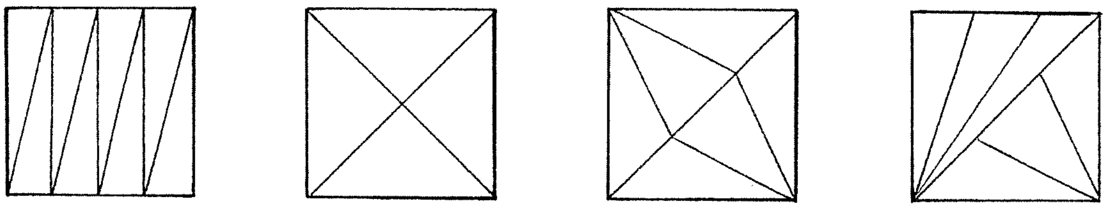
# PARTAGE D'UN CARRÉ EN TRIANGLES D'AIRES ÉGALES (*)

Boris BEKKER

Professeur à l'Ecole de Physique et Mathématique de Saint Pétersbourg

Il est facile de diviser un carré donné en un nombre pair arbitraire de triangles de même aire. On peut voir quelques exemples de subdivisions de cette sorte en figure 1.



Mais un carré peut-il être partagé en un nombre impair de triangles de même aire? Choisissons un système de coordonnées dans le plan, de telle sorte que les sommets du carré soient $O(0;0), K(1;0), L(1;1)$ et $M(0;1)$.

Dans [1], J. Thomas a démontré que le carré $OKLM$ ne peut pas être divisé en un nombre impair de triangles de même aire, avec la condition que les sommets aient des coordonnées rationnelles de dénominateurs impairs.

Dans [2], P. Monsky a amélioré considérablement le raisonnement de [1] et montré que la réponse à la question est toujours négative.

Récemment l'auteur de ce présent article a résolu un problème semblable dans le cas d'une dimension supérieure. Ici, cependant, nous nous limiterons au cas de la dimension 2.

Notons $S(P)$ l'aire d'un polygone $P$. Et rappelons que si $P$ est un triangle de sommets $(x_A;y_A), (x_B;y_B)$ et $(x_C;y_C)$ alors :

$$(*) \qquad S(P) = \frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

Soit $OKLM$ le carré que nous devons diviser en triangles $T_1, \ldots, T_n$ avec $S(T_1) = \ldots = S(T_n) = \frac{1}{n}$. Notre but est de prouver que $n$ est pair. A cette fin considérons d'abord certaines fonctions "inhabituelles" d'une variable réelle. Soit $f$ une fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait aux conditions suivantes :

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace donnée le 24 novembre 1993.

1) $f(x) \geq 0$ pour tout $x$,
2) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
3) $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout $x$ et tout $y$,
4) $f(x - y) \leq f(y)$ si $f(x) \leq f(y)$,
5) $f(x - y) = f(y)$ si $f(x) < f(y)$,
6) $f(\frac{1}{n}) > 1$ pour tout $n$ pair, et $f(\frac{1}{n}) \leq 1$ pour tout $n$ impair.

Ces conditions sont choisies de telle sorte que nous puissions calculer la valeur de $f(S(T_i))$ par la formule (*) et la comparer à $f(\frac{1}{n})$.

Remarquons que 3) implique que $f(1) = f(1.1) = [f(1)]^2$ et puisque $f(1) \neq 0$ nous avons $f(1) = 1$. Ensuite $1 = f(1) = f[(-1)^2] = [f(-1)]^2$ et, comme $f(-1) \geq 0$ d'après 1), nous avons $f(-1) = 1$. En outre, $f(-x) = f(-1.x) = f(-1)f(x) = f(x)$ pour tout $x$.

Maintenant choisissons une fonction $f$ satisfaisant 1) à 6). A l'aide de cette fonction réalisons une partition de $\mathbb{R}^2$ en trois sous-ensembles de points de types respectifs $A, B$ et $C$. Nous dirons que $(x; y)$ est du type $A$ si $f(x) < 1$ et $f(y) < 1$; nous dirons que $(x; y)$ est du type $B$ si $f(x) \geq 1$ et $f(x) \geq f(y)$; et enfin nous dirons que $(x; y)$ est du type $C$ si $f(y) \geq 1$ et $f(x) < f(y)$.

Soient $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ et $(x_C; y_C)$ trois points de types $A, B$ et $C$ respectivement. Alors $f(x_B - x_A) = f(x_B), f(y_C - y_A) = f(y_C), f(x_C - x_A) < f(y_C)$ et $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$ (1).
Ainsi

$$f((x_B - x_A)(y_C - y_A)) = f(x_B - x_A)f(y_C - y_A) = f(x_B)f(y_C)$$

et

$$f((x_C - x_A)(y_B - y_A)) = f(x_C - x_A)f(y_B - y_A) < f(y_C)f(x_B)$$

en remarquant que $f(x_B) \neq 0$ et $f(y_C) \neq O$ car $f(x_B) \geq 1$ et $f(y_C) \geq 1$.
C'est pourquoi, si $P$ est un triangle de sommets $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ et $(x_C); y_C)$ alors

$$(**) \qquad f(S(P)) = f(1/2)f(x_B)f(y_C) > 1.$$

(1) N.D.L.R. :
Un point $A$ est tel que : $f(x_A) < 1$ et $f(y_A) < 1$.
Un point $B$ est tel que : $f(x_B) \geq 1$ et $f(x_B) \geq f(y_B)$.
Un point $C$ est tel que : $f(y_C) \geq$ et $f(x_C) < f(y_C)$.
Montrons qu'on a : $f(x_B - x_A) = f(x_B), f(y_C - y_A) = f(y_C), f(x_C - x_A) < f(y_C)$ et $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$.
a. $f(x_B - x_A) = f(x_A - x_B) = f(x_B)$ car $f(x_A) < f(x_B)$ et d'après 5)
b. $f(y_C - y_A) = f(y_A - y_C) = f(y_C)$ car $f(y_A) < f(y_C)$ et d'après 5)
c. si $f(x_C) \geq f(x_A)$ alors $f(x_C - x_A) = f(x_A - x_C) \leq f(x_C) < f(y_C)$ d'après 4) et d'après la définition des points $C$;
si $f(x_C) < f(x_A)$ alors $f(x_C - x_A) = f(x_A) < 1 \leq f(y_C)$ d'après 5) et d'après les définitions des points $A$ et $C$. Donc $f(x_C - x_A) < f(y_C)$.
d. si $f(y_A) < f(y_B)$ alors $f(y_B - y_A) = f(y_A - y_B) = f(y_B) \leq f(x_B)$ d'après 5) et d'après la définition des points $B$.
si $f(y_A) \geq f(y_B)$ alors $f(y_B - y_A) \leq f(y_A) < 1 \leq f(x_B)$ d'après 4) et d'après les définitions des points $A$ et $B$.
Donc $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$.

En particulier $f(S(P)) \neq 0$, c'est-à-dire que $S(P) \neq 0$. Ceci signifie qu'aucune droite du plan ne contient simultanément des points des trois types.

Maintenant supposons qu'un certain triangle $T_i$ ait un sommet de chaque type. Alors (**) implique que $f(S(T_i)) > 1$. Puisque $S(T_i) = \frac{1}{n}$, nous avons $f(1/n) > 1$ donc $n$ est pair d'après 6).

Nous devons prouver qu'un tel triangle (ayant un sommet de chaque type) existe.

Nous dirons qu'un segment du plan est de type $AB$ si l'une de ses extrémités est de type $A$ et l'autre de type $B$. De même nous définissons des segments de type $AC, AA, BC$ etc. La frontière de chaque $T_i$ est l'union de "segments élémentaires" sans chevauchement : chacun de ces "segments élémentaires" joint deux sommets et ne contient pas d'autre sommet. Puisqu'aucune droite du plan ne contient des points de chacun des trois types, des segments élémentaires de type $AB$ se trouvent seulement sur des segments de types $AA, AB$ et $BB$. De plus un segment de type $AA$ ou $BB$ contient un nombre pair de segments élémentaires de type $AB$, et un segment de type $AB$ contient un nombre impair de segments élémentaires de type $AB$. Maintenant il n'est pas difficile de voir que la frontière du carré $OKLM$ contient un nombre impair de segments élémentaires de type $AB$.

Supposons qu'il n'y ait pas de $T_i$ ayant des sommets de chacun des trois types. Alors le nombre $t_i$ de segments élémentaires de type $AB$ sur la frontière de $T_i$ est pair pour chaque $i$, et la somme $t_1 + \ldots + t_n$ est paire. D'autre part, un segment élémentaire de type $AB$ est compté dans cette somme une fois s'il se trouve sur la frontière du carré $OKLM$, et deux fois s'il se trouve dans le carré. Ceci contredit le fait que la frontière du carré contienne un nombre impair de segments élémentaires de type $AB$.

Il reste à prouver qu'il existe une fonction satisfaisant 1) à 6). Nous devons définir $f(x)$ pour tout réel $x$. Tout d'abord, soit $x$ un nombre rationnel. Si $x \neq 0$ nous pouvons écrire $x$ sous la forme $x = 2^S \frac{m}{n}$, où $m$ et $n$ sont impairs. Et nous posons $f(x) = 1/2^S$ et $f(0) = 0$. Par exemple, $f(2) = 1/2, f(3) = 1, f(12) = 1/4, f(1/2) = 2$ et $f(1/5) = 1$.

Les conditions 1), 2) et 6) sont évidemment réalisées. Vérifions 3), 4) et 5). Soit $x \neq 0, y \neq 0$ et écrivons $= x = 2^{S_1}(m_1/n_1), y = 2^{S_2}(m_2/n_2)$ avec $m_1, m_2, n_1$ et $n_2$ impairs. Alors $xy = 2^{S_1+S_2}(m_1m_2/n_1n_2)$, d'où $f(xy) = (1/2^{S_1+S_2}) = f(x)f(y)$. Ainsi nous avons 3). Pour prouver 4) observons que, si $s_2 \leq s_1$, c'est-à-dire $f(x) = (1/2^{S_1}) \leq (1/2^{S_2}) = f(y)$, alors $f(x-y) \leq f(y)$. Et enfin, si $s_2 < s_1$ alors $f(x-y) = f(y)$, et nous avons 5). Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors les conditions 3) à 5) tombent de façon évidente.

Les fonctions définies dans l'ensemble des nombres rationnels et satisfaisant 1) à 6) jouent un rôle important dans la Théorie des nombres. Elles sont appelées "valeurs-absolues 2-adiques". Pour les détails voir [4]. Il est bien plus difficile de définir $f(x)$ pour un nombre irrationnel $x$; pour cette définition nous nous référons à [3].

## Références


[1] J. Thomas. A dissection problem Math. Mag., 41 (1968), pp. 187-190.

[2] P. Monsky. On dividing a square into triangles. Amer. Math. Monthly, v. 77, n° 2, pp. 161-164.

[3] S. Lang. Algebra. Addison-Wesley, Reading, Mass., (1965), p. 299.

[4] B. Bekker - S. Vostokov - Yu-Ionin, 2-adic numbers, Kvant, n° 2, (1979), pp. 26-31.


---

Et pour complément à cet article voici l'un des exercices donné à l'épreuve du 17 mars 1994 de "Mathématiques sans Frontières" (compétition interclasses de 3ème et 2nde organisée en Alsace et à laquelle participent plusieurs pays).

**Exercice 8**  **5 Points**

### Tarte flambée

Après une longue séance de travail, sept professeurs de mathématiques ont décidé d'aller manger une tarte flambée.

Lorsque la tarte rectangulaire de 42 cm x 35 cm fut servie, on chargea l'un des convives de la couper équitablement en sept portions. Il s'en tira facilement par six coups de couteau rectilignes tous issus du même coin de la tarte.

Représenter cette solution sur la feuille-réponse: pour ce faire, tracer un rectangle ABCD de 8,4 cm x 7 cm que l'on partagera en sept morceaux d'aires égales par six segments de droites joignant le sommet A à des points de [BC] ou de [CD]. Donner une justification de la solution.