PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donnés un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x,y\} \in G \text{ et } \{y,z\} \in G \Longrightarrow \{x,z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.

Solution (proposée par E. Kern)

Soit G un graphe sans triangle maximal. Si $s \in S$ soit $G(s) = \{y \in S | \{s,y\} \in G\}$. Choisissons $s_0 \in S$ tel que $|G(s_0)|$ soit maximum et posons $T = G(s_0)$ et $S_1 = S - (G(s_0) \cup \{s_0\})$. Si $x \in S_1$, on a $|G(x)| \leq |T|$. Considérons alors le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant d'abord les arêtes issues de x puis en y ajoutant les arêtes de la forme $\{x,y\}$ où $y \in T$. Il est clair que G' est un graphe sans triangles et que $|G'| = |G| - |G(x)| + |T|$ et par suite $|T| \leq |G(x)|$ en raison du caractère maximal de G. On a donc $|G(x)| = |T|$ pour tout $x \in S_1$.

Montrons maintenant que si x_1, x_2 sont deux points distincts de S_1 alors $\{x_1, x_2\} \notin G$. Si non, en construisant à partir de x_1 le graphe G' comme ci-dessus on obtient un graphe vérifiant $|G'| = |G|$, $T = G(s_0)$ et $|G(s_0)| = \sup_s |G'(s)|$. On a donc $|G(x_2)| = |G'(x_2)| = |T|$, ce qui est contradictoire car $G(x_2) = G'(x_2) \cup \{x_1\}$ et $x_1 \notin G'(x_2)$.

Pour tout $x \in S_1$ on a donc $G(x) = T$ de sorte que

$$G = \{\{x,y\} | x \in T, y \in S - T\}.$$

Si on pose $n = |S|, r = |T|$ on a donc $|G| = r(n-r)$. Or ceci est maximal pour $r = E(\frac{n}{2})$ et par suite on a

$$|G| = E(\frac{n}{2})(n - E(\frac{n}{2})),$$

c'est-à-dire

$$|G| = p^2 \text{ si } n = 2p,$$
$$|G| = p(p+1) \text{ si } n = 2p+1.$$

(On a montré en outre que les graphes maximaux sont ceux de la forme $G = \{(x,y) | x \in A \text{ et } y \in S - A\}$ où A est une partie à $p = E(\frac{n}{2})$ éléments de S.)

PROBLÈME 29

Énoncé

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.

Indication

Oui : toute suite de $mn+1$ nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $m+1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n+1$ (théorème de Erdős-Szekeres).

PROBLÈME 30

Énoncé

Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

Nous avons reçu de M.-C. Arnaud une solution au problème 27, malheureusement trop tard pour être mentionnée dans '*L'Ouvert*' n° 75.