A VOS STYLOS

PROBLÈME 29

Énoncé

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.

Solution

Toute suite de $mn + 1$ nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $m + 1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$ (théorème de Erdős-Szekeres). Soit en effet $(x_1, \dots, x_{mn+1})$ une telle suite. Notons $C_i \in \mathbb{N}^*$ et $D_i \in \mathbb{N}^*$ les longueurs des plus longues sous-suites croissante et décroissante commençant par x_i. Pour $1 \leq i < j \leq mn + 1$, il est clair que $C_i > C_j$ si $x_i < x_j$ et que $D_i > D_j$ si $x_i > x_j$; en conséquence, l'application $i \longmapsto (C_i, D_i)$ est injective et prend donc exactement $mn + 1$ valeurs distinctes. Comme l'ensemble produit $P = [1, m] \times [1, n]$ a mn éléments, il existe un i tel que $(C_i, D_i) \notin P$, donc tel que $C_i > m$ ou $D_i > n$.

PROBLÈME 30

Énoncé

Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?

Indication

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ les rectangles $(5+2a) \times (6+2b)$ et $(6+2a) \times (8+2b)$ admettent un tel pavage.

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

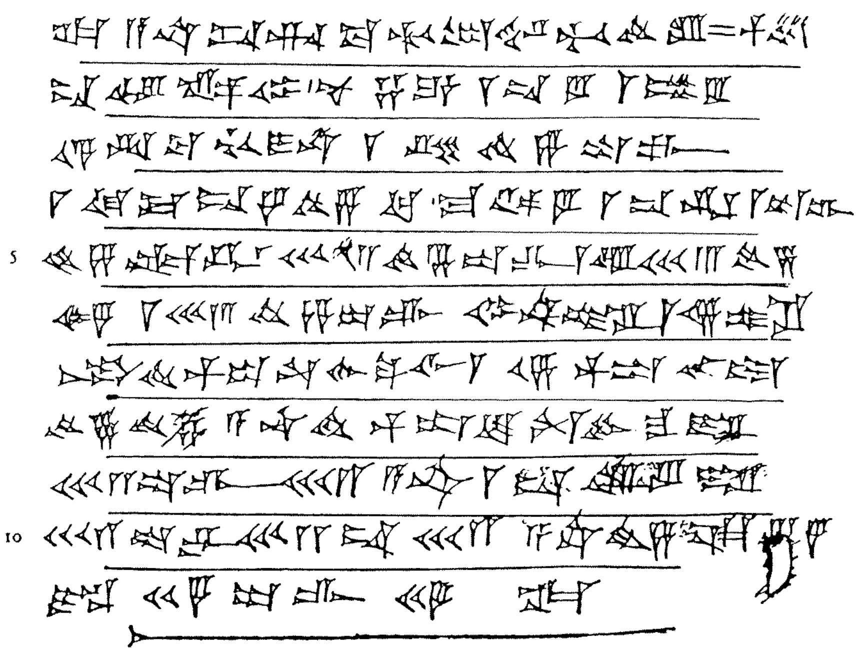
On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x,y)=1$, on a aussi $d(f(x),f(y))=1$.

Voici un extrait de l'ouvrage "*Histoire d'algorithmes*" dont vous trouverez une publicité à la page 32.

HISTOIRE D'ALGORITHMES

La tablette de Suse

Extrait des *Textes mathématiques de Suse*, édités et traduits par E.M. Bruins & M. Rutten, Geuthner, Paris, 1961 (p. 102). Problème XIX, C.



Posons que la largeur (du rectangle) mesure un quart de moins par rapport à la longueur. 40 (est la dimension de la diagonale). Quelles sont la longueur et la largeur ?

Toi, pose 1, la longueur, pose 1 le prolongement. 15 le quart, soustrais de 1, tu trouveras 45.

Pose 1 comme longueur, pose 45 comme largeur, carre 1 la longueur, 1 tu trouves. Carre 45, la largeur : 33;45 tu trouves. Du 1 et 33;45 (fais) la somme : 1;33;45 tu trouves. Quelle est la racine carrée ? 1;15 tu trouves.

Attendu que 40, la diagonale t'a été indiquée, cherche l'inverse de 1;15 la diagonale. 48 (tu trouves). Porte 48 à 40 la diagonale qui t'a été dit, 32 tu trouves.

Porte 32 à 1 la longueur que tu as posée : 32 tu trouves, 32 (c'est) la longueur. Porte 32 à 45 la largeur que tu as posée : 24 tu trouves. 24 (c'est) la largeur.