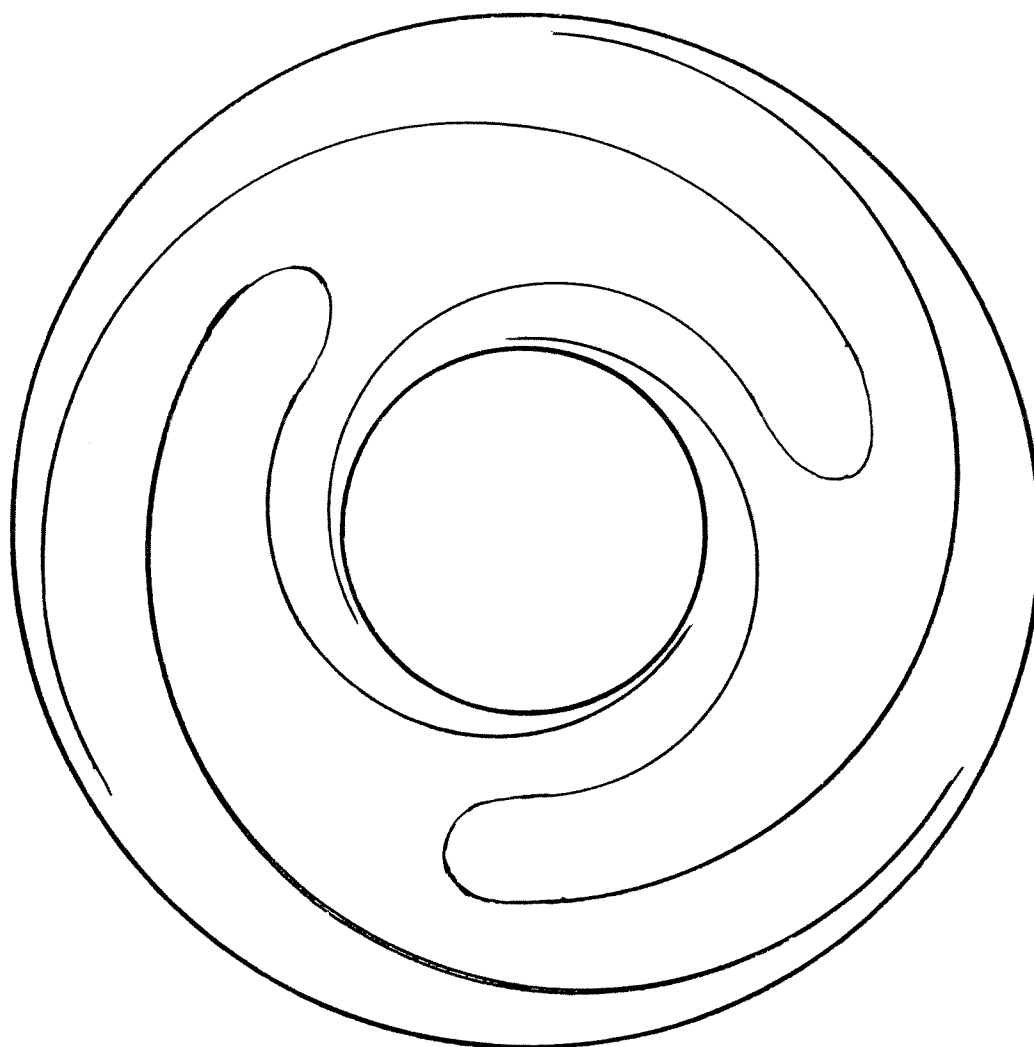


LES FEUILLETAGES DE REEB

Gilbert HECTOR

Professeur de Mathématiques à l'Université de Lyon I

Comment G. Reeb, à la suite de
son maître Ch. Ehresmann a
assis solidement les fondements
de la Théorie des Feuilletages.



G. Reeb aimait rappeler que lors de ses premiers exposés sur la Théorie des "*Feuilletages*" il y avait toujours parmi les auditeurs au moins un botaniste intrigué et attiré par cet intérêt inhabituel des mathématiciens pour sa science. Bien sûr, cet engouement des botanistes s'est étiolé entre temps ; par contre les "*Feuilletages*" eux ont envahi les champs mathématiques les plus divers : équations différentielles, théorie du contrôle, fonctions analytiques, géométrie symplectique, mécanique, théorie des opérateurs...

C'est sous la houlette de Ch. Ehresmann et sous l'influence des grands ancêtres : Poincaré, Painlevé, Briot et Bouquet... que G. Reeb s'est lancé dans l'étude des "*Structures feuilletées*" vers le milieu des années quarante. Mais c'est bien lui qui a "*assis*" la théorie, qui lui a "*donné corps*" grâce aux deux résultats essentiels de sa thèse (voir [R₃]):

- a) la construction d'un feuilletage de $\mathbb{S}^3$.
- b) les théorèmes de stabilité.

De tous les travaux de G. Reeb, celui qui est destiné à rester dans la mémoire des mathématiciens, celui qui témoigne le mieux de son génie inventif, c'est, sans conteste, la construction du premier feuilletage de codimension 1 de $\mathbb{S}^3$, le **Feuilletage de Reeb**. Nous en donnerons ici une approche descriptive avec le moins de préliminaires formels possibles (§I, p.94).

Dans un deuxième temps (§II, p.107), nous présenterons de manière un peu plus technique les théorèmes de stabilité et pour finir nous décrirons de manière très succincte quelques aspects actuels du développement de la Théorie des Feuilletages, témoignage de la fécondité de l'œuvre mathématique de G. Reeb.

En guise de conclusion, nous rappellerons un autre succès "*universel*" de Reeb : l'histoire du peigne.

I. Les Feuilletages de Reeb.

La première question qui se pose à propos d'une théorie nouvelle est celle de son "*extension*", c'est à dire du nombre et de la diversité des exemples. Les **Structures Feuilletées** sont "*supportées*" par des variétés (différentiables) ; or quitte à passer au revêtement universel, on pourra toujours se ramener aux variétés simplement connexes. On comprendra donc mieux l'importance des exemples de Reeb, si l'on se rappelle que :

a) d'après le théorème de Poincaré - Hopf, tout champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^2$ possède au moins une singularité et donc il n'existe pas de feuilletage de dimension un (ou codimension 1) sur $\mathbb{S}^2$. La sphère $\mathbb{S}^3$ de dimension 3 est alors la première variété compacte, connexe et simplement connexe "*candidate*" pour supporter un feuilletage de codimension 1 (voir §I.1 ci-dessous).

b) il aura fallu attendre les années 1971-72 pour savoir, avec les travaux de Lawson - Freedman - Durfee - Tamura que les sphères impaires $\mathbb{S}^5$, $\mathbb{S}^7$... possèdent des feuilletages de codimension un (les sphères de dimension paire sont exclues pour les mêmes raisons que $\mathbb{S}^2$).

I.1. Une définition rapide et pratique des structures feuilletées (ou feuilletages).

i) La famille des courbes intégrales d'une équation différentielle (sans singularité) sur une variété M de dimension n , est l'exemple type d'une **structure feuilletée** (ou **feuilletage**) de dimension 1. Les données essentielles d'une telle structure sont contenues dans le théorème d'existence et d'unicité des solutions locales. Ce théorème nous permet de construire pour tout $x \in M$,

a) un voisinage U difféomorphe à J^n (où $J =]0,1[$) dans lequel les solutions locales sont données, en coordonnées locales, par le système d'équation :

$$dx^2 = dx^3 = \dots = dx^n = 0$$

b) une unique intégrale maximale L_x passant par x ; c'est une sous-variété de dimension 1, immergée dans M (non plongée en général).

ii) Par analogie, si $n=p+q$, un **feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p ou codimension q** sur M sera la donnée d'une famille de sous-variétés L de dimension p , C^0 immergées dans M (et appelée les **feuilles de $\mathcal{F}$**) telle que :

b') par tout $x \in M$, il passe une feuille L_x et une seule.

a') pour tout x , il existe une carte locale $\phi : U \rightarrow J^p \times J^q$ telle que si on appelle **plaques de $\mathcal{F}$ dans U** , les composantes connexes des traces sur U des feuilles de $\mathcal{F}$, alors toute plaque de U a pour image par l'homéomorphisme ϕ une horizontale $J^p \times \{pt\}$ de $J^p \times J^q$. Un tel ouvert U sera appelé un **cube distingué** de $\mathcal{F}$.

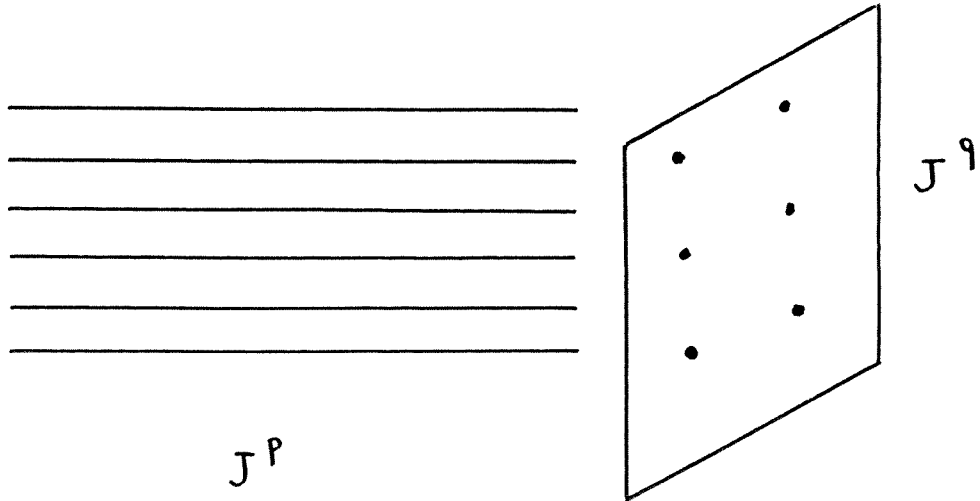


Fig1

Dans le cas où M est une surface ou une variété à bord, les cartes locales considérées seront du type $\phi : U \rightarrow J^p \times J^{q-1} \times [0,1)$. En particulier pour les feuilletages de codimension 1, elles seront du type $\phi : U \rightarrow J^{n-1} \times [0,1)$.

Remarque : dans la présentation générale ci-dessus, il n'y a pas d'exigence de différentiabilité ; les feuilletages ainsi définis seront dits **de classe C^0** . Nous nous limiterons à cet aspect dans la suite bien que tous les exemples de Reeb soient en fait de classe C^∞ .

1.2 Les composantes de Reeb de dimension 2.

i) Considérons dans le plan (xOz) l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2-1)dz + 2xdx = 0$$

Ses courbes intégrales sont aussi les courbes de niveau de la fonction

$$k(x,z) = (x^2-1)e^z.$$

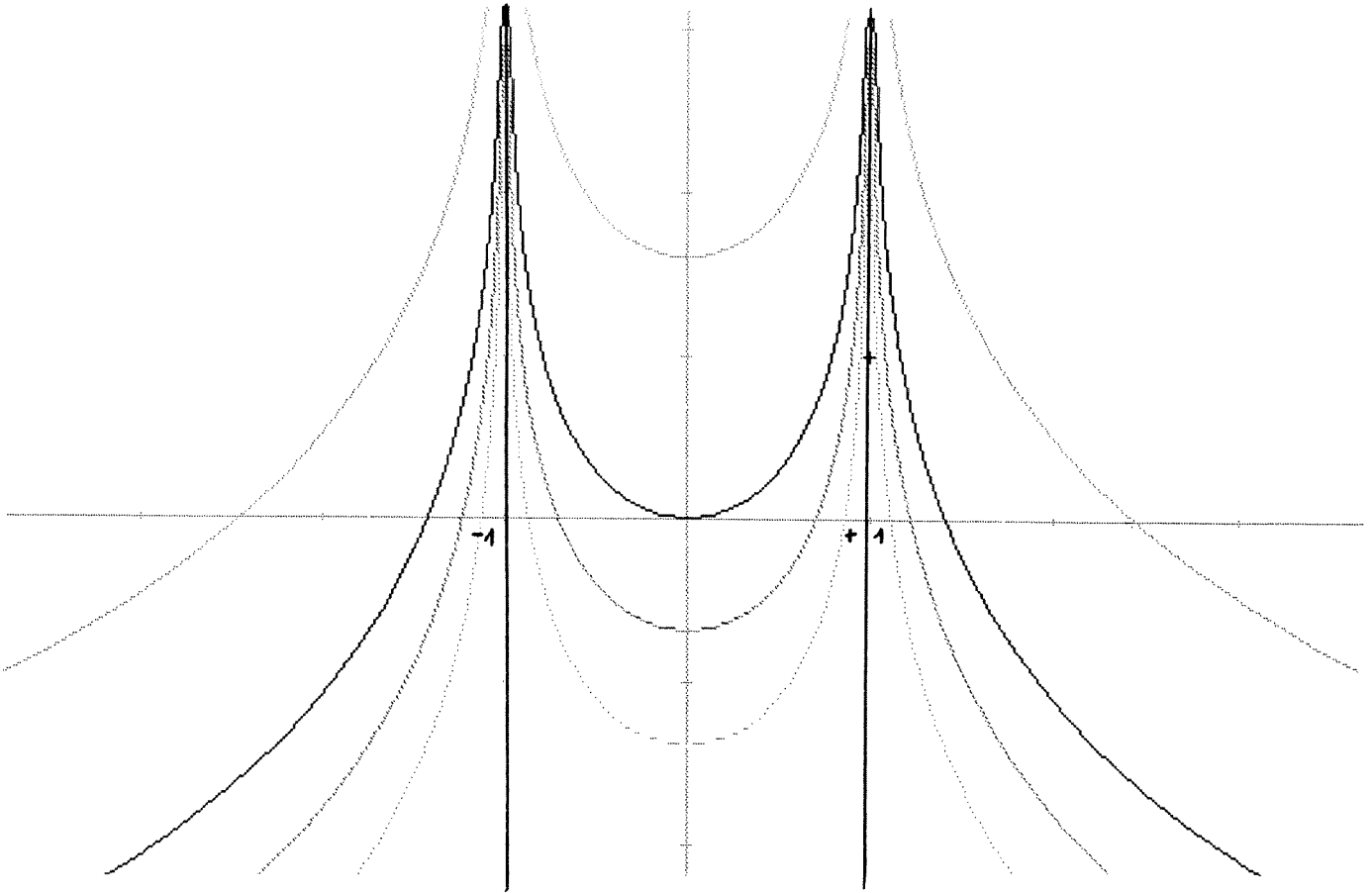


Fig2

Définition : la restriction de cette famille de courbes à la bande verticale $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ est une structure feuilletée de dimension 2 sur $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ appelée la **composante de Reeb non compacte de dimension 2**. Elle sera notée $\mathcal{R}^2$.

ii) Le quotient de $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ par la relation d'équivalence ρ :

$$(x,z)\rho(x,z+n) ; \forall n \in \mathbb{Z},$$

est la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$. Celle-ci peut-être obtenue également en identifiant de façon évidente les deux arêtes horizontales AB et DC du rectangle $[-1;+1] \times [0;1]$.

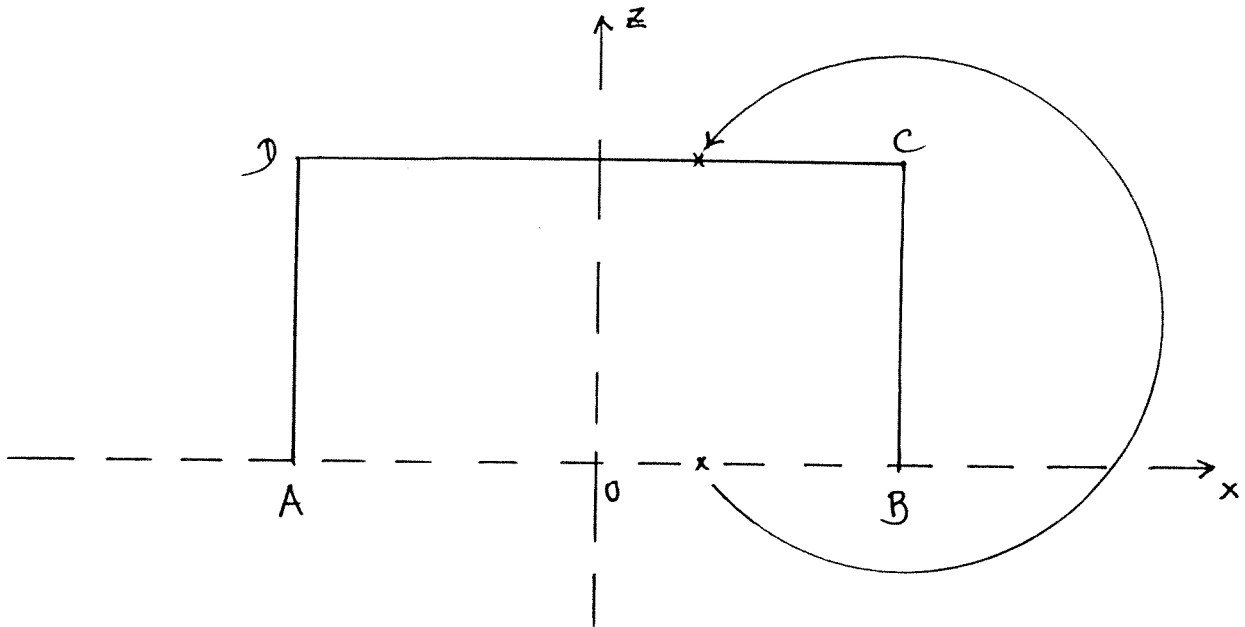


Fig3

Enfin, cette couronne est aussi le quotient de la bande $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ par les translations verticales entières.

Or la famille des courbes intégrales de (E) est globalement invariante par les translations verticales (bien sûr, seules les feuilles $x=\pm 1$ sont individuellement invariantes) et cette invariance suffit pour projeter le feuilletage $\mathcal{R}^2$ de $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ en un feuilletage sur la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$, qui aura l'aspect suivant (voir fig.4) :

Le "rayon" d'extrémité $A=D$ et $B=C$ tracé en pointillé sur la figure 4 rappelle que l'on peut aussi construire le feuilletage (famille de courbes) sur la couronne en suivant le procédé d'identification schématisé par la figure 3.

Définition : le feuilletage ainsi défini sur la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ s'appellera **la composante de Reeb compacte de dimension 2**. On le notera $\mathcal{R}_c^2$.

- Les feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ sont de deux types :
- les deux bords de la couronne sont des feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ compactes, homéomorphes à $\mathbb{S}^1$;
 - toutes les autres feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ sont non compactes, homéomorphes à $\mathbb{R}$ et chacun de leur bouts s'enroule sur l'une des feuilles compactes.

En conséquence, les feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ ne peuvent pas être obtenues comme courbes de niveau d'une fonction continue sur $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$.

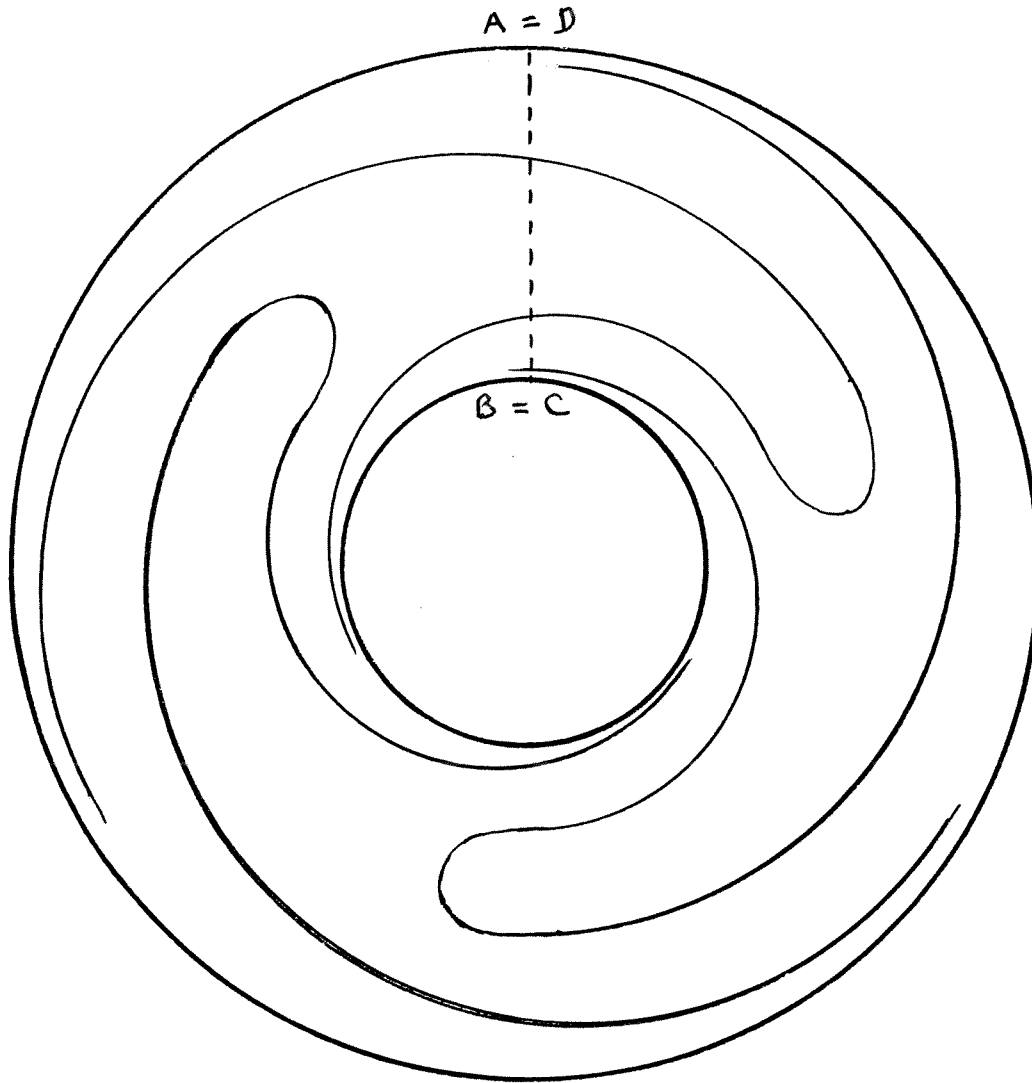


Fig4

I.3. Les composantes de Reeb de dimension 3.

En faisant tourner $\mathcal{R}^2$ [resp. $\mathcal{R}_c^2$] autour de l'axe Oz (respectivement de son image $\rightarrow$ dans la couronne), nous allons maintenant construire les deux **composantes de Reeb de dimension 3** qui seront notées $\mathcal{R}^3$ et $\mathcal{R}_c^3$.

i) la bande $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ étant plongée de façon naturelle dans l'espace $(Oxyz)$, on le fait tourner autour de son axe de symétrie Oz ; elle engendre le **cylindre plein** $D^2 \times \mathbb{S}^1$ (où D^2 est le disque unité fermé du plan (xOy)).

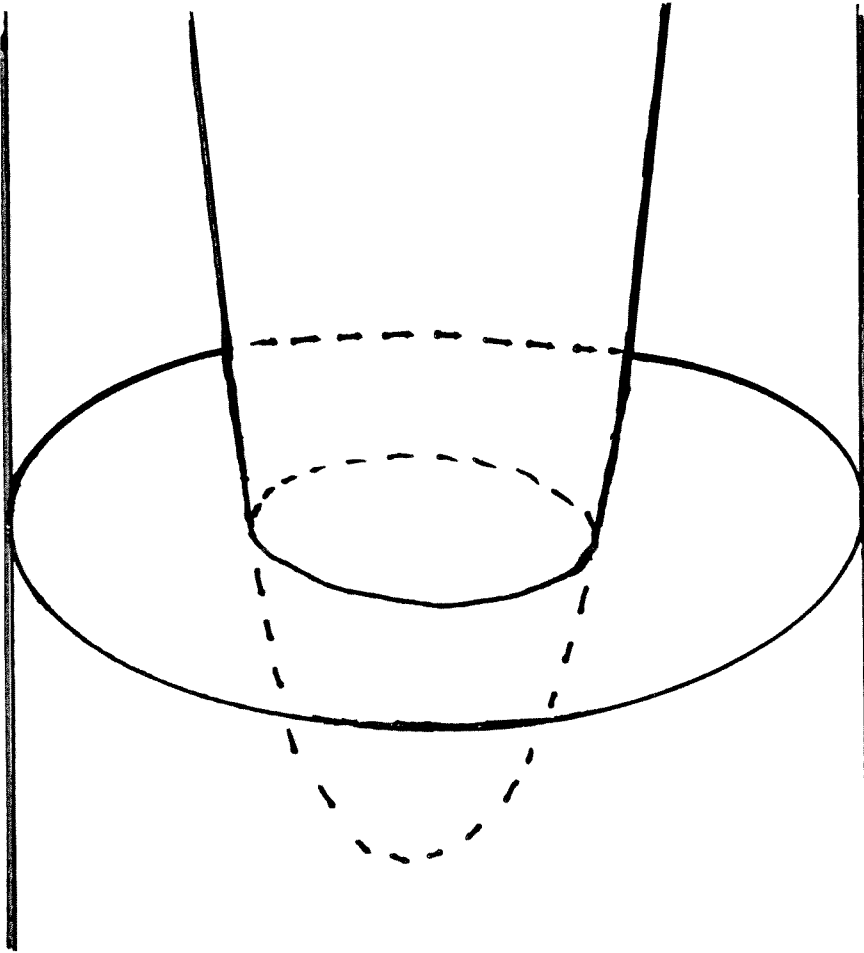


Fig5

- Par la rotation précédente, toute feuille de $\mathcal{R}^2$ engendre une surface de révolution.
- les deux verticales $x=\pm 1$ engendrent le même cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

- chacune des autres feuilles engendre une surface qui se projette homéomorphiquement sur la boule unité ouverte de (xOy) et qui est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

La famille de surfaces ainsi définie peut aussi être obtenue comme la famille des surfaces de niveau de la fonction

$$k(x,y,z) = (x^2+y^2-1)e^z$$

C'est un feuilletage de codimension 1.

Définition : muni de ce feuilletage, le cylindre plein $D^2 \times \mathbb{R}$ est appelé **composante de Reeb non compacte de dimension 3** (noté $\mathcal{R}^3$).

ii) Pour la construction de $\mathcal{R}_c^3$, on a le choix entre deux procédés. Le premier, analogue à I.2.ii consiste à quotienter $D^2 \times \mathbb{R}$ par les translations entières en z . On obtient ainsi le **Tore plein** $D^2 \times \mathbb{S}^1$ et comme le feuilletage $\mathcal{R}^3$ est invariant par les translations, il se projette en un feuilletage de codimension un sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$; ce sera $\mathcal{R}_c^3$.

Le second procédé, qui nous permettra de mieux visualiser $\mathcal{R}_c^3$ est analogue à I.3.i. Il consiste à "*faire tourner*" $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ autour de son "*axe de symétrie*" ; le cercle $Z = \{0\} \times \mathbb{S}^1$ engendrant ainsi le tore plein. En outre chaque feuille de $\mathcal{R}_c^2$ engendre une surface de révolution (autour de Z). Il y en aura de deux types :

- les deux cercles de bord engendrent le tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- chacune des autres feuilles engendre une surface qui se projette homéomorphiquement (le long de $\mathbb{S}^1$) sur l'intérieur du disque $D^2 \times \{1\}$, $1 \in \mathbb{S}^1$. Ces surfaces sont homéomorphes au plan, elles ne sont pas fermées dans $D^2 \times \mathbb{S}^1$, leur adhérence contient le tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Cette famille de surfaces est un feuilletage de codimension 1 sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$ (voir fig.6).

Définition : muni du feuilletage ci-dessus, le tore plein $D^2 \times \mathbb{S}^1$ est la **composante de Reeb compacte de dimension 3**. Elle est notée $\mathcal{R}_c^3$.

Comme pour $\mathcal{R}_c^2$, on notera que les feuilles de $\mathcal{R}_c^3$ ne peuvent être obtenues comme surface de niveau d'une fonction continue sur le tore plein. C'est pour cette raison que la construction de ces "*composantes de Reeb*" exigent une bonne dose d'imagination!

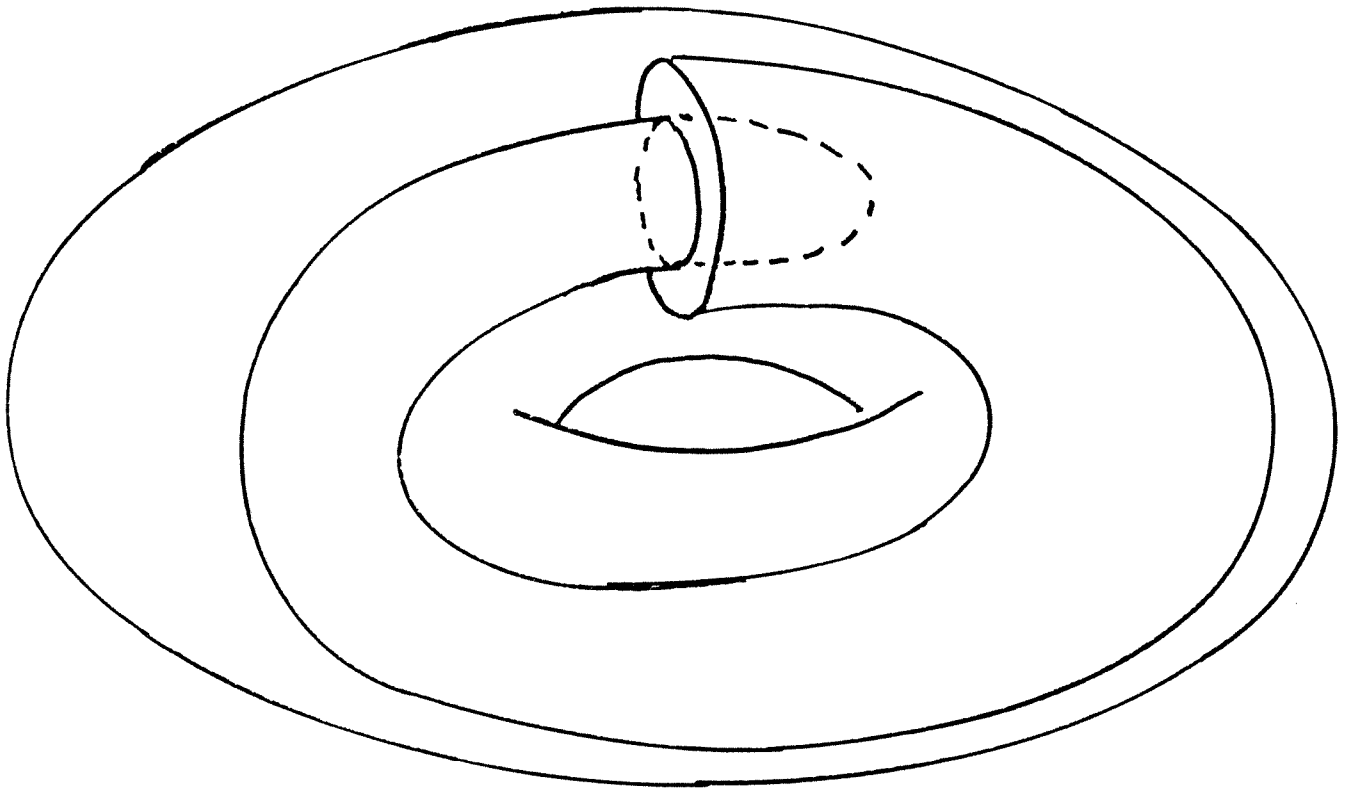


Fig6

I.4. Les feuilletages de Reeb sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Il y a un "*feuilletage de Reeb*" naturel sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$). Sa relative simplicité fera encore mieux ressortir par comparaison la beauté du feuilletage de $\mathbb{S}^3$

La sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la réunion des deux demi-sphères :

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}_+^2 \text{ d'équation } z \geq 0 \\ \text{et} \quad & \mathbb{S}_-^2 \text{ d'équation } z \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{S}_+^2$ et $\mathbb{S}_-^2$ sont toutes deux homéomorphes (par projection verticale) au disque D^2 ; donc on obtient $\mathbb{S}^2$ en recollant deux exemplaires de D^2 le long de leur bord.

De la même façon, en recollant le long de leur bord deux exemplaires de

$D^2 \times \mathbb{R}$	on obtient $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$D^2 \times \mathbb{S}^1$	on obtient $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Le bord de $D^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $D^2 \times \mathbb{S}^1$) étant une feuille de $\mathcal{R}^3$ (resp. $\mathcal{R}_c^3$), la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$) sera munie d'un feuilletage de codimension 1 obtenu par recollement de deux exemplaires de $\mathcal{R}^3$ (resp. $\mathcal{R}_c^3$).

C'est le **feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$)**. Il a pour feuilles un cylindre et des plans (resp. un tore et des plans).

Remarque : évidemment on peut de même recoller deux exemplaires de $\mathcal{R}^2$ (resp. $\mathcal{R}_c^2$). On obtiendra un feuilletage $\mathcal{H}$ du cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{H}_c$ du tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Le feuilletage $\mathcal{H}$ par exemple sera encore obtenu en identifiant les deux verticales $x=+1$ et $x=-1$ dans la figure 7.

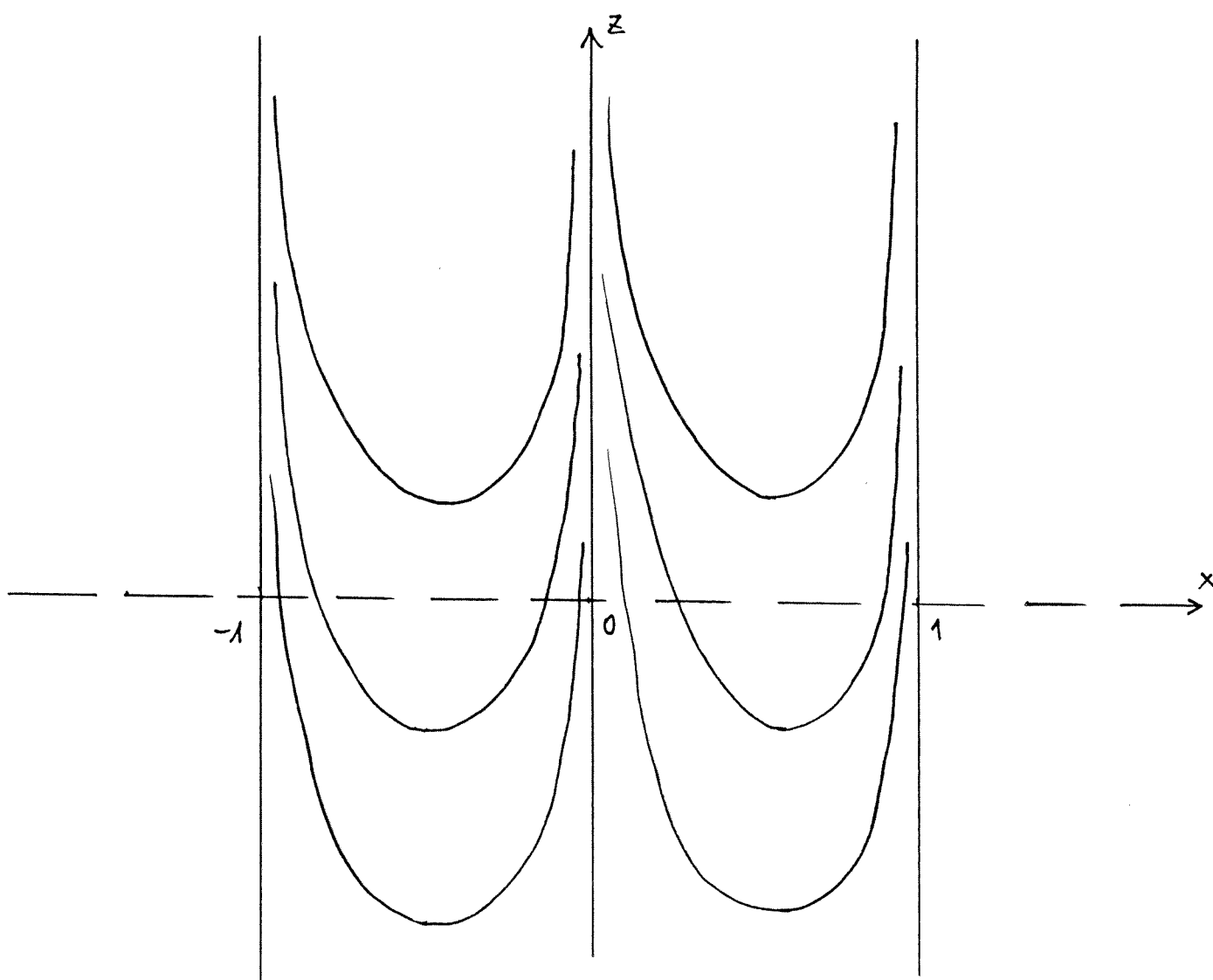


Fig7

1.5. Le feuilletage de Reeb sur $\mathbb{S}^3$.

Enfin nous en arrivons au feuilletage annoncé sur $\mathbb{S}^3$; nous en donnerons deux descriptions basées sur deux descriptions de $\mathbb{S}^3$.

i) Si on identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$, la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ peut être définie par

$$\mathbb{S}^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 / u \overline{u} + v \overline{v} = 1\}$$

Soit alors $\Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} \leq \frac{1}{2}\}$. Pour $(u,v) \in \Delta_1$ on a $v \overline{v} \geq \frac{1}{2}$ donc $v \neq 0$ et l'application continue

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \Delta_1 &\rightarrow D^2 \times \mathbb{S}^1 \\ (u,v) &\rightarrow \left(\sqrt{2} \cdot u, \frac{1}{\|v\|} v \right) \end{aligned}$$

est bijective donc un homéomorphisme par compacité de Δ_1 et $D^2 \times \mathbb{S}^1$; bref, Δ_1 est un tore plein.

De même on vérifie que

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} \geq \frac{1}{2}\} \text{ est un tore plein et} \\ \Delta_1 \cap \Delta_2 &= \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} + v \overline{v} = \frac{1}{2}\} \text{ est un tore } \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Bref on voit que $\mathbb{S}^3$ est obtenue en recollant deux exemplaires de $D^2 \times \mathbb{S}^1$ le long de leur bord.

Si ces deux tores pleins sont feuilletés en composantes de Reeb $\mathcal{R}_c^3$, on obtiendra sur $\mathbb{S}^3$ une structure feuilletée $\mathcal{R}$ de codimension qui a deux types de feuilles :

- une feuille compacte homéomorphe à T^2 .
- toutes les autres homéomorphes au plan.

C'est le **feuilletage de Reeb** de $\mathbb{S}^3$.

ii) Rappelons que le feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ était également obtenu par recollement de deux composantes de Reeb compactes de dimension 3. Il faut donc préciser la différence entre les deux situations.

Pour cela, rappelons encore que $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, c'est à dire que $\mathbb{S}^3$ s'obtient aussi en rajoutant un point à l'infini à $\mathbb{R}^3$ (compactification d'Alexandroff).

Considérons alors la configuration ci-dessous dans le plan (xOz) :

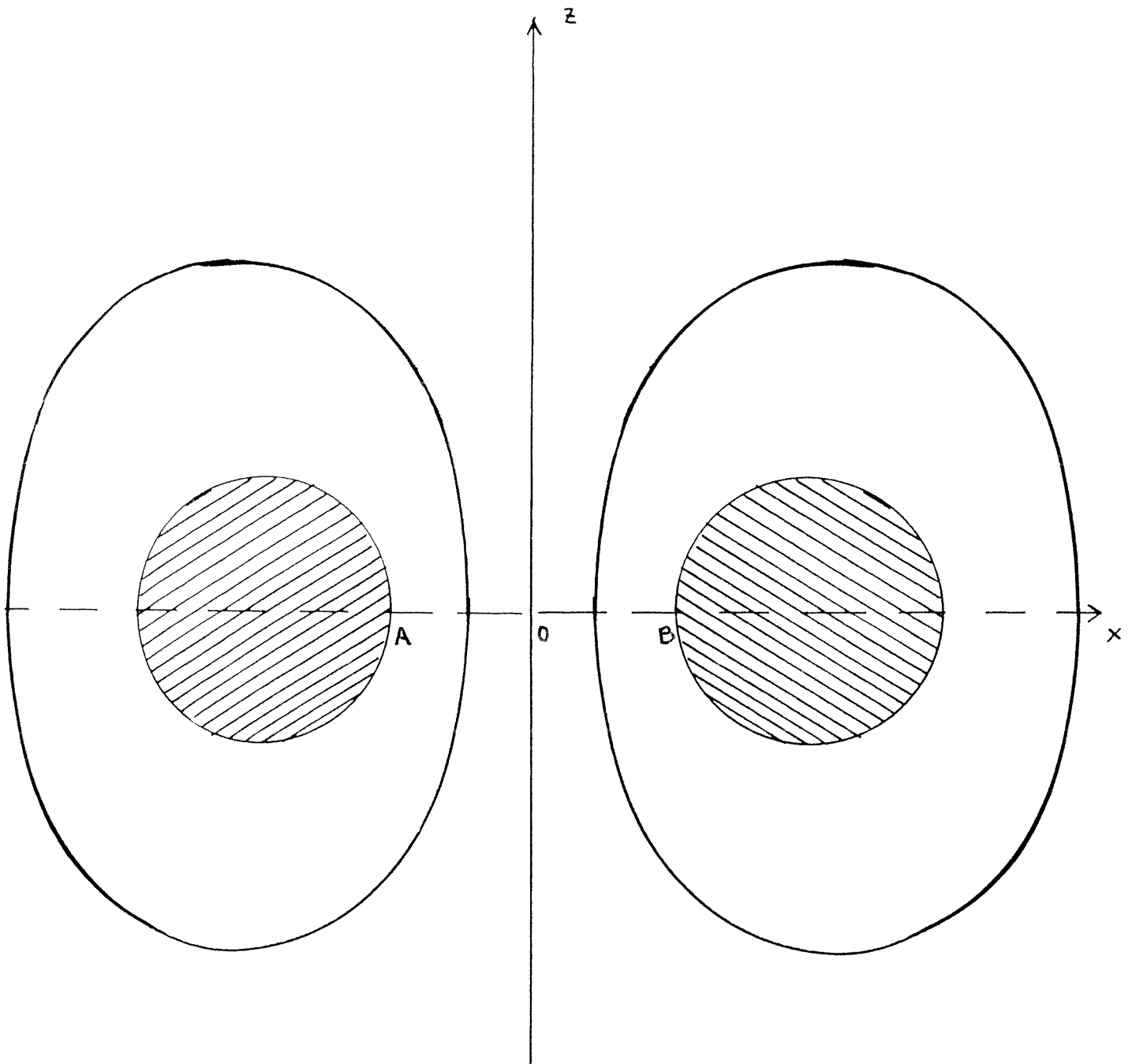


Fig8

Elle est symétrique par rapport aux deux axes et le complémentaire de l'intérieur des deux $\overrightarrow{\text{disques}}$ hachurés est feuilletée par un champ de vecteurs X dont toutes les orbites (sauf l'axe Oz) sont compactes, homéomorphes à S^1 .

$\rightarrow$
Par rotation autour de Oz,

- les disques hachurés engendrent un tore plein $\hat{\Delta}_1$ de $\mathbb{R}^3$ et le champ X s'étend en un champ $\hat{X}$ sur le complémentaire de l'intérieur de $\hat{\Delta}_1$ avec lequel on retrouve la configuration précédente sur chaque plan contenant $\rightarrow$ Oz.

- le segment AB engendre le disque unité $\hat{D}$ du plan (xOy) et la réunion $\hat{\Delta}_2$ de toutes les orbites de $\hat{X}$ passant par $\hat{D}$ est un tore plein, diminué d'un point (le point à l'infini de $\rightarrow$ l'axe Oz).

Evidemment, la décomposition $\mathbb{R}^3 = \hat{\Delta}_1 \cup \hat{\Delta}_2$ redonne par la compactification d'Alexandroff la décomposition en tores pleins $\mathbb{S}^3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ de $\mathbb{S}^3$. Mais surtout, elle permet de voir que cette dernière est obtenue concrètement en recollant les méridiens du bord de Δ_1 avec les parallèles du bord de Δ_2 (et vice-versa). Au contraire, en recollant entre eux les méridiens (resp. les parallèles) on retrouverait la construction de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ comme en I.4.

Le feuilletage de Reeb sur $\mathbb{S}^3$ définit par restriction un **feuilletage de Reeb** de $\mathbb{R}^3$ grâce auquel on voit que le sens de "*spiralement*" des feuilles planaires sur la feuille tonique change de "*direction*" quand on passe d'une composante de Reeb à l'autre (voir fig.9).

Remarques :

a) En fait, n'importe quel homéomorphisme Ψ de T^2 permet de recoller deux composantes de Reeb compactes et donc de construire une variété compacte M_Ψ de dimension 3 munie d'un feuilletage de Reeb. Ces variétés sont essentiellement différentes deux à deux et on feuillette ainsi tous les **espaces lenticulaires**.

b) Dans les années 60, l'intuition de G. Reeb a reçu une confirmation éclatante par les travaux de S.P. Novikov. Par son étude des **cycles évanouissants**, celui-ci a montré qu'il existe une composante de Reeb $\mathcal{R}_c^3$ dans tout feuilletage de codimension 1 d'une variété compacte de dimension 3 à groupe fondamental fini.

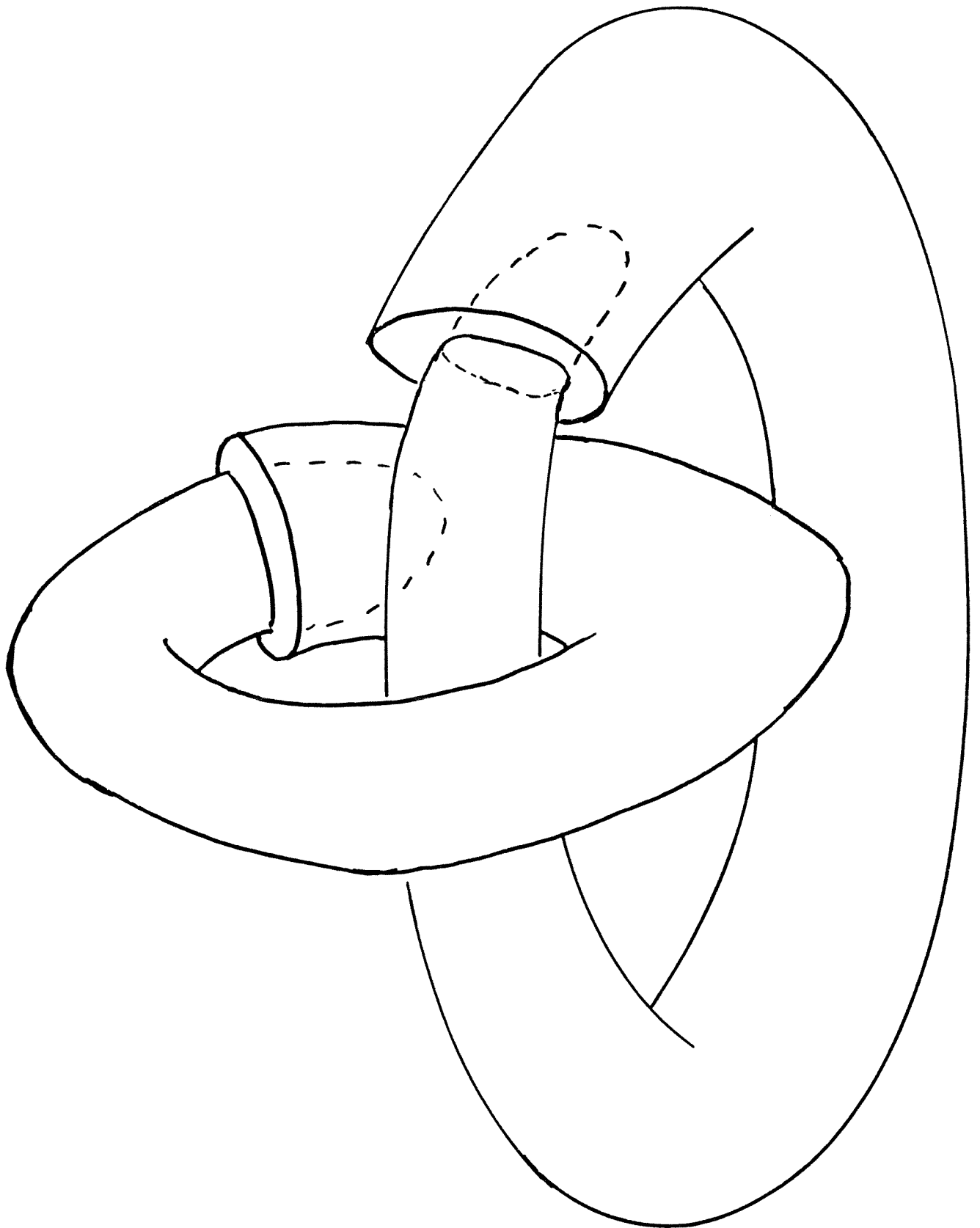


Fig9

II. Les théorèmes de stabilité.

La notion "*d'holonomie*" introduite par Ehresmann et S. Weishu (voir [ES]) généralise pour les feuilletages la notion de "*fonction de premier retour*" bien connue dans le cas des champs de vecteurs (donc des feuilletages de dimension un). C'est la clef pour la formulation des **théorèmes de stabilité** (voir [ER], [R₁], [R₂]) qui constituent la première étape pour toute tentative de classification des structures feuilletées.

Afin d'éviter les complications techniques, nous nous limiterons pour les définitions à deux cas : dimension 1 et codimension 1 tout en énonçant le théorème de stabilité locale dans le cas général.

II.1. Feuilletages de dimension 1 et fonction de premier retour.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension 1 sur une variété M . Pour simplifier encore, nous supposons qu'il est défini par un flot complet :

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

Soit L_0 une feuille compacte (homéomorphe à $\mathbb{S}^1$) et Q une transversale locale à $\mathcal{F}$ qui rencontre L_0 en un point x_0 .

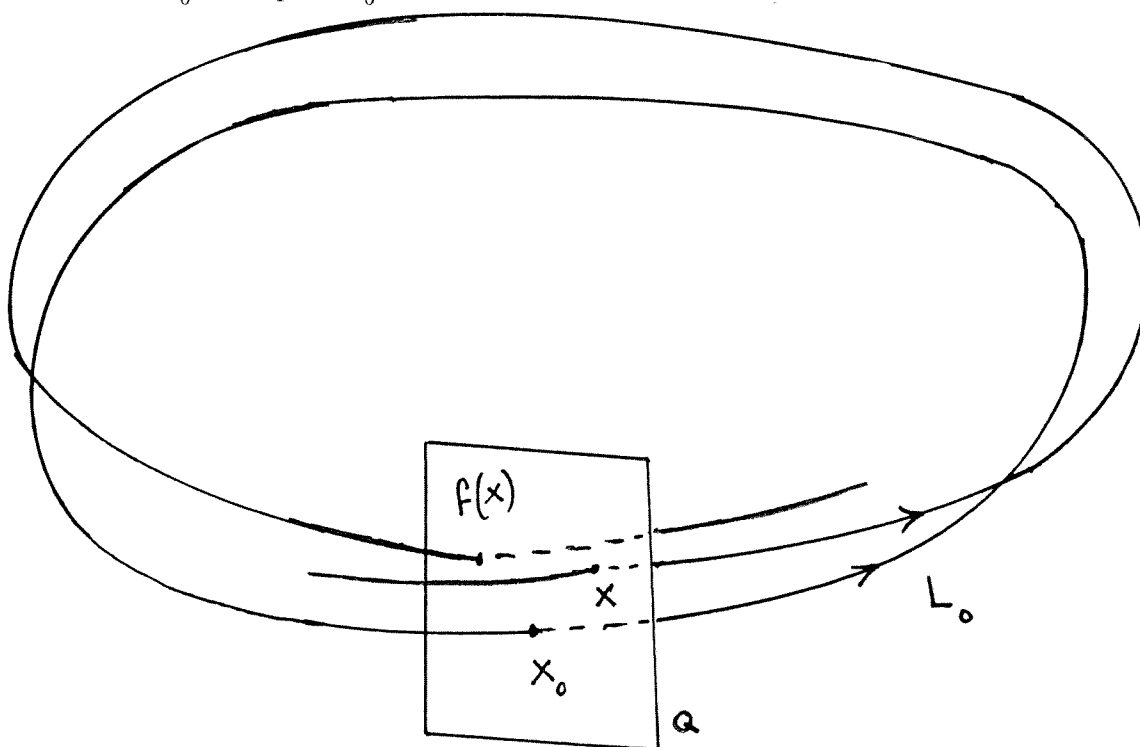


Fig10

Par continuité de ϕ , il existe un voisinage V de x_0 dans Q et une application continue

$$t : V \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout $x \in V$, $f(x) = \phi(t(x), x)$ est le premier point d'intersection de la demi-orbite positive issue de $x \in V$ avec la transversale Q .

Définition : l'application $f : V \rightarrow Q$ est un homéomorphisme local qui fixe x_0 . C'est la **fonction de premier retour** associée à L_0 .

Remarques

a) évidemment f dépend du choix de V , mais son **germe**, c'est à dire sa classe d'équivalence $[f]$ pour la relation :

$$f \rho g \text{ si } f \text{ et } g \text{ coïncident sur un voisinage convenable de } x_0$$

est un invariant bien défini du couple $(\mathcal{F}, L_0)$.

b) on définit de façon analogue le germe $[f^{-1}]$ de la réciproque f^{-1} et le germe $[f^n]$, $n \in \mathbb{Z}$, des itérés f^n de f . Ils forment un groupe cyclique

$$G_{L_0} = \{[f^n]\}, n \in \mathbb{Z}$$

qu'on appellera aussi le **groupe d'holonomie de la feuille compacte** L_0 .

Suivant les cas, le groupe G_{L_0} est fini isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou infini, isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il décrit le comportement de ϕ (ou de $\mathcal{F}$) au voisinage de la feuille compacte L_0 . De façon précise on a la

Proposition 1 : une feuille compacte L_0 possède un voisinage de feuilles compactes si et seulement si G_{L_0} est fini.

En fait si G_{L_0} est fini, L_0 admet un système fondamental de voisinages qui sont réunion de feuilles compactes. En particulier L_0 possède un voisinage "*feuilleté en produit*" si et seulement si $G_{L_0} = \{0\}$.

Pour les feuilles compactes de $\mathcal{R}_c^2$ on a $G_{L_0} \cong \mathbb{Z}$.

II.2. Holonomie et stabilité (cas de la codimension 1).

La proposition ci-dessus est le prototype des théorèmes de stabilité. Pour pouvoir énoncer ceux-ci de façon commode il faut tout d'abord construire un analogue du groupe G_{L_0} pour toute feuille L_0 d'un feuilletage $\mathcal{F}$: ce sera le groupe d'holonomie de L_0 au sens de [ES]. Nous nous limiterons au cas des feuilletages de codimension 1.

i) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur M . Pour simplifier encore, nous supposons qu'il existe un feuilletage $\mathcal{T}$ de dimension 1 sur M défini par un flot complet

$$\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

qui est **transverse** à $\mathcal{F}$ c'est à dire tel que pour tout $x \in M$ il existe un cube

$$\varphi : U \rightarrow J^{n-1} \times J$$

distingué à la fois pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et qui envoie les plaques de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) sur les horizontales $J^{n-1} \times \{\text{pt}\}$ (resp. sur les verticales $\{\text{pt}\} \times J$) (voir I.1.ii).

Soit alors L_0 une feuille (non nécessairement compacte) de $\mathcal{F}$; on prolonge tout lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow L_0$ en une application continue :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (\theta, t) &\rightarrow \phi_t(\gamma(\theta)) \end{aligned}$$

dont l'image est un "cylindre" de base γ transverse à $\mathcal{F}$. La trace de $\mathcal{F}$ sur l'image induit par "image réciproque" un feuilletage $\mathcal{F}_\gamma$ de dimension 1 sur le cylindre de départ $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Ce feuilletage $\mathcal{F}_\gamma$ admet $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ comme feuille compacte et permet d'associer à γ un homéomorphisme local f_γ de $\mathbb{R}$ fixant 0.

Notons $\mathcal{G}_0$ le groupe de germes d'homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}$ fixant 0. A l'aide d'arguments standards, on montre que :

a) le germe $[f_\gamma]$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ dans L_0 .

b) l'application

$$\begin{aligned} h : \quad \pi_1(L_0, x_0) &\rightarrow \mathcal{G}_0 \\ [\gamma] &\rightarrow [f_\gamma] \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes.

Définition : on dira que h est la **représentation d'holonomie** de L_0 ; son image G_{L_0} est le **groupe d'holonomie de L_0** .

Evidemment une feuille à groupe fondamental fini a aussi un groupe d'holonomie fini. En codimension > 1 , on aura quelques difficultés techniques pour construire G_{L_0} en raison de l'absence de feuilletage transverse $\mathcal{G}$.

ii) Il y a deux versions du théorème de stabilité. La première "*locale*" due à G. Reeb est valable en toute codimension (voir théorème 1). La seconde (historiquement la plus ancienne) "*globale*", valable seulement en codimension 1, est due à Ehresmann et Reeb (voir théorème 2).

Théorème 1 (voir $[R_1]$, $[R_2]$, $[R_3]$)

Soit L_0 une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Si G_{L_0} est fini, L_0 possède un système fondamental de voisinages qui sont réunion de feuilles compactes.

Corollaire : ce résultat sera valable à fortiori si $\pi_1(L_0, x_0)$ est fini.

Théorème 2 (voir $[ER]$, $[R_3]$)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M . Si $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte à un groupe fondamental fini, alors toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes à un groupe fondamental fini.

Le contenu intuitif des théorèmes de stabilité est encore que le groupe d'holonomie "*contrôle*" le comportement dynamique du feuilletage au voisinage des feuilles compactes.

Le théorème 2 découle du théorème 1 pourvu que l'on remarque que pour les feuilletages de codimension 1 sur une variété compacte, la réunion des feuilles compactes est encore un compact. Cette dernière propriété n'est pas valable en codimension supérieure à 1 (encore un exemple de G. Reeb), ce qui réserve la stabilité globale à la codimension 1.

III. Actualité de la théorie des feuilletages.

Depuis cinquante ans, la théorie des feuilletages n'a cessé de s'approfondir, de s'enrichir et d'envahir les champs mathématiques les plus divers. *"L'immeuble s'est édifié, des centaines d'ouvriers y ont œuvré, l'édifice n'est pas achevé, mais on peut visiter..."* (G. Reeb ; 1985).

De fait, publications, thèses et colloques consacrés aux feuilletages se succèdent sans interruption et attestent de la vitalité de la théorie ; une simple énumération de quelques uns des thèmes abordés dans ces travaux suffira à donner une idée de sa richesse et de sa diversité. Dans tous ces développements, nous retiendrons 4 "*axes*" sur lesquels se branchent des thèmes variés, certains en voie "*d'épanouissement*", d'autres encore à l'état d'ébauche.

Premier Axe : Approfondissement de la théorie.

- Etude dynamique et topologique en dimension 1 et codimension 1 ; cas général (par exemple recherche d'une interprétation géométrique des cycles évanouissants).
- Stabilité, stabilité structurelle.
Invariants : homologie et cohomologie feuilletées.
- Feuilletages à structure transverses : Feuilletages, Riemanniens...
- Feuilletages à singularités ; théorie du contrôle...

Deuxième Axe : Quotients de Feuilletages et Feuilletages en dimension infinie.

- Essais de "*calcul différentiel*" sur les quotients de feuilletages : Q-variétés, QF-variétés, schémas de variétés, espaces difféologiques...
- Feuilletages sur les "*variétés de dimension infinie*" par exemple les feuilletages isodrastiques de Weinstein, ...).

Troisième Axe : Feuilletages en Géométrie symplectique.

- Variables action - angles et feuilletages Lagrangiens.

- Variétés de Poisson et variétés de Jacobi, intégration symplectique des variétés de Poisson...

Quatrième Axe : Feuilletages et théorie des opérateurs.

- C^* -algèbres de Feuilletages et géométrie non commutative.
- K-théorie ; théorie de l'index ; conjecture de Baum-Connes...

En réalité, la théorie des Feuilletages déborde largement du cadre précédent : elle est trop riche pour se laisser enfermer dans un schéma préétabli!

Chaque colloque auquel il participait était pour G. Reeb l'occasion de répéter, avec un plaisir toujours renouvelé, à la fois pour lui-même et pour ses auditeurs, ce qui constitue son deuxième titre de gloire (après le feuilletage de $\mathbb{S}^3$) : **l'histoire du peigne!** Ce sera donc aussi notre conclusion :

Dialogue de G. Reeb et C. Godbillon en promenade aux alentours du Schnepfenrieth :

G : "*Tiens, tu viens de perdre quelque chose.*"

R : "*Non, je n'ai rien perdu, j'ai seulement jeté un peigne!*"

G : "*Ah et pourquoi as-tu jeté ce peigne?*"

R : "*Parce qu'il a perdu une dent!*"

G : "*Mais ce n'est pas une raison de jeter un peigne parce qu'il a perdu une dent!*"

R : "*Oui, mais... c'était la dernière...*"

Quelques références

On ne donnera ici que quelques références historiques concernant le "*Feuilletage de Reeb*". Pour une bibliographie complète, on se reportera aux ouvrages spécialisés.

- [ER] Ch. Ehresmann et G. Reeb
Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables.
C.R. Acad. Sc. Paris, 218(1944), 955-957.
- [ES] Ch. Ehresmann et S. Weishu
Sur les espaces feuilletés : Théorème de Stabilité.
C.R. Acad. Sc. Paris, 243(1956), 344-346.
- [R₁] G. Reeb
Variétés feuilletées, feuilles voisines.
C.R. Acad. Sc. Paris, 224(1947), 1613-1614.
- [R₂] G. Reeb
Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini.
C.R. Acad. Sc. Paris, 228(1949), 47-48.
- [R₃] G. Reeb
Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.
Hermann, Paris (1952).