PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

Nous n'avons pas encore reçu de solution d'élève pour le problème n° 2; nous publions donc ici la solution de Monsieur Renfer, professeur au Lycée Fustel de Coulanges.

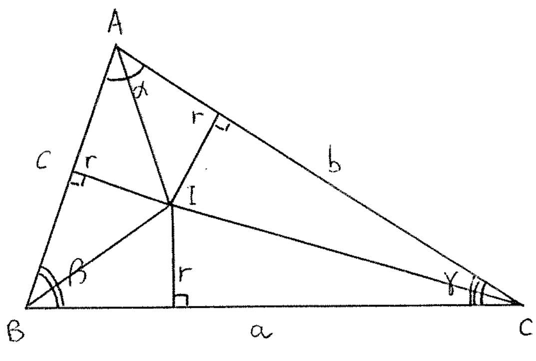
RAPPEL DE L'ÉNONCÉ DU PROBLÈME 2 :

Cet énoncé est extrait du "Shimpeki-Sampō" (1789). Ce titre signifie "mathématiques suspendues aux temples de Shintō" et correspondait à une coutume de cette époque au Japon, de suspendre aux murs des temples, des tablettes sur lesquelles se trouvait un problème de mathématiques et sa solution.

Etant donné un quadrilatère inscrit dans un cercle, démontrer que la somme des rayons des cercles inscrits dans les différents triangles qu'on obtient en menant les diagonales partant d'un même sommet, est la même quel que soit ce sommet. Généraliser à un polygone convexe quelconque inscrit dans un cercle.

Solution :

1) Calcul du rayon du cercle inscrit dans un triangle en fonction des angles du triangle.



Soit I le centre du cercle inscrit.
Soit r le rayon du cercle inscrit.
Soit R le rayon du cercle circonscrit.
Soit S l'aire du triangle.

• $2S = bc\sin\alpha = 2$ aire $(IBC) + 2$ aire $(IAC) + 2$ aire $(IAB) = r(a+b+c)$
Donc : $r = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c}$

• En utilisant : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, on obtient :

$r = 2R\frac{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$

• Un peu de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma =&2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ =&2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ &(\text{car } \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2})\\ =&2\cos\frac{\gamma}{2}[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}]\\ =&4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

• Donc :

$$r=2R\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2) Problème du quadrilatère inscriptible

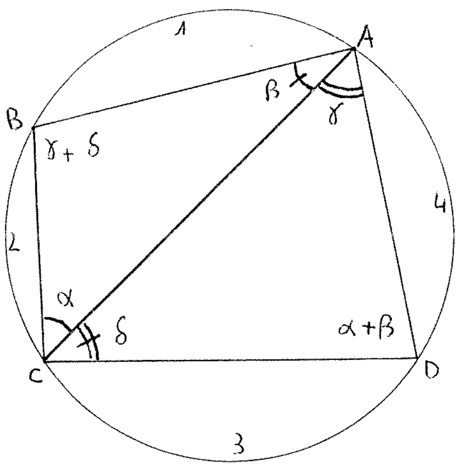


Figure 1

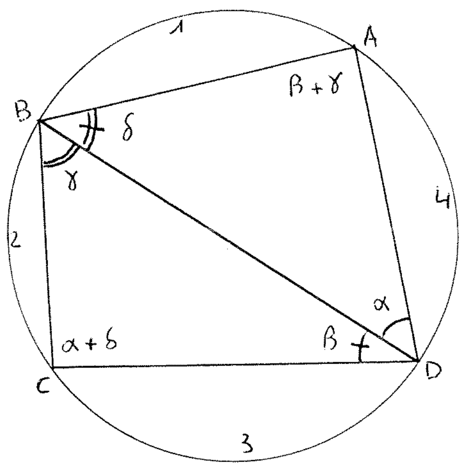


Figure 2

(L'ordre alphabétique des angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ correspond à l'ordre des arcs interceptés, à partir de A, dans le sens trigonométrique.)

Calculons la somme des rayons des cercles inscrits des deux triangles ABC et ACD (fig. 1). On trouve :

$$\begin{gathered}4R(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2})\\ =4R(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\ +\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2})\end{gathered}$$

On obtient une expression symétrique par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. La somme des rayons des cercles inscrits des triangles ABD et BCD (fig. 2) coïncidera donc avec l'expression précédente.

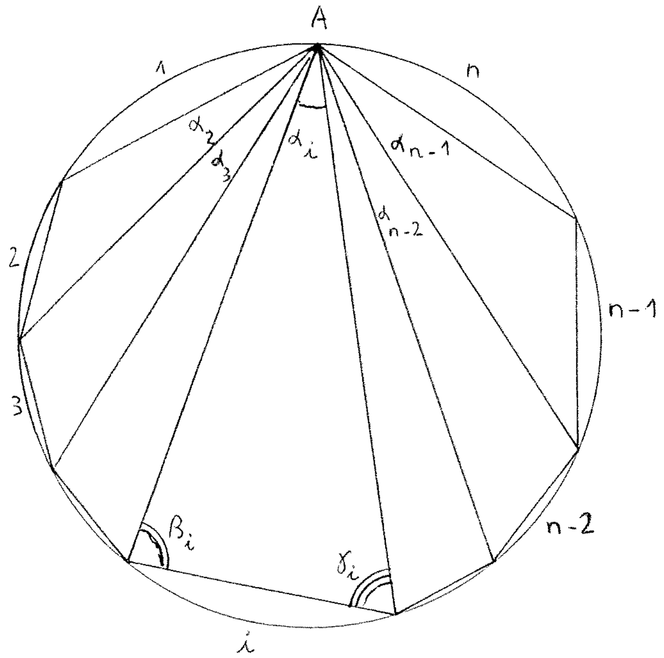
3) Intermède trigonométrique : généralisation de la formule d'addition du sinus

$$\sin(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j) = I_m \; e^{(i\sum_{j=1}^{n} \alpha_j)} = Im(\Pi_{j=1}^{n}(\cos\alpha_j + i\sin\alpha_j))$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \left[(-1)^k \sum_{I\in\mathcal{P}_{2k+1}} (\Pi_{j\in I}\sin\alpha_j)(\Pi_{j\in\bar{I}}\cos\alpha_j)\right]$$

où $\mathcal{P}_{2k+1}$ désigne l'ensemble des parties à $(2k+1)$ éléments de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

4) Problème du polygone inscriptible à n sommets



• On choisit un sommet A. Les angles sont numérotés dans l'ordre des arcs interceptés, à partir de A, dans le sens trigonométrique.

• Soit r_i le rayon du cercle inscrit du triangle dont l'angle en A est α_i.

$$\beta_i = \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k$$

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k$$

• $r_i = 4R\sin\frac{\alpha_i}{2}.\sin\frac{\beta_i}{2}.\sin\frac{\gamma_i}{2} = 4R\sin\frac{\alpha_i}{2}.\sin(\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha_k}{2}).\sin(\sum_{k=i+1}^{n}\frac{\alpha_k}{2})$

• On calcule $\sum_{i=2}^{n-1} r_i$, en utilisant la formule d'addition du sinus et en remarquant qu'une partie I à $(2k+1)$ éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ peut s'écrire de k manières comme réunion $I = J \cup \{i\} \cup K$, où J et K sont des parties de cardinal impair de $\{1, 2, \dots, i-1\}$ et $\{i+1, i+2, \dots, n\}$ respectivement.

$$\sum_{i=2}^{n-1} r_i = 4R \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \left[(-1)^{k+1} k \sum_{I \in \mathcal{P}_{2k+1}} \left(\Pi_{j \in I} \sin \frac{\alpha_j}{2} \right) \left(\Pi_{j \in \bar{I}} \cos \frac{\alpha_j}{2} \right) \right]$$

où $\mathcal{P}_{2k+1}$ désigne l'ensemble des parties à $(2k+1)$ éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et où $\bar{I}$ désigne la partie complémentaire de I dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• On obtient une expression symétrique par rapport aux angles α_i : elle est donc indépendante du sommet A choisi!

ÉNONCÉ DU PROBLÈME 7

Le problème 2 résolu ci-dessus amène à en formuler un autre, dont la solution peut d'ailleurs servir à celle de ce problème 2. En voici l'énoncé : $ABCD$ étant un quadrilatère quelconque inscrit dans un cercle, démontrer que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, ABD, forment un rectangle.

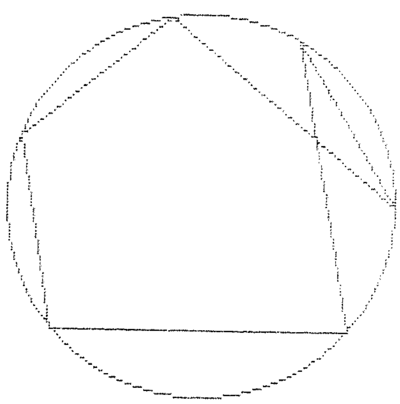
ÉNONCÉ DU PROBLÈME 8 (proposé par Marcel Krier)

Disposer six allumettes identiques de sorte que chacune touche les cinq autres (une allumette est un parallélépipède rectangle à base carrée).

Examiner le cas où la section est "petite" par rapport à la longueur et le cas où elle est "grande".

Etudier ensuite le cas de sept allumettes.

E_4



F_4