LE PARCOURS D'UN MATHÉMATICIEN :

Georges REEB

Les mathématiques et un certain sens de la pratique

Les mathématiques, j'ai toujours aimé ça. Mon père qui était tonnelier me faisait faire du calcul mental très fréquemment, plus exactement je lui demandais de m'en faire faire. Chez moi, les mathématiques et un certain sens de la pratique ça allait de pair. Je me souviens très bien en classe de quatrième le professeur avait posé un problème concernant la roue d'un char cerclée par un forgeron. Il avait donné toutes les dimensions, la densité du métal, le prix du métal etc et il fallait calculer le prix du cerceau. Pour moi il était clair, parce que j'avais vu des charrons à l'œuvre, que le cerceau était un parallélépipède rectangle qu'on repliait pour en faire un cerceau. Par conséquent j'ai calculé son volume de cette manière. Il est clair qu'à peu près la totalité de la classe avait procédé en calculant la différence de volume des deux cylindres qui limitent le cerceau. Et le professeur qui évidemment avait donné ce problème en application des calculs de volumes de cylindres a été amusé de trouver une autre version et ne m'a pas pénalisé, mais pas non plus félicité.

Ça m'a toujours plu les mathématiques dans leur relation avec la pratique et mon parcours était jalonné de quelques petites trouvailles. Une trouvaille dont j'ai été fier était située au niveau du certificat de mécanique rationnelle (niveau maîtrise actuelle) où a été posé le problème suivant : vous considérez un vase de forme assez arbitraire mais qui ressemble à un vase. Le centre de gravité de ce vase, considéré comme solide, était supposé relativement bas, et on versait de l'eau dans le vase. Il s'agissait de montrer que, au moment où le centre de gravité du système "vase plus eau" se trouvait dans le plan d'affleurement de l'eau, ce centre de gravité était le plus bas possible, c'est-à-dire qu'à partir de ce moment, qu'on ajoute de l'eau ou qu'on retranche de l'eau, le centre de gravité monte. Je me souviens qu'à l'époque la plupart des étudiants avaient traité le problème à coup d'intégrales doubles, triples, etc, de théorèmes plus ou moins complexes alors que la solution est évidente. Vous supposez que le centre de gravité se situe dans la surface d'affleurement. Si vous ajoutez une tranche de liquide c'est tout à fait évident, par composition des centres de gravité ça monte. Si vous en enlevez il y a une petite histoire de signes mais le même raisonnement qui marche à la montée marche à la descente. Disons qu'il faut réfléchir un tout petit peu plus pour ne pas s'emmêler dans les signes. Disons que c'est du niveau du primaire. Pour moi j'ai été un peu étonné quand même de me rendre compte que de tels raisonnements très simples venaient assez peu souvent à l'esprit des gens. Par ailleurs je n'avais pas de réussite particulière dans les petites devinettes qu'on pose quelquefois et exerçant une certaine observation mathématique. Très souvent je me fichais dedans comme tout un chacun.

Le choix des mathématiques comme études

C'est la façon la plus simple de s'en sortir techniquement dans les études. D'une certaine manière ce sont les études qui coûtent le moins cher, que l'on peut faire en étant éventuellement un peu éloigné du lieu d'étude. Comme j'aimais ça et que je n'y trouvais que des avantages, je me suis lancé là-dedans. J'ai choisi les mathématiques par envie, parce que ça s'accordait avec ma vie. C'était en 1939. L'environnement particulier imposait des contraintes et pour moi il s'est trouvé que ces contraintes s'accordaient bien avec les mathématiques. En tant qu'étudiant, l'enseignement était fait par des gens qui appartenaient de près ou de loin au groupe Bourbaki. J'ai donc été élevé au biberon bourbakiste. J'ai beaucoup aimé cela. Je ne serai certainement jamais efficace comme formaliste mais j'ai beaucoup d'admiration pour le formalisme et encore plus d'admiration pour ceux qui savent le manipuler. J'ai toujours été choqué par le fait que des mathématiciens ne s'intéressent pas au débat entre intuitionnistes et formalistes. Mais j'ai considéré qu'il n'était pas important de prendre une option dans un tel débat. Je n'irai certainement pas dire que je suis intuitionniste, encore moins formaliste. Je ne peux pas évoquer cette époque, sans songer à Jacques Feldbau. Sur la porte d'entrée de la bibliothèque de l'Institut de mathématiques de Strasbourg on lit "salle Jacques Feldbau". Feldbau était un nom juif, assez répandu en Alsace à l'époque. Malheureusement Feldbau a connu le sort des juifs à l'époque : il est mort en déportation dans des conditions dramatiques. C'était un très chic type, un Monsieur très bien et qui avait déjà en cours une thèse avec Ehresmann, une thèse qui certainement serait devenue un travail important si Feldbau avait pu l'achever.

La recherche : l'influence déterminante de Ehresmann

A l'époque le mot "recherche" était encore un mot qu'on ne prononçait pas à la légère. Un jeune homme ou une jeune fille ne déclarait jamais : "je vais faire de la recherche" (pour autant déjà qu'on savait que ça existe). On considérait que c'était réservé à une élite tout à fait restreinte. On n'avait pas soi-même qualité à parler de faire de la recherche. La seule chose qui pouvait arriver, c'était que quelqu'un dise "on vous oriente là-dedans". J'ai fait ma licence etc en même temps que j'étais pion, maître d'internat, les deux choses s'accordaient bien ensemble. Le tout s'est soldé par le fait que j'ai été nommé professeur du secondaire, sans difficulté particulière, sans brio particulier non plus. Toute cette partie était auvergnate. Je suis retourné en Alsace après la libération. Là, grâce à mon patron Ehresmann, j'ai été boursier du CNRS avec un salaire de famine.

J'aurais dû commencer à enseigner comme professeur. Mais j'ai quand même fini par accepter ce poste au CNRS. Quelquefois des patrons recherchent des élèves. En fait, Ehresmann avait obtenu à Strasbourg la première chaire de topologie créée en France, mais était replié à Clermont-Ferrand à cause de la guerre. Il s'est trouvé que j'ai été auditeur de cet enseignement de topologie, qui se situait au niveau du DEA actuel. Ehresmann m'a donc entraîné sur cette voie. Maintenant je n'en tirerai pas la vanité de dire que c'était parce que j'étais réellement brillant. Il trouvait que je faisais du bon boulot. Et comme il avait tout à fait envie d'avoir des étudiants j'ai pu suivre cette carrière.

Ehresmann m'a enseigné la communication : écouter, parler, ne jamais se taire. Aujourd'hui il est difficile de trouver des personnes qui disent des choses que vous pourriez écouter et d'autres qui écoutent ce que vous pouvez raconter. Avec Ehresmann on était trois ou quatre amis auvergnats qui le fréquentions de façon assidue. Il y avait un jour de la semaine où on se rendait chez lui. On sonnait à la porte. La bonne venait ouvrir et nous reconnaissait. Elle nous catapultait d'office dans son bureau. Et comme on venait par le train relativement tôt le patron n'avait pas encore déjeuné. On savait qu'il fallait attendre un peu. Assez vite on le voyait. Puis alors pendant deux heures, trois heures ça parlait, ça parlait, ça parlait. Il avait une capacité d'écoute extraordinaire, pourvu qu'on lui raconte quelque chose.

La carrière de chercheur

Ehresmann m'a communiqué le sujet qui allait être celui de ma thèse, les variétés feuilletées. La description la plus simple est de dire que c'est une pâte feuilletée, comme son nom l'indique. Ce sujet était excellent. La rencontre a été bonne. Ca m'a inspiré. Ma thèse est de 48. Le sujet a fait une belle carrière. Des centaines et des centaines de papiers. Et d'autre part une université californienne a pour motif décoratif une sculpture sur ce qui est appelé feuilletage de Reeb. La réussite, c'est celle d'Ehresmann d'avoir proposé ce sujet.

J'ai fait bien des voyages, je suis passé à Princeton par exemple. Mais je dirais que le voyage le plus intéressant s'est fait à 50 km d'ici. A cette époque fonctionnait en Forêt Noire et fonctionne toujours le fameux Institut de recherche d'Oberwolfach. A l'époque c'était un lieu de rencontre tout à fait extraordinaire. C'était quelque peu postérieur à la Libération. Presque tous les mathématiciens de quelque importance sont passés par là, à cette époque. Il s'est trouvé que j'ai eu la veine de pouvoir séjourner à Oberwolfach pendant presque une année, de dormir dans la bibliothèque et j'ai donc eu la possibilité inouie de rencontrer des chercheurs de tous bords. Parmi les personnages marquants de l'époque il y avait sans aucun doute de Rham, Heinz Hopf et bien d'autres...je parle de topologues. Cette façon de faire la louange d'Oberwolfach ne doit pas faire oublier que Strasbourg aussi était un centre d'un grand intérêt; grâce à Ehresmann on a vu défiler à Strasbourg des gens tout à fait remarquables. Mais Oberwolfach, du fait de son isolement dans la forêt, est un endroit où ceux qui y sont ont au moins le temps d'écouter sinon l'envie de le faire.

Puis j'ai été nommé à Clermont-Ferrand en 1953, puis Grenoble et Strasbourg en 1963. J'ai commencé à enseigner. Je ne revendique certainement pas d'avoir été un bon prof. Mon ami Aimé Fuchs, lui, avait une réputation d'enseignant parfait. Il avait un truc : il préparait ses cours. Je revendique de n'avoir jamais reculé devant un enseignement nouveau à faire. Par exemple à une époque où les enseignements de statistiques étaient très peu répandus en France, à Clermont-

Ferrand, j'ai flairé le vent et je me suis lancé dedans sans aucune compétence et je crois que j'ai rudement bien fait. Je n'ai jamais reculé devant l'idée d'enseigner quelque chose de nouveau et je ne me suis jamais posé la question de savoir si j'étais compétent ou non. Je crois que ça a été profitable pour moi et pour les auditeurs. J'attachais aussi une grande place aux choses extérieures aux mathématiques : savoir pourquoi on fait telle ou telle chose. Pour revenir aux probabilités et aux statistiques, à vrai dire la théorie mathématique des probabilités, je m'en fiche. Si je rencontre un Monsieur qui me dit : "si j'avais quelques ingénieurs qui sachent faire un peu de contrôle de la qualité, alors ma boîte s'en porterait peut-être mieux", ça m'intéresse. C'était un argument pour me mettre dans cet enseignement que je faisais à la Bourbaki. Il y a une deuxième revendication. Je pense que j'ai toujours essayé de provoquer chez les autres la réflexion personnelle quel que soit le niveau auquel se situe l'enseignement. J'ai l'impression que cet aspect de mon enseignement a été réussi. Avec cette méthode là j'ai évidemment fait des bides extraordinaires. Je n'en regrette aucun. Sans aucun doute la partie recherche était essentielle mais j'ai toujours adoré enseigner.

J'ai été candidat à l'agrégation mais j'ai toujours été collé avec brio, étant toujours très nettement au-dessous de la barre. Il y a une chose qui me préoccupait beaucoup, c'était le sort des étudiants en universités, en mathématiques qui avaient des qualités manifestes et qui devaient aborder l'agrégation dans des conditions absolument pénibles à l'époque et j'ai toujours gueulé contre ce qui me paraissait une injustice : avoir d'un côté l'Ecole Normale avec les conditions les meilleures possibles pour aborder le concours et la situation tout à fait déficiente dans laquelle se trouvaient nos étudiants. Les choses ont beaucoup changé d'ailleurs depuis.

La rencontre avec l'analyse non-standard

Leibniz voulait faire du calcul infinitésimal. On peut se demander, malgré la nostalgie des infinitésimaux introduits par Leibniz, pourquoi on a abandonné les infinitésimaux? On distinguerait deux types de réponses. On a abandonné la notion parce qu'elle est contradictoire : on tombe très vite sur des cercles vicieux. Une deuxième réponse est que de toute façon ce que propose la mathématique actuelle est tellement bon dans sa construction qu'il n'y a plus de raisons de chercher une autre issue. Robinson nous a dit : le cercle vicieux que vous croyez voir dans la notion d'infinitésimaux est simplement une erreur de votre part. Les mathématiciens auraient pu convaincre Robinson qu'il se trompe dans son argumentation. Ils ne l'ont pas fait, non parce qu'ils ont cherché à le détromper mais parce qu'ils ont dit : nous savons d'avance que vous êtes dans l'erreur. C'est exactement le procès fait à Galilée. Pourquoi les idées de Leibniz ont-elles été ressenties comme contradictoires et pourquoi a-t-on eu tort de penser qu'elles étaient contradictoires? Leibniz définit un réel infinitésimal positif ε comme un réel tel que pour tout réel **connu** positif x on a $\varepsilon < x$ (ndlr : dans cette définition ε est considéré comme un réel inconnu). Supposons qu'il existe des infinitésimaux et on va montrer qu'on aboutit à une contradiction. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des infinitésimaux. Il n'est pas vide à cause de l'hypothèse qu'il existe des infinitésimaux. Il est majoré par exemple par un. Donc $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure appelée α. Mais alors $\alpha/2$ sera aussi un majorant de $\mathcal{E}$. D'où la contradiction. En fait si on suit les règles de Bourbaki il n'y a aucun moyen de montrer que $\mathcal{E}$ est un ensemble. D'où la contradiction est levée. Dieudonné a regardé dans le livre de Robinson comment il définit un infinitésimal. Et Robinson le définit par une construction bourbachique complexe. Effectivement Dieudonné a tout de suite pigé que Robinson ne se trompait pas. Par contre Dieudonné a dit que le travail de Robinson pouvait être inséré dans l'ouvrage de Bourbaki comme sous-chapitre de la topologie, dans la rubrique filtre, sous la rubrique ultra-produit. De plus Cartier, membre du groupe Bourbaki, a fait un exposé Bourbaki sur l'analyse non standard et continue à suivre cette affaire avec des vues saines sur cette situation là. Dieudonné ne s'est pas intéressé davantage à l'analyse non standard mais n'a jamais eu un propos malheureux pour l'analyse de Robinson.

Dans la bibliothèque de l'institut de math j'ai mis le nez sur le livre de Robinson "Non standard analysis" dont j'avais vaguement entendu parlé. J'ai ouvert ce livre, évidemment je n'ai pas commencé par le lire à partir de la page 1, car pour moi il était évident que de toute façon je n'y comprendrai rien; j'ai commencé à la page 51, comme le conseillait Robinson : instantanément j'ai vu que Robinson avait raison et que c'est ce genre de mathématiques qu'il fallait faire. Un quart d'heure après avoir eu le livre en main, j'ai écrit dans ma tête les 200 pages suivantes.

Après ma découverte du livre de Robinson, j'ai voulu en parler autour de moi et j'ai eu les plus grandes suprises de ma vie. D'abord j'ai rencontré beaucoup de gens qui m'ont menti, ce que je ne savais pas à l'époque. Beaucoup de gens m'ont dit qu'ils n'avaient jamais entendu parler de ça. En fait ils m'ont menti : ils avaient écouté des enseignements donnés par Robinson à Paris et en avaient conclu que c'était de la fadaise. Mais comme ils me voyaient dans cet état enthousiaste, ils se sont dits : "Reeb est en train de se casser la figure, surtout ne faisons rien pour lui éviter la chute".

Ils ont refusé absolument toute communication sur le sujet. D'une certaine manière ce sont de très mauvais mathématiciens : ils ont le sentiment d'avoir très bien compris le système formel dans lequel ils se déplacent et sont totalement incapables de discerner un faux raisonnement de cette nature là (ndlr : du type de celui qu'on objecte à l'analyse non-standard). Depuis, quand même, l'histoire s'est un peu plus diffusée et on commence à être un peu prudent. Il y a vingt ans ils étaient incapables de voir que ce raisonnement est fallacieux. S'ils avaient bien compris le système formel dans lequel ils travaillent ils auraient immédiatement dits "mais d'après les règles de Bourbaki, je vois nulle part une raison de donner à $\mathcal{E}$ le qualificatif d'ensemble". J'ai rencontré des personnes qui avaient compris. J'ai exposé le slogan "les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$" (c'est-à-dire il existe des entiers non standards) à des gens dont j'attendais une réaction intéressante. Tout d'abord les deux tiers avaient les réactions habituelles des mathématiciens. De plus ce n'est pas parce qu'on parle de cette question à un bonhomme que le Monsieur aura le temps de réfléchir à ça ou d'être un peu intéressé. Maintenant j'ai rencontré une catégorie d'individus qui ont parfaitement compris. Dans cette catégorie je citerai Lichnerowicz, de Rham, Choquet, l'anglais Stewart. Ces personnes qui sont de grands mathématiciens ont toutes les qualités du scientifique c'est-à-dire qu'aucune ne considère qu'elle a apporté le moindre seau d'eau au moulin. Ces personnes se sont donc mises à l'arrière plan et n'ont pas posé la question car elles ont estimé simplement que ce n'était pas leur rôle de le faire. Elles n'avaient pas à ouvrir la bouche sur un sujet où elles n'étaient pour rien et où de toute façon leurs autres préoccupations ne leur donnaient pas de temps.

Ensuite, il y a eu des personnes comme Whitney, américain très connu en topologie, à l'esprit très fin. J'ai eu l'occasion d'en parler à Whitney et je suis tombé sur un mur, l'homme qui n'était plus capable, qui avait vieilli. Mon patron Ehresmann, dont j'avais attendu beaucoup, avec toute la déférence que je lui dois, était aussi presque dans cette catégorie. Il n'a plus été apte à m'écouter. Enfin il y a eu les ennemis manifestes... Je pense que certains mathématiciens m'ont reproché d'avoir popularisé un truc qui était réservé à une élite.

J'en ai parlé à des jeunes et il s'est constitué une équipe qui a fait parler d'elle. Je n'ai pratiquement pas publié moi-même. J'ai donné l'occasion à des tas de jeunes de s'exprimer sans m'être mis en travers de leur expression par des choses que j'aurais publiées moi-même. En publiant moi-même j'imprimais certainement un style qui aurait pu les gêner.

Aujourd'hui, un des domaines où l'apport de l'analyse non standard est évident est la liaison entre le discret et le continu. L'exemple le plus typique à notre époque est l'ordinateur. Par exemple, sur l'écran on a un damier discontinu de pixels et on veut faire croire qu'on a des images continues. Pour parler de l'écran on utilise la géométrie de Descartes : c'est mettre un casque rond sur une tête carrée. Or la mathématique non standard c'est exactement le langage qu'il faut pour parler de l'écran comme d'un vrai plan euclidien. Je pense que les applications de la mathématique non standard dans ce domaine ont un avenir considérable et qu'il n'en est qu'à son début.