RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1994

Nous avons publié dans le n° 75 de *'L'Ouvert'* les énoncés des exercices proposés au Rallye mathématique d'Alsace au printemps 94. Nous vous donnons ci-dessous les solutions proposées dans le rapport de ce Rallye. Des prix ont été décernés à 32 élèves de Terminale et à 33 élèves de Première. Ce sont Vincent Bornert, David Gerber, Luc Maurer et Julien Pottecher qui ont eu un premier prix en Terminale et Dominique Stuzmann, Damien Bach, Benédicte Moritz, Philippe Ulrich, Emmanuel Wild, Youssef Alouahabj et Serge Himy qui ont eu un premier prix en Première. Bravo à tous!

RALLYE DE PREMIERE 1994

1e exercice

Un hexagone inscrit dans un cercle a 3 côtés de longueur a et 3 côtés de longueur b. Quel est le rayon du cercle ?

SOLUTION :

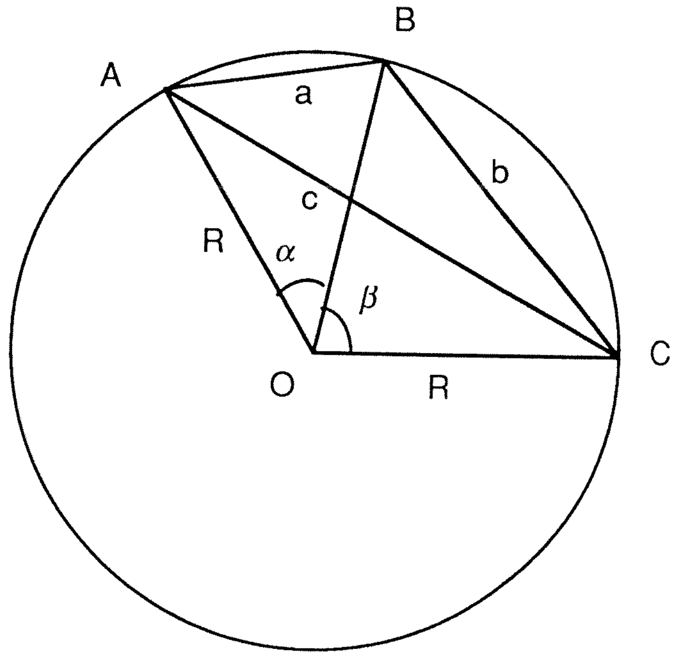
Il n'y a que 3 ordres de côtés possibles :

* a, a, a, b, b, b

* a, a, b, b, a, b (dans les 2 sens)

* a, b, a, b, a, b

Et à chaque fois, on pourra trouver deux côtés de longueurs a et b consécutifs. On aura donc toujours la figure ci-contre :



L' hexagone sera donc composé de 3 triangles isocèles de base a et de 3 triangles isocèles de base b, les côtés égaux valant R.

Si on appelle α l'angle au sommet du triangle de base a et β l'angle au sommet du triangle de base b on aura $3\alpha + 3\beta = 360°$

Donc on en déduit que $\alpha + \beta = 120°$

Dans le triangle OAC on aura donc

$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \times OA \times OC \times \cos(120°)$

$c^2 = R^2 + R^2 - 2 \times R \times R \times (-\frac{1}{2})$

$\boxed{c^2 = 3R^2}$

D'autre part les triangles OAB et OBC sont isocèles donc

$\widehat{ABO} = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBO} = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$

Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO} = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$

$= 180° - \frac{120°}{2} = 120°$

Puis en appliquant la même relation on obtient

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(120°)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + ab}$

On en déduit $3R^2 = a^2 + ab + b^2$

c'est-à-dire $\boxed{R = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}}$

2e exercice

Alice, Betty et Carole ont subi une même série de tests notés de 1 à 10. Le professeur de Mathématiques leur annonce que l'ensemble de toutes les notes enregistrées comporte trois valeurs différentes apparaissant toutes le même nombre de fois. Le professeur de Physique ajoute que Betty est la première en Physique. En consultant leur Minitel, elles apprennent leurs totaux respectifs :

Alice : 20 Betty : 10 Carole : 9

Qui est première en Mathématiques ?

SOLUTION :

- Appelons x, y, z les 3 valeurs des différentes notes avec $x > y > z \geq 1$. Soit N le nombre de fois qu'apparait chaque note ; on a :

N (x+y+z) = 20+10+9 $\Leftrightarrow$ N (x+y+z) = 39

. Les diviseurs de 39 sont 1 ; 3 ; 13 ; 39 .

. On a $x + y + z \geq 3+2+1 = 6$

Il y a seulement deux possibilités N = 3 et x + y + z = 13
ou N = 1 et x + y + z = 39.

Cette dernière possibilité ne convient pas car $x + y + z \leq 10 + 9 + 8 = 27$.

On a donc forcément <u>N = 3 et x + y + z = 13.</u>

- Cherchons maintenant les différentes manières d'obtenir $x + y + z = 13$.

On a : $13 = 10 + 2 + 1 = 9 + 3 + 1 = 8 + 4 + 1 = 8 + 3 + 2$
$= 7 + 5 + 1 = 7 + 4 + 2 = 6 + 5 + 2 = 6 + 4 + 3$
Puis procédons par élimination, en enlevant les cas où on ne peut pas obtenir un total de 20 avec 3 notes.

Avec $\{1;2;10\}$: • $10 + 10 + 10 = 30$ • $10 + 10 + 2 = 22$ • $10 + 10 + 1 = 21$
• les autres sont inférieurs à $10 + 2 + 2 = 14 < 20$

Avec $\{1;3;9\}$: • on ne peut avoir 20 en additionnant 3 nombres impairs

Avec $\{1;5;7\}$: • même raison

Avec $\{2;3;8\}$: • $8 + 8 + 8 = 24$
• les autres sont inférieurs à $8 + 8 + 3 = 19 < 20$

Avec $\{2;4;7\}$: • $7 + 7 + 7 = 21$
• les autres sont inférieurs à $7 + 7 + 4 = 18 < 20$

Avec $\{2;5;6\}$
et $\{3;4;6\}$: • le total est toujours inférieur à $6 + 6 + 6 = 18 < 20$

* La seule possibilité qui reste est $\{1;4;8\}$ et
la seule manière d'avoir 20 est $8 + 8 + 4$
la seule manière d'avoir 10 est $8 + 1 + 1$
la seule manière d'avoir 9 est $4 + 4 + 1$

* On a donc les notes suivantes :

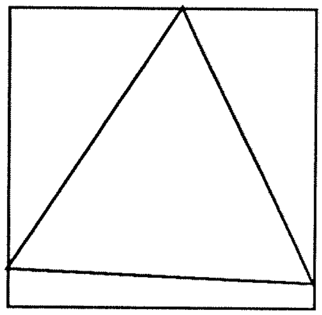
Alice :	8 ; 8 ; 4
Betty :	8 ; 1 ; 1
Carole :	4 ; 4 ; 1

On sait que Betty est première en Physique ; la note 1 ne lui permet pas d'être première car Alice a plus de 1 dans les trois tests. Betty a donc 8 en Physique et elle est la première donc Alice n'a pas 8 et elle ne peut avoir que 4 en Physique. Alice a donc 8 dans les 2 autres matières (dont les Mathématiques) et Betty et Carole n'ont pas 8 dans ces matières.

Conclusion : Alice est la première en Mathématiques

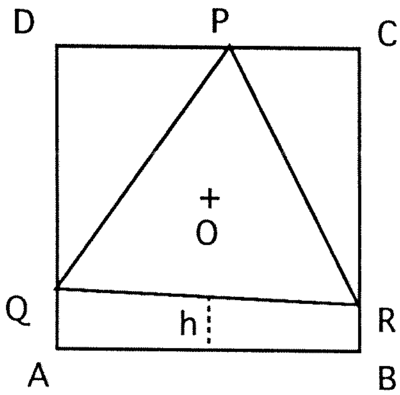
3e exercice

Un triangle dont tous les côtés sont de longueur strictement supérieure à 1 est inscrit dans un carré de côté 1. Montrez que le centre du carré est à l'intérieur du triangle.



SOLUTION :

Deux sommets du triangle ne peuvent être sur un même côté du carré (sinon le côté du triangle est de longueur inférieure ou égale à 1). Les sommets sont donc sur 3 côtés distincts du carré, et en mettant en bas le côté du carré sur lequel il n'y a pas de sommet du triangle, on obtient la figure suivante :



. Le centre O du carré est à l'intérieur du triangle si et seulement si O est au-dessus de (QR). En effet O sera toujours en-dessous de (PR) car O $\in$ (DB) qui est en-dessous de (PR) et O sera toujours en-dessous de (PQ) car O $\in$ (AC) qui est en-dessous de (QP) à cause de la disposition des points.

. Soit h la longueur du segment joignant le milieu de [AB] au milieu de [QR].

. Le point O est au-dessus de (QR) se traduit par $h < \frac{1}{2}$, or $h = \frac{1}{2}(AQ + BR)$,
donc il faut prouver que $AQ + BR < 1$.

. On sait que $1 < PQ$ et $PQ \leq PD + DQ$ (inégalité triangulaire)
et que $1 < PR$ et $PR \leq PC + CR$ (inégalité triangulaire)

on en déduit PD + DQ + PC + CR > 2

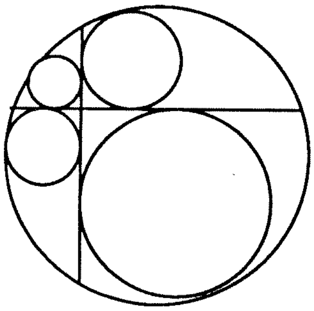
$$PD + DQ + PC + CR > 2 \Leftrightarrow CD + DQ + CR > 2$$
$$\Leftrightarrow DQ + CR > 1 \qquad \text{(car CD = 1)}$$
$$\Leftrightarrow (1\text{-}AQ) + (1\text{-}BR) > 1$$
$$\Leftrightarrow 1 > AQ + BR$$

Conclusion :

Le point O est nécessairement à l'intérieur du triangle.

RALLYE DE TERMINALE 1994

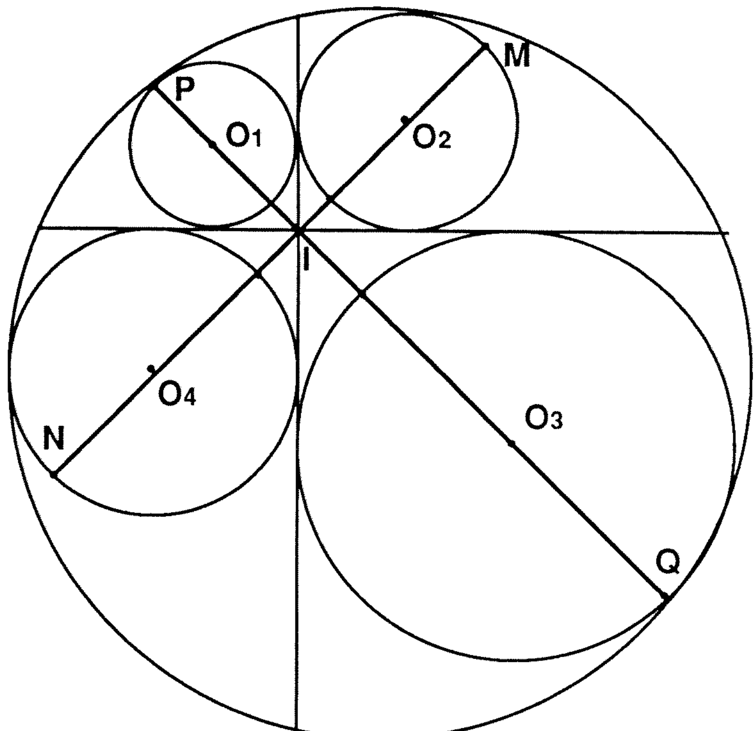
1e exercice



La construction du Tramway de Strasbourg a nécessité d'enterrer 4 câbles. Une des solutions techniques envisagées a été de choisir une gaine de diamètre intérieur D compartimentée par deux parois perpendiculaires, les câbles étant collés aux deux parois. Montrer que la somme des diamètres des 4 câbles est inférieure à $4(\sqrt{2}-1)D$.

SOLUTION :

Si on appelle I le point d'intersection des parois et O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des cercles représentant les 4 câbles, on a la figure ci-contre :



Les petits cercles étant tangents aux parois, les droites (I O_1), (I O_2), (I O_3) et (I O_4) sont les bissectrices des angles droits et on a à chaque fois des angles de 45°. On en déduit ainsi que I, O_1, O_3 sont alignés et I, O_2, O_4 sont alignés.

. La droite ($O_2 O_4$) recoupe les 2 petits cercles en M et N et on a

$$MN = M O_2 + O_2 I + I O_4 + O_4 N$$

on a $O_2I = \dfrac{R_2}{\cos 45°} = \sqrt{2}\, R_2$ et $O_4I = \dfrac{R_4}{\cos 45°} = \sqrt{2}\, R_4$

donc $MN = R_2 + \sqrt{2}\, R_2 + \sqrt{2}\, R_4 + R_4 = (1+\sqrt{2})(R_2 + R_4)$

D'autre part $MN \leq d$ car c'est un segment qui est à l'intérieur du cercle, on a donc

$$(1+\sqrt{2})(R_2 + R_4) \leq d$$

. On aura de même la droite ($O_1\, O_3$) qui recoupera les petits cercles en P et Q et

$$PQ = (1+\sqrt{2})(R_1 + R_3) \leq d$$

.En additionnant les deux inégalités on aura :

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \leq d \\
\Leftrightarrow\ & (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \leq \frac{2d}{1+\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq \frac{4d}{1+\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 4(\sqrt{2}-1)d
\end{aligned}$$

2e exercice

Déterminez les entiers naturels x, y, z tels que :

$$x^{(y^z)} y^{(z^x)} z^{(x^y)} = 1994^{1994} xyz$$

SOLUTION :

* Si l'un des nombres x, y ou z est nul l'égalité sera vérifiée (0 = 0), mais il ne doit pas y avoir 2 nombres nuls sinon l'équation n'est pas définie (0^0).

* Si x = 1, on obtient $y^z\ z = 1994^{1994}\, y\, z$

$$\Leftrightarrow y^{z-1} = 1994^{1994} \qquad (\text{si } z \neq 0)$$

Or 1994 = 2 x 997

On peut dont avoir $z - 1 = 1$ ou 2 ou 997 ou 1994

$z = 2$ ou 3 ou 998 ou 1995

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} z &= 2 \Rightarrow y = 1994^{1994} \\ z &= 3 \Rightarrow y = 1994^{997} \\ z &= 998 \Rightarrow y = 1994^{2} \\ z &= 1995 \Rightarrow y = 1994 \end{aligned}$$

On obtient donc 4 solutions et on refait de même lorsque
$y = 1$ ou $z = 1$(permutation circulaire)

* Si $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$ alors $x^{(y^z - 1)}\, y^{(z^x - 1)}\, z^{(x^y - 1)} = 1994^{1994}$

$$\Leftrightarrow x^{(y^z - 1)}\, y^{(z^x - 1)}\, z^{(x^y - 1)} = 2^{1994} \times 997^{1994}$$

Donc l'un des 3 nombres x, y ou z est forcément divisible par 997. Si c'est y, alors
$x^y - 1 \geq 2^{997} - 1$ (car $x \geq 2$) et $z^{(x^y - 1)} \geq 2^{(2^{997} - 1)}$

or $\ln (1994^{1994}) = 1994 \ln 1994 \approx 15150$

et on aura :

$\ln [x^{(y^z - 1)}\, y^{(z^x - 1)}\, z^{(x^y - 1)}] \geq \ln 2^{(2^{997} - 1)}$
qui est très nettement supérieur à 15 150

On en déduit que les 3 nombres ne peuvent pas tous être supérieurs ou égaux à 2 et que l'un vaut forcément 0 ou 1 (cas que l'on a déjà traité).

Conclusion :

$S = \{ (1; 1994^{1994}; 2) ; (1; 1994^{997}; 3) ; (1; 1994^{2}; 998) ; (1 ; 1994; 1995) ;$

$(2; 1 ; 1994^{1994}) ; (3 ; 1 ; 1994^{997}) ; (998 ; 1 , 1994^{2}) ; (1995 ; 1 ; 1994) ;$

$(1994^{1994} ; 2; 1) ; (1994^{997} ; 3 ; 1) ; (1994^{2} ; 998 ; 1) ; (1994 ; 1995 ; 1) \}$

$\cup \{0\} \times \mathbb{N}^{*2} \cup \mathbb{N}^* \times \{0\} \times \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}^{*2} \times \{0\}$

3e exercice

Madame Lacraie, professeur de Mathématiques, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de Mathématiques par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi. Normalement Madame Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait un cours pour la deuxième fois, elle va deux fois plus vite. Au bout de dix semaines de classe combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ?

SOLUTION :

. Dans chaque classe Madame Lacraie traite d'abord à vitesse double la partie de cours qu'elle a faite une première fois dans l'autre classe, puis elle traite à vitesse normale une nouvelle partie de cours pendant le temps qu'il lui reste. La quantité de cours faite à vitesse double correspond à la quantité faite à vitesse normale pendant l'heure précédente dans l'autre classe.

. Si on appelle u_n la quantité de nouveau cours traitée par Mme Lacraie à la $n^{ième}$ heure on a :

$$u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2}$$

(la quantité u_{n-1} est traitée à vitesse double, donc le temps restant est $1 - \frac{u_{n-1}}{2}$)

Et on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

. On peut programmer la calculatrice pour calculer les premiers termes :

$u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{5}{8}$; etc...

On constate en continuant les calculs que u_n s'approche de 0,666 ... c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

. Considérons alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ on aura

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = (1 - \frac{u_n}{2} - \frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{2}{3} - u_n) = - \frac{1}{2} (u_n - \frac{2}{3}) = - \frac{1}{2} v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $(- \frac{1}{2})$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = - \frac{2}{3}$ et par conséquent $v_n = - \frac{2}{3} \times (- \frac{1}{2})^n$ et $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (1 - (- \frac{1}{2})^n)$

. Cherchons maintenant la quantité totale de cours traité par Mme Lacraie ;
dans la classe A : à sa 1ère heure, elle traite u_1

à sa 3ème heure, elle traite $u_2 + u_3$

à sa 5ème heure, elle traite $u_4 + u_5$

à sa (2n + 1) ème heure, elle traite $u_{2n} + u_{2n+1}$

Au bout de 10 semaines, sa dernière heure dans la classe A sera sa 39ème heure, elle aura donc traité :
$(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{38} + u_{39})$ paragraphes dans la classe A

Dans la classe B : à sa 2ème heure, elle traite $u_1 + u_2$

à sa 4ème heure, elle traite $u_3 + u_4$

à sa 40ème heure, elle traite $u_{39} + u_{40}$

Au bout de 10 semaines, elle aura donc traité :

$(u_1 + u_2 + ... + u_{39} + u_{40})$ paragraphes.

$$\sum_{k=1}^{39} u_k = \sum_{k=1}^{39}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 39 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{39} v_k = 26 + v_1 \sum_{k=1}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{39}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{39}}{\frac{3}{2}} = 26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}}$$

$$\approx 26{,}222$$

$$\sum_{k=1}^{40} u_k = \sum_{k=1}^{40}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 40 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{40} v_k = 26 + \frac{2}{3} + v_1 \sum_{k=0}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{40}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{40}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}888$$

Conclusion : Dans la classe A : $26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}} \approx 26{,}222$

Dans la classe B : $26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}889$