UN THÉORÈME ARITHMO-GÉOMÉTRIQUE ET SES GÉNÉRALISATIONS

Eugène EHRHART

Monsieur E. Ehrhart nous propose des informations complémentaires à ses articles parus dans le n° 72 de 'L'Ouvert' et dans le n° 394 du 'Bulletin vert APMEP'.

L'arithmo-géométrie est actuellement l'objet de bien des recherches. J'expose ici l'essentiel de ma contribution de valeur reconnue par des appréciations autorisées récentes : "*Les travaux de E. Ehrhart ont été de pionnier et maintenant donnent naissance à de nombreux travaux*" (1993); Marcel Berger, Directeur de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. "*J'ai rendu hommage à vos travaux comme ils le méritent*", au séminaire Bourbaki du 5 mars 1994 sur les "points entiers dans les polytopes convexes" (Michel Brion, Université de Grenoble).

Définitions.– Un point est "*entier*" si ses coordonnées le sont. Un polytope est "entier" si ses sommets le sont. Le nombre de points entiers d'un polytope est son "*dénombrant*". On désigne par n *un entier* ≥ 1.

Théorème fondamental.– Le dénombrant j_n du polytope nP est **un polynôme** $j(n)$ de degré d, dimension du polytope P fermé convexe entier. Pour P ouvert le dénombrant i_n de nP est lié à j_n par la **loi de réciprocité**

$$i_n = (-1)^d j(-n) \qquad j_n = (-1)^d i(-n).$$

La seconde formule de cette élégante loi résulte immédiatement de la première et réciproquement.

Pour les polytopes à 2, 3 ou 4 dimensions on a respectivement

$$\begin{aligned}
j_n &= Sn^2 + \frac{p}{2}n + 1 \\
j_n &= Vn^3 + \frac{p-2}{2}n^2 + (i + \frac{p}{2} - V)n + 1 \\
j_n &= Vn^4 + \frac{S}{2}n^3 + (i + \frac{p}{2} - V - 1)n^2 + \frac{p-S}{2}n + 1.
\end{aligned}$$

On désigne par i et p les dénombrants de P ouvert et de son bord. Pour le polygone, S est la surface de P, pour le polyèdre, V est son volume. Pour le polytope à 4 dimensions V est le volume 4-dimensionnel de P et S la "mesure réticulaire" de son bord. On obtient S en prenant pour unité dans chaque face la base du réseau de points entiers de l'hyperplan à trois dimensions qui la porte.

"*Votre théorème fondamental est maintenant connu partout*" (J. Wills, Université de Siegen, 1993). Moins connues sont ses généralisations. En voici d'abord la copieuse terminologie.

Définitions.– Un polytope est dit *normal* s'il est homéomorphe à une boule. Un point est *rationnel* si ses coordonnées le sont. Un polytope est rationnel si ses sommets le sont (dont un au moins non entier). Le *dénominateur* d'un point rationnel M est le plus petit entier k tel que le point kM soit entier; le dénominateur d'un polytope rationnel P est le plus petit entier k tel que le polytope kP soit entier. Un polytope à d dimensions est *semi-ouvert* si on supprime de son bord quelques faces $(d-1)$-dimensionnelles. On obtient le **polytope associé** en supprimant au contraire de son bord les faces $(d-1)$-dimensionnelles précédemment conservées. Un *nombre périodique* $u_n = [u_1, u_2, \ldots u_p]$ est égal au terme du crochet dont le rang est égal à n modulo p, sa *période*. Ainsi

$$[5, 0, -2] = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 1 \bmod 3 \\ 0 \text{ si } n = 2 \bmod 3 \\ -2 \text{ si } n = 3 \bmod 3. \end{cases}$$

Un polynôme $f(n)$ est dit **pseudo-polynôme**, si certains de ses coefficients sont des nombres périodiques, au lieu d'être constants. Le p.p.c.m. des périodes de ces coefficients périodiques est la *pseudo-période* de $f(n)$. Un pseudo-polynôme a donc deux caractéristiques, son degré et sa pseudo-période.

Passons maintenant aux généralisations.

1) *P entier normal* (donc convexe ou non) : le théorème fondamental subsiste.

2) *P rationnel normal* : le théorème subsiste, en y remplaçant le mot "polynôme" par "pseudo-polynôme". Les pseudo-polynômes j_n et i_n ont le degré d, dimension de P, et la pseudo-période k, dénominateur de P.

3) *P semi-ouvert normal, entier ou rationnel* : le théorème subsiste en désignant alors par j_n et i_n les dénombrants de deux polytopes nP associés.

Théorème général.– Dans les trois cas, selon que P est entier ou rationnel, les dénombrants j_n et i_n du polytope nP sont **des polynômes ou des pseudo-polynômes** en n, de degré d, dimension de P, qui vérifient la **loi de réciprocité**.

Méthode des polytopes en combinatoire.– Avec les démonstrations et de nombreuses *applications numériques aux systèmes diophantiens linéaires*, les résultats précédants figurent dans mon livre "Polynômes arithmétiques et méthode de polyèdres en combinatoire", vol. 35 de la collection "International series of numerical mathematics", Birkhäuser Verlag, Bâle-Stuttgart, 1977 (j'appelais alors polynômes arithmétiques mes pseudo-polynômes). J'ai traité de tels systèmes (à domaines polygonaux) dans '*L'Ouvert*' en septembre 1993 et (à domaines polyédriques) dans le '*Bulletin*' A.P.M.E.P. en juin 1994. J'ai aussi résolu par la méthode des polyèdres un problème combinatoire difficile à deux paramètres : de combien de manières peut-on payer une somme de n francs avec m pièces de 10, 20, 50 ou 100 centimes? ('*Journal de Crelle*', Tome 311/312, 1979).