases}$$

Sur la figure 18 (ii), le C -plan Q a pour index $\text{Ind}(Q) = -1$.

Soit $R = w(s_0)$ le plan osculateur au point d'abscisse s_0 . C'est un I -plan, i.e. $\tau(s_0) = 0$ (d'où $\tau'(s_0) \neq 0$).

DEFINITION 6. — L'index $\text{Ind}(R)$ du I -plan R est défini par

$$\text{Ind}(R) = \varepsilon (\text{le nombre d'intersection transverse de } C \text{ avec } R),$$

où $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau'(s_0) < 0 \\ -1 & \text{si } \tau'(s_0) > 0. \end{cases}$

Sur la figure 18 (iii), le I -plan R a pour index $\text{Ind}(R) = -2$.

Remarquons pour finir que si l'on renverse l'orientation de la courbe, tous les indices changent de signe.

Il ne nous reste plus qu'à énoncer le résultat suivant.

THEORÈME (Ozawa, 1985). — *Soit C une courbe de \mathbb{R}^3 en position générale. Posons*

$$T = \sum_{\text{T-plans}} \text{Ind}(P), \quad C = \sum_{\text{C-plans}} \text{Ind}(Q), \quad I = \sum_{\text{I-plans}} \text{Ind}(R).$$

Alors on a :

$$C = I, \quad 6T = 2C + I.$$

Le principal ingrédient pour la démonstration de ce théorème est la théorie de Morse et... beaucoup de sueur !

Comme le suggère la haute technicité des préliminaires, le théorème d'Ozawa n'a pas évidemment clos le sujet. Des résultats intéressants de la sorte ont été obtenus par Banchhoff, Gaggney et McCrory (1985) d'une part, et Fuster (1988) d'autre part, mais il reste beaucoup de chemin à parcourir avant que la situation soit complètement maîtrisée.

BIBLIOGRAPHIE

BERGER (M.) et GOSTIAUX (B), *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, P.U.F., 1986.