DES HEXAGONES AUX POLYGONES

Pierre Renfer

Lycée Fustel de Coulanges de Strasbourg

L'article sur les hexagones du "Rallye de Première", publié dans 'L'Ouvert' n° 76, m'a suggéré le problème suivant :

Problème

Soient $P_1, P_2, \ldots P_n$ les sommets consécutifs d'un polygone convexe régulier à n sommets.
Combien existe-t-il de polygones, ayant pour sommets les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, étant entendu qu'on ne distingue pas deux polygones isométriques?

Ce petit problème peut agréablement illustrer la notion d'opération de groupe sur un ensemble.

Rappels sur les résultats généraux

1) Définition

Une opération (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble E est une application

$$\begin{aligned} f : G \times E &\longrightarrow E \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma.x \end{aligned}$$

vérifiant les deux propriétés :
- $\forall x \in E, e.x = x$, e désignant l'élément neutre de G,
- $\forall (\sigma, \tau) \in G^2$, $\sigma.(\tau.x) = (\sigma\tau).x$.

2) Orbites

L'opération définit sur E une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \sigma \in G, y = \sigma.x.$$

Les classes d'équivalence sont appelées les **orbites** (le choix du mot orbite est un clin d'œil à un exemple facile d'opération de groupe, où E est le plan affine euclidien et G est le groupe des rotations autour d'un centre O donné dans E avec :

$$\begin{aligned} f : G \times E &\longrightarrow E \\ (r, M) &\longmapsto r(M). \end{aligned}$$

Les orbites sont alors les cercles concentriques, de centre O).

3) Stabilisateur d'un élément de E

Pour tout x dans E, soit $S(x) = \{\sigma \in G \mid \sigma.x = x\}$, $S(x)$ est un sous-groupe de G, appelé **stabilisateur de** x.

4) Une première formule de dénombrement

On suppose que le groupe G est d'ordre fini. Si $\omega(x)$ désigne l'orbite de l'élément x de E, alors :

$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\omega(x)) \times \mathrm{Card}(S(x)).$$

Démonstration
Pour $y \in \omega(x)$, soit $C_y = \{\sigma \in G \mid \sigma.x = y\}$. Si τ est un élément particulier de C_y, on peut définir la bijection :

$$\begin{aligned} C_y &\longrightarrow S(x) \\ \sigma &\longmapsto \tau^{-1}\sigma. \end{aligned}$$

Donc : Card $(C_y) =$ Card $(S(x))$.
Et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(G) &= \Sigma_{y\in\omega(x)}\mathrm{Card}(C_y) = \Sigma_{y\in\omega(x)}\mathrm{Card}S(x) \\ &= \mathrm{Card}(\omega(x)) \times \mathrm{Card}(S(x)). \end{aligned}$$

5) Théorème de Burnside-Frobenius

Soit $A_\sigma = \{x \in E \mid \sigma.x = x\}$, pour $\sigma \in G$.
Soit Ω l'ensemble des orbites. Alors

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{\sigma\in G} \mathrm{Card}(A_\sigma).$$

Démonstration
Soit $U = \{(\sigma, x) \in G \times E \mid \sigma.x = x\}$. Il suffit de calculer de deux façons Card (U) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(U) &= \sum_{\sigma\in G} \mathrm{Card}(A_\sigma) = \sum_{x\in E} \mathrm{Card}(S(x)) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\in\omega} \mathrm{Card}(S(x)) = \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\in\omega} \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(\omega)} \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\Omega) \times \mathrm{Card}(G) \end{aligned}$$

Solution du problème

• L'ensemble E est ici l'ensemble des polygones, avant l'identification des polygones isométriques. Cet ensemble est facile à dénombrer.
Un polygone s'obtient par un circuit partant de P_1 et revenant sur P_1, en suivant n arêtes et en passant par tous les points de $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots P_n\}$. Cela revient à donner une permutation de $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$. Le nombre de ces permutations est $(n-1)!$.

Alors : Card $(E) = \frac{1}{2}(n-1)!$ car le circuit parcouru en sens inverse définit le même polygone.

• On fait opérer le groupe diédral $\mathcal{D}_n$ des isométries conservant $\mathcal{P}$ (il contient n rotations et n symétries axiales).

Le problème consiste à compter le nombre d'orbites, qui est fourni par la formule de Burnside-Frobenius. Il reste à calculer Card(A_σ), pour tout σ de $G = \mathcal{D}_n$.

1) Cas : n impair $n = 2m + 1$
C'est le cas le plus simple.

a) Si σ est une rotation d'ordre d
Alors d divise n. Soit $k = \frac{d}{n}$.
Si l'on fait opérer le groupe cyclique engendré par σ sur $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, on obtient k orbites. Un polygone de A_σ, c'est-à-dire invariant par σ, est défini par un circuit dont les k premiers sommets appartiennent à des orbites distinctes, sinon on obtiendrait un retour prématuré sur P_1, en faisant agir les puissances de σ sur cette première partie du circuit.

Le $(k+1)^{\text{e}}$ point du circuit est dans l'orbite de P_1 et si l'on identifie cette orbite au groupe des racines $d$ièmes de l'unité, P_1 étant identifié à 1, alors le $(k+1)$ème point doit être générateur du groupe, sinon on aurait encore un retour prématuré sur P_1. Ces générateurs sont au nombre de $\varphi(d)$, où φ est l'indicateur d'Euler.
Finalement :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}(k-1)!d^{k-1}\varphi(d).$$

(Il y a $(k-1)!$ façons de choisir les orbites du 2^{e}, 3^{e}, $\ldots k^{\text{e}}$ point, puis d^{k-1} façons de choisir les $(k-1)$ points dans ces $(k-1)$ orbites, puis $\varphi(d)$ façons de choisir le $(k+1)^{\text{e}}$ point.
On divise par 2, car le circuit en sens inverse définit le même polygone).

b) Si σ est une symétrie axiale
L'axe δ passe par un point de $\mathcal{P}$, par exemple P_1. Parmi les arêtes d'un polygone de A_σ, une et une seule est symétrique par rapport à δ et elle passe par le $(m+1)^{\text{e}}$ et le $(m+2)^{\text{e}}$ point du circuit partant de P_1, sinon on obtiendrait un retour prématuré sur P_1 en faisant agir σ sur la première partie du circuit.
Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur $\mathcal{P}$, on obtient m orbites à deux éléments et l'orbite $\{P_1\}$.
Les 2^{e}, 3^{e},$\ldots$,$(m+1)^{\text{e}}$ points du circuits sont dans les m orbites distinctes à deux éléments.
Finalement :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}m!2^m.$$

(Il y a $m!$ façons de choisir les m orbites, puis 2^m façons de choisir les m points dans ces orbites.)

On peut maintenant appliquer la formule de Burnside-Frobenius, sachant que $G = \mathcal{D}_n$ contient $\varphi(d)$ rotations d'ordre d (si d divise n) et n symétries axiales.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}(\frac{1}{2}m!2^m n + \sum_{d/n} \frac{1}{2}(\frac{n}{d} - 1)!d^{\frac{n}{d}-1}\varphi(d)^2)$$

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{1}{4n}(m!2^m n + \sum_{d/n} (\frac{n}{d} - 1)!d^{\frac{n}{d}-1}\varphi(d)^2)$$

2) Cas n pair $n = 2m$

a) Si σ est une rotation d'ordre $d \neq 2$.

On obtient comme en 1) a) :

$$\mathrm{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}(\frac{n}{d} - 1)!d^{\frac{n}{d}-1}\varphi(d).$$

b) Si σ est une symétrie dont l'axe δ passe par deux points de $\mathcal{P}$.

Soit P_1 l'un des points de l'axe δ.
Aucune arête d'un polygone de A_σ n'est perpendiculaire à δ, car en complétant à l'aide de σ la première partie du circuit de P_1 jusqu'à une telle arête, on obtiendrait un retour prématuré sur P_1.
Le $(m+1)^{\mathrm{e}}$ point du circuit est P_{m+1}, le point diamétralement opposé à P_1, sinon on aurait encore un retour prématuré sur P_1.
Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur $\mathcal{P}$, on obtient $(m-1)$ orbites à deux éléments et les deux orbites $\{P_1\}$ et $\{P_{m+1}\}$. Les 2^{e}, 3^{e}, $\ldots$, m^{e} points sont dans les $(m-1)$ orbites distinctes à deux éléments.
Finalement :

$$\mathrm{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}(m-1)!2^{m-1}.$$

c) Si σ est une symétrie dont l'axe δ ne passe par aucun point de $\mathcal{P}$

Pour un polygone de A_σ, il y a 0 ou 2 arêtes perpendiculaires à δ, sinon on aurait un retour prématuré sur P_1.

• Dans le premier cas, le $(m-1)^{\mathrm{e}}$ point du circuit est le symétrique de P_1 par rapport à δ. On trouve : $\frac{1}{2}(m-1)!2^{m-1}$ polygones de ce type.

• Dans le second cas, il y a C_m^2 façons de choisir les deux arêtes perpendiculaires à δ.

Si l'on note P_1 l'un des sommets de l'une de ces deux arêtes, le m^{e} point du circuit est sur l'autre arête. Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur $\mathcal{P}$, on obtient m orbites à deux éléments. Les 2^{e}, 3^{e} ,$\ldots$, $(m-1)^{\mathrm{e}}$ points sont dans les $(m-2)$ orbites distinctes autres que celles des arêtes perpendiculaires à δ.
On trouve $C_m^2 \times 2(m-2)!2^{m-2}$ polygones de ce type (il y a $(m-2)!$ façons de choisir les orbites des 2^{e}, 3^{e}, $\ldots$,$(m-1)^{\mathrm{e}}$ points, puis 2^{m-2} façons de choisir les points dans les $(m-2)$ orbites, puis deux façons de choisir le m^{e} point.

Ici la division par 2 n'a pas lieu, car on a privilégié le sens de parcours ne commençant pas par l'arête perpendiculaire à δ issue de P_1).
Finalement :

$$\mathrm{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}(m-1)!2^{m-1} + 2C_m^2(m-1)!2^{m-2}$$
$$\mathrm{Card}(A_\sigma) = (m-1)!(m+1)2^{m-2}$$

d) Si σ est la symétrie centrale

Un polygone de A_σ possède 0 ou 2 arêtes diamétrales, qui jouent le même rôle que les arêtes perpendiculaires à δ dans 2) c).
Donc :

$$\mathrm{Card}(A_\sigma) = (m-1)!(m+1)2^{m-2}.$$

On applique maintenant la formule de Burnside-Frobenius sachant qu'il y a $\varphi(d)$ rotations d'ordre $d \neq 2$, m symétries de type b), m symétries de type c) et une symétrie centrale.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}((m-1)!2^{m-2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{d/n_{d\neq 2}} (\frac{n}{d}-1)!d^{\frac{n}{d}-1}\varphi(d)^2$$
$$\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{1}{4n}((m-1)!2^{m-1}m(m+3) + \sum_{d/n}(\frac{n}{d}-1)!d^{\frac{n}{d}-1}\varphi(d)^2)$$

Dans cette dernière formule, le cas $d = 2$ est compris dans la somme.

Quelques valeurs :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Card (r)	1	2	4	12	39	202	1219	9468	83435	836017

Voici à titre d'exemple, en page suivante, les douze orbites correspondant au cas de l'hexagone régulier.