

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

Richard CABASSUT

Lycée International de Strasbourg

1) LE SYSTÈME ÉDUCATIF DANOIS

Un pays à taille humaine

Le Danemark est un pays d'environ 400 îles ou péninsules, peuplé par 5,15 millions d'habitants, dont les principales villes sont Copenhague (1337000), Odense (139000), Arhus (202000), Alborg (113000) et Esbjerg (81000). Les établissements scolaires sont donc implantés essentiellement dans de petites agglomérations et avec une taille humaine. En 1990, 632000 élèves fréquentaient l'enseignement obligatoire (école maternelle, primaire et 1er cycle du secondaire dans la Folkeskole). 72000 fréquentaient le lycée d'enseignement général, 240000 l'enseignement professionnel et 126000 l'enseignement supérieur.

Le ministère de l'éducation régit le système scolaire : orientations, directives, recommandations (non obligatoires), contrôle général des examens de fin d'études, fixation de normes minimales pour les bâtiments scolaires, subventions globales au privé comme au public sans décider de l'affectation des fonds.

L'enseignement obligatoire : une école où l'enseignement primaire ne se distingue pas de l'enseignement secondaire 1er cycle :

Jusqu'à 7 ans les enfants peuvent être accueillis en garderie de jour (de 0 à 3 ans) ou jardin d'enfants (de 3 à 7 ans) ou classes préparatoires de 5 à 7 ans. La scolarité est obligatoire de 7 à 16 ans et se déroule dans un même lieu : la Folkeskole (école municipale) ou l'école privée (10 % des élèves). La 10^e année existe pour des cours de niveau supérieur et prépare à un examen non obligatoire de fin d'études avancées. Il n'est pas obligatoire de suivre cette dixième année pour poursuivre les études en lycée : elle est réservée aux élèves souhaitant consolider leurs acquis avant de poursuivre des études ou avant de quitter le système éducatif.

L'enseignement post-obligatoire : le choix entre l'enseignement général ou l'enseignement professionnel :

A la fin de la scolarité obligatoire, l'élève peut choisir sous certaines conditions (explicitées dans le paragraphe évaluation) le Gymnasium, qui s'apparente à notre lycée d'enseignement général, et qui prépare en trois ans au Studentereksamen (l'équivalent de notre baccalauréat) permettant l'accès à l'Université. Les élèves plus âgés considérés aptes à reprendre les études générales qu'ils ont interrompues pour participer à une expérience professionnelle ou à d'autres expériences de formation peuvent choisir les cours de HF (Højere Forberedelseksamen) :

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

ces cours préparent en deux ans à l'examen préparatoire supérieur HF qui permet également l'accès à l'enseignement supérieur. Plus de deux tiers des élèves de HF ont interrompu leur scolarité après la Folkeskole pendant plus d'un an. Chacun des 14 comtés danois est responsable, dans la grande majorité des cas, des écoles secondaires supérieures (Gymnasium et cours de HF) du comté.

L'élève peut également choisir l'enseignement professionnel par l'apprentissage (durée de 2 à 4 ans, avec une formation théorique en école technique ou de commerce et formation pratique en entreprise) ou l'accès à des écoles techniques (dessinateurs techniques, assistants techniciens, laborantins,...), commerciales, agronomiques, d'éducation sanitaire et sociale ou d'autres types d'enseignement professionnel. Les écoles d'enseignement professionnel sont plutôt privées mais reçoivent des subventions de l'état.

Les universités et la majorité des établissements d'enseignement supérieur sont gérés par l'état.

2) L'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques à la Folkeskole :

L'enseignement des mathématiques est obligatoire à raison de 4 séquences de 45 mn par semaine. Des programmes différenciés sont proposés en 8^o, 9^o ou 10^o.

Les mathématiques au lycée :

L'enseignement dure 3 années, de 16-17 ans à 18-19 ans. Deux séries sont proposées : la série "mathématique" ou la série "langue".

Dans la série mathématique, les élèves reçoivent un enseignement de **mathématiques obligatoires** (niveau B) les deux premières années, à raison de 5 heures hebdomadaires (1 heure de cours dure en fait 45 mn). A l'issue de ces deux années, ce qui correspond à la fin de première française, les élèves passent un examen écrit de 4 heures pleines et un examen oral de 25 mn. La troisième année ils peuvent soit ne pas avoir d'enseignement de mathématiques, soit avoir un enseignement de **mathématiques de haut niveau** (niveau A), ce que choisissent environ 85 % des élèves de deuxième année de série mathématique. Cet enseignement de 5 heures hebdomadaires est évalué par un examen écrit de 4 heures pleines et un examen oral de 30 mn. Cet examen oral remplace celui de fin de deuxième année dont sont dispensés les élèves qui poursuivent les mathématiques en troisième année. Il y a également la possibilité de préparer, pendant une semaine pour laquelle l'élève est dispensé des cours, un mémoire en mathématiques dont il est tenu compte dans la note de baccalauréat (une description plus complète est donnée dans le paragraphe sur le mémoire).

Dans la série langue, un enseignement général des sciences, constitué de mathématiques, physique, chimie, environnement et astronomie, est dispensé la même année par un seul et même professeur à raison de 3 heures par semaine. A l'issue de cette première année trois possibilités sont offertes à l'élève.

Soit il continue en deuxième année un enseignement général des sciences, à

raison de 4 heures par semaine, sanctionné par un examen oral. Il n'y a plus d'enseignement scientifique en 3^e année.

Soit il choisit la **série langue niveau intermédiaire** (niveau C). Alors il reçoit un enseignement de mathématiques de 4 heures hebdomadaires, ou bien en deuxième année, ou bien en troisième année, sanctionnées par un examen oral de 25 mn.

Soit il choisit la série **langue de haut niveau** (niveau B) pour laquelle il suit un enseignement mathématique de niveau comparable à celui de l'enseignement obligatoire de série "mathématique", à raison de 5 h par semaine et sanctionné par un examen écrit et oral.

Tous ces choix sont sous la seule responsabilité des élèves : les professeurs et les conseils de classe peuvent donner un avis mais leur accord n'est pas nécessaire.

Les programmes de mathématiques en lycée :

Série "mathématique" :

Mathématiques obligatoires (niveau B) :

Les finalités de cet enseignement :

- les étudiants doivent acquérir une compréhension de modes de pensée, de concepts et de méthodes mathématiques fondamentales;
- les étudiants doivent devenir familiers avec les mathématiques comme moyen de formulation, d'analyse et de résolution de problèmes à l'intérieur de différents domaines (du programme).

Le programme comprend cinq domaines et trois aspects.

Les cinq domaines sont :

- 1) nombres : entiers, rationnels et réels, exposants, racines, pourcentages, intérêts;
- 2) géométrie : triangle, triangles rectangles et semblables, aire dans le plan, distance dans le plan, sinus, cosinus et tangente, calcul des longueurs et angles dans un triangle;
- 3) fonctions : fonctions linéaires, polynômes, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, puissances. Résolution de problèmes d'équations et inégalités faisant intervenir les fonctions ci-dessus;
- 4) calcul différentiel : nombre dérivé, tangente, approximation affine, règle de dérivation, maximum, minimum, fonctions monotones, méthodes de tracer de courbes;
- 5) statistiques et probabilités : expériences aléatoires, probabilité a priori et par fréquence, univers des possibles, probabilités des événements, variable aléatoire, distribution binomiale et normale.

Les trois aspects sont :

- 1) l'aspect historique : les étudiants doivent acquérir une connaissance des mathématiques et des éléments d'histoire des mathématiques dans un contexte socio-culturel;
- 2) l'aspect modélisation : le programme doit donner aux étudiants une connaissance de construction de modèles mathématiques comme représentation de la réalité et une impression des possibilités et des limites de l'application de modèles mathématiques et leur permettre de manière autonome de modéliser des situa-

tions simples;

3) structure interne des mathématiques : les étudiants doivent acquérir une compréhension des modes de pensée et des méthodes caractéristiques des mathématiques. Ils doivent comprendre comment ces modes de pensées et ces méthodes affectent le développement et la structure des domaines (du programme);

Etude des aspects : les trois aspects sont étudiés en relation avec l'étude des cinq domaines et à travers un enseignement spécial d'unités organisées en relation avec un ou plusieurs aspects. Ces unités peuvent être incluses dans un thème obligatoire (du programme) aussi bien que dans un thème additionnel (du programme). Ces unités doivent prendre au moins 20 leçons.

Mathématiques haut niveau (niveau A)

Se rajoute aux finalités de l'enseignement obligatoire la finalité suivante : les étudiants doivent développer davantage la capacité d'utiliser des concepts mathématiques et des méthodes de manière autonome, et devenir capables de connaître, analyser et évaluer des problèmes qui peuvent être formulés et traités au moyen de concepts et méthodes mathématiques.

Le programme comprend trois domaines, une unité au choix et trois aspects.

Les trois domaines sont :

1) Géométrie de dimension 2 et 3. Vecteurs, coordonnées, produit scalaire, orthogonalité, produit vectoriel, projection, description analytique d'ensemble de points, distance, angle, intersection entre ensembles.

2) Calcul intégral. Equations différentielles : primitives, intégrales définies et indéfinies; définition d'une intégrale comme limite de sommes, méthodes analytiques et numériques d'intégration, calcul d'aire et de volume, modèles d'équations différentielles, incluant $y' = f(x)g(y)$ et $y'' = ky$.

3) Un domaine lié aux mathématiques et à l'informatique. Les étudiants doivent acquérir une compréhension d'un domaine des mathématiques qui illustre l'interaction entre mathématique et informatique... Le concept d'algorithme doit jouer un rôle central. Ce domaine doit durer au moins vingt séquences.

4) Une unité au choix doit durer environ vingt-cinq séquences.

Les trois aspects sont les mêmes que pour l'enseignement obligatoire précédent.

Mathématiques de la série langue : niveau intermédiaire (niveau C)

Les finalités de cet enseignement :

– les étudiants doivent acquérir une compréhension des modes de pensée et des méthodes mathématiques,

– les étudiants doivent acquérir une connaissance des mathématiques comme un moyen de formulation, d'analyse et de résolution des problèmes dans des domaines variés (du programme),

– les étudiants doivent devenir compétents dans l'application de quelques concepts mathématiques élémentaires et méthodes pour résoudre des problèmes.

Le programme comprend trois domaines et une unité au choix. Les trois domaines sont :

1) fonction, optimisation : les étudiants doivent acquérir une compréhension des fonctions comme moyen de description et d'analyse des relations entre variables aussi bien qu'une connaissance des fonctions élémentaires et des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation;

2) traitement et analyse des données : l'enseignement doit développer la capacité des étudiants à utiliser les moyens de description statistique et les outils de calcul (ordinateurs compris) pour analyser les données. De plus les étudiants doivent devenir familiers avec les concepts et les descriptions des problèmes économiques courants;

3) géométrie : l'enseignement doit accroître la connaissance des étudiants pour les concepts fondamentaux de la géométrie. Le but principal est d'augmenter la compréhension des étudiants pour les modes de pensée et les méthodes mathématiques et de leur donner quelques applications pratiques de géométrie ou un aperçu des mathématiques dans un contexte historique.

Un sujet de choix libre doit être traité pendant environ vingt leçons.

3) ÉVALUATION ET ORIENTATION AU DANEMARK

Le système de notation :

A la Folkeskole, le système de notation reflète une philosophie libérale. Jusqu'à la classe 7 (environ 13 ans) les parents sont informés au moins deux fois par an sur la scolarité de leurs enfants sans qu'aucune note ne soit donnée. A partir de la classe 8 (environ 14 ans) des notes sont attribuées dans les matières que l'élève choisit de présenter pour l'examen de fin d'études. Il n'y a pas obligation de se présenter à l'examen; simplement ce dernier peut servir de certificat attestant le niveau acquis à la sortie de la Folkeskole. Cependant pour les élèves qui souhaitent poursuivre leurs études au lycée il est obligatoire de passer l'examen dans certaines matières. Pour continuer au lycée il faut remplir simultanément les conditions suivantes : avoir terminé la classe 9 (ou 10), avoir suivi allemand ou français de la classe 7 à la classe 9 (l'anglais étant obligatoire dès la classe 5), avoir passé une épreuve écrite avec un résultat acceptable en danois et en calcul-mathématiques pour les deux séries, une épreuve orale avec un résultat acceptable en anglais, allemand ou français pour la série langue, en physique-chimie pour la série mathématiques. De plus, les professeurs de la Folkeskole doivent avoir reconnu l'élève apte à poursuivre en lycée, sinon l'élève doit passer un examen oral supplémentaire.

Que ce soit à la Folkeskole ou au lycée, l'échelle des notes données aux productions d'élèves est constituée de neuf notes, représentant des catégories bien délimitées. Un des objectifs de ce système de notation est d'assurer l'uniformité de l'évaluation des résultats dans l'établissement et entre établissements. 13 est donné pour une production exceptionnellement originale et excellente; 11 est donné pour une production originale et excellente; 10 est donné pour une production excellente mais pas particulièrement originale; 9 est donné pour une production un peu

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

au-dessus de la moyenne; 8 est donné pour une production moyenne c'est-à-dire le dernier niveau de production acceptable; 7 est donné pour une production médiocre, un peu au-dessous de la moyenne; 6 est donné pour une production hésitante mais plus ou moins satisfaisante; 5 est donné pour une production hésitante et non satisfaisante; 03 est donné pour une production très hésitante, imparfaite et très insuffisante; 00 est donné pour une production totalement inacceptable. Pour des épreuves écrites en mathématiques il existe une table convertissant les pourcentages obtenus du total des points en notes précédentes. Le barème doit être composé de manière à ce que la signification des catégories précédentes soit respectée.

L'évaluation au lycée :

Au lycée le passage d'une classe à l'autre est automatique : les professeurs donnent seulement des conseils (quitter l'école ou travailler plus,...). De même pour l'orientation (choix des matières de haut niveau ou de niveau intermédiaire ou pour le choix de la discipline où le mémoire sera rédigé) et c'est l'élève seul qui prend la responsabilité de ces choix.

Un contrôle continu est effectué. Dans la série "mathématique", les élèves doivent rédiger 26 devoirs à la maison par an, qui s'apparentent à la résolution d'une série d'exercices, de type baccalauréat plus on se rapproche de l'épreuve. C'est une faute professionnelle pour le professeur que de ne pas proposer ces devoirs et de ne pas les corriger individuellement. Ces devoirs ne sont cependant pas notés mais simplement les fautes sont corrigées et des remarques adressées.

Chaque trimestre un devoir en classe de deux fois 45 mn est rédigé et noté. Un bulletin trimestriel situe par une note orale et une note écrite le niveau mathématique de l'élève. Pour les élèves de deuxième et troisième années une épreuve de baccalauréat blanc est organisée dans les mêmes conditions de durée et de présentation, mais est corrigée seulement par le professeur de la classe.

L'épreuve de mathématiques du baccalauréat dans la série "mathématique" :

L'épreuve écrite de fin de deuxième année :

Au lycée les élèves sont évalués par l'examen terminal correspondant à notre baccalauréat : le Studentereksamen. Pour la série "mathématique" dès la fin de la deuxième année de lycée (l'équivalent de la fin de la classe de première en France), une épreuve écrite de 4 h en mathématiques est obligatoire. Cette épreuve est constituée de quatre parties indépendantes, couvrant l'ensemble du programme, combinant des questions d'exécution d'algorithmes ou de tâches routinières avec des questions exigeant une réflexion plus grande, avec des thèmes de mathématiques pures et appliquées (voir annexe 1). Le concept de problème à la française n'apparaît pas dans ce type de sujet d'épreuve. L'élève dispose d'un formulaire de baccalauréat très complet de 27 pages, couvrant toutes les rubriques du programme. La correction de l'épreuve écrite est effectuée par deux examinateurs qui se rencontrent pour fixer la note définitive.

L'épreuve orale de fin de deuxième année :

Si l'élève ne continue pas l'enseignement des mathématiques en 3^e année, une épreuve orale est obligatoire. Le sujet de l'épreuve orale est un sujet de cours que l'élève doit développer (définitions, théorèmes, applications, . . .), en disposant du livre de cours pour une préparation de 20 mn suivie d'un exposé de 25 mn. D'autres aides peuvent être utilisées par le candidat : d'autres livres, les notes de cours du candidat, les calculatrices de poches autorisées, les tables, . . . En aucune façon il ne s'agit de résoudre un ou des exercices, comme pour les épreuves françaises. Le professeur de la classe pose des questions et intervient lors de cet exposé. Un professeur externe assiste à l'exposé mais n'intervient pas. Après l'exposé les deux professeurs fixent d'un commun accord la note définitive, avec prédominance de l'examineur externe en cas de désaccord.

Les épreuves éventuelles de 3^e année :

Si l'élève continue l'enseignement des mathématiques en troisième année, il aura une nouvelle épreuve écrite obligatoire en mathématiques, d'une durée de 4 heures, sur les thèmes de la classe de 3^e année, avec un nouveau formulaire de cours pour troisième année et une épreuve orale de 30 mn ayant même organisation que celle de deuxième année.

Les programmes des épreuves écrites ainsi que les sujets sont nationaux et peuvent porter sur toute partie du programme. Les programmes des épreuves orales portent sur 50 % du programme national (pour l'épreuve de fin de 2^e année) et 2/3 du programme (pour l'épreuve de 3^e année) de manière à ce que les parties principales du programme aient une importance appropriée. Le choix du contenu du programme de l'oral est fait par le professeur et sa classe et est communiqué au Ministère en cours d'année en indiquant les pages correspondantes du livre de cours dont disposera l'élève pendant l'examen. Le nombre de pages sélectionnées est compris entre 140 et 220 pour l'examen de fin de de 2^e année et entre 125 et 175 pour l'examen de fin de de 3^e année. C'est le professeur qui rédige les sujets d'oraux tirés au hasard par chaque candidat en présence du second examinateur extérieur.

Toutes les épreuves d'examens sont effectuées sous le contrôle du Ministère : il élabore et diffuse les sujets des épreuves écrites; il nomme et rétribue les examinateurs extérieurs pour l'oral et pour l'écrit. En plus des traditionnelles annales de sujets d'écrit il existe une cassette vidéo qui montre des épreuves orales réelles avec le résultat de la délibération du jury. Ces cassettes sont surtout destinées à la formation des professeurs.

Enfin l'élève peut choisir de rédiger sous certaines conditions un mémoire en mathématiques : pendant une semaine il est libéré des cours pour le rédiger (voir une description plus complète dans le paragraphe sur le mémoire).

Les notes comptant pour la note finale de baccalauréat sont les notes de fin de cours données dans chaque discipline suivie au lycée, les notes obtenues aux examens, la note obtenue au mémoire. La moyenne de ces notes est prise en compte pour

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

l'accès à l'enseignement supérieur pour lequel il existe un numéris clausus.

L'épreuve de mathématiques dans la série "langue" :

Pour les élèves qui ne suivent que l'enseignement général des sciences auquel est intégré l'enseignement des mathématiques, une épreuve orale d'enseignement général des sciences est prévue en fin de de 2^e année.

Pour les élèves qui choisissent l'enseignement des mathématiques de haut niveau de la série "langue", cet enseignement est comparable à l'enseignement obligatoire de la série "mathématique". Il sera donc évalué en fin de de 3^e année par un examen écrit et un examen oral comparables à ceux de fin de de 2^e année des élèves de la série "mathématique".

Enfin, les élèves peuvent choisir, à la fin de la de 1^{ère} année ou de la de 2^e année, les mathématiques de niveau intermédiaire de la série "langue". Ils sont évalués par un examen oral en fin d'année. Le temps de préparation et de consultation des documents est de 25 mn. En incluant le temps de délibération du jury, il doit être interrogé 2,5 candidats par heure. La partie du programme sélectionnée pour l'examen doit couvrir environ 2/3 du programme de manière à ce que les parties principales au programme aient une importance appropriée.

La partie correspondant à ce programme dans les documents de référence mis à disposition pendant la préparation de l'oral (le plus souvent le livre de classe) doit couvrir entre 80 à 120 pages.

LE MÉMOIRE DE LA CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

Les élèves de classe de 3^e année doivent rédiger un mémoire, et un seul, dans une discipline. Les mathématiques de haut niveau peuvent être choisies pour le mémoire. Ce dernier sera évalué par le professeur de l'élève et un professeur extérieur à l'établissement, qui attribueront, d'un commun accord, une note qui sera prise en compte dans la moyenne du baccalauréat.

Pour décrire plus en détail l'organisation de ce mémoire voici la traduction d'une feuille diffusée aux élèves en début d'année de de 3^e année lors d'une réunion d'information concernant ce mémoire.

Aux élèves

Le mémoire de classe terminale

Calendrier :

28 octobre : information sur l'organisation générale du mémoire ;

12 novembre : les professeurs des différentes disciplines possibles pour le mémoire conseillent les élèves ;

23 novembre : choix de la discipline et du sujet général ; ce choix est enregistré officiellement par l'administration ;

18 janvier à 12 h : les élèves reçoivent le descriptif précis (cahier des charges) du mémoire et sont libérés de cours pendant une semaine pour le rédiger ;

25 janvier à 12 h : remise du mémoire.

Discipline : On peut choisir comme discipline le danois, l'histoire ou une discipline de haut niveau de la série que l'on suit.

Sujet : Il doit être dans les limites de la discipline choisie et doit contenir un thème qui n'a pas été étudié en classe (s'il s'agit d'un thème que les élèves connaissent déjà il faut l'étudier d'une autre manière et l'approfondir). La description du sujet (23 novembre) est approuvée par signature de l'élève et de son professeur. Pendant les études préliminaires (avant la semaine de rédaction) on a le droit de préciser davantage le sujet mais pas de le changer.

Formulation du sujet : Seul le professeur formule le sujet précis, avec un cahier des charges, de façon que l'élève ne puisse pas à l'avance rédiger la copie finale. Cependant le professeur doit prendre en considération les idées de l'élève pendant la période de préparation.

Copie du mémoire : Elle doit être de forme claire et précise : pas plus de 15 pages dactylographiées de format A4 de texte réel, non compris l'index, les notes, la bibliographie, les graphes, les tables, les illustrations, les citations, même s'ils sont placés dans le texte. Les 15 pages auront un intervalle de ligne 1,5, 60 caractères par ligne, 40 lignes par page.

Remise : Le mémoire en deux exemplaires signés, l'un avec la mention "original", l'autre avec la mention "copie" doit être remis à la date indiquée; en cas de litige seule la mention "original" prévaudra. (L'un des exemplaires est destiné au professeur, l'autre au professeur extérieur.)

Evaluation : Il importe que le candidat respecte les instructions données dans la formulation du sujet, qu'il sache analyser, interpréter et traiter les questions d'une façon personnelle, qu'il ne se contente pas de résumer un texte, qu'il transmette bien les idées et qu'il sache documenter son travail en se référant à des sources adéquates.

Fraude : L'épreuve fait partie de l'examen du baccalauréat; une fraude éventuelle serait punie très sévèrement, par l'exclusion de l'examen final. Il est notamment interdit de remettre un essai que l'on n'a pas rédigé personnellement, de copier des informations importantes sans indiquer la source...

Réclamation : Une réclamation éventuelle de la note obtenue sera à remettre au proviseur au plus tard deux semaines après réception de la note.

Deux exemples de cahier des charges donné à un élève pour un mémoire concernant les fractales et le chaos.

1) décrire des figures fractales et certaines de leurs caractéristiques, si possible à travers des exemples. Ce faisant, vous évoquerez le concept de dimension de Hausdorff pour un objet. Eventuellement vous pouvez mesurer la dimension d'une ligne de côte ou de quelque chose d'analogue.

2) expliciter pour quelques figures fractales comment elles sont construites. Par exemple vous pouvez considérer la fonction quadratique du plan et son lien avec l'ensemble de Mandelbrot.

Aux endroits correspondants de votre rapport vous expliquerez les concepts centraux comme itération, point fixe, chaos... Quand c'est pertinent vous utiliserez avec modération l'ordinateur.

Programmation linéaire : théorie et pratique.

1) Expliquez la programmation linéaire à deux variables. Vous devez expliquer les concepts fondamentaux, notamment ceux de fonction linéaire à deux variables, fonction de critère, fonction numérique d'une variable vectorielle, polygone des contraintes, lignes de niveau, maximum ou minimum de la fonction de critère. Illustrer si possible la méthode de résolution avec un ou plusieurs exemples (un exemple est fourni à l'élève).

2) Mentionner la méthode des simplexes, la M-méthode et l'analyse des petites variations si possible à partir d'un exemple (voir autre exemple en annexe).

3) La programmation linéaire en pratique.

Etudier soit à partir des exercices 6.6 à 6.10 du livre de Blomhoj, m.fl. Programmation linéaire, FAG (1984) ... l'exemple 6.5 du même livre (ndlr : il s'agit de l'application de la programmation linéaire au système de gestion des écoles Folkeskoles (c'est-à-dire primaire-collège) de la ville de Odense), soit à partir d'autres exemples concrets (pages 123 à 126). Si c'est pertinent, on utilisera un ordinateur avec modération.

Exemples de sujets de mémoires :

Réseaux de neurones, récurrence et récursivité, fractions continues, recherche opérationnelle, cryptologie, algèbre, complexes, coniques, analyse numérique, calcul approché, formule de Taylor et développement en série, fonctions trigonométriques, histoire du calcul différentiel, équations différentielles, modèles mathématiques appliqués à l'économie, statistiques et probabilités, théorie des jeux, test d'hypothèses, probabilité appliquée à l'économie, topographie, géométrie sphérique, itération et chaos, fractales, mathématiques babyloniennes, mathématiques grecques.

Exemples de livres disponibles :

L'établissement dispose d'un fond de livres de mathématiques plus approfondis que le professeur peut utiliser pour développer un thème libre ou pour conseiller les élèves sur des choix de sujets de mémoires. A titre d'exemple voici la liste des titres des livres disponibles en une trentaine d'exemplaires dans le fond de livres d'un lycée :

Programmation linéaire; aspect des mathématiques : histoire de la détermination des tangentes; au cœur des mathématiques : du mythe aux mathématiques physiques; qu'est-ce que les mathématiques; les nombres; prouver les mathématiques; les algorithmes formels (graphes); dessins en trois dimensions; complexes et fractales; algèbre de Boole; l'utilisation des mathématiques en biologie; calcul financier; Georg Mohr : Euclide Danicus; Euclide : éléments 1 à 4; sources et commentaires sur l'histoire des équations; quadrature du cercle; trisection de l'angle; duplication du cube; de la croissance linéaire au chaos; nombre et pensée : l'opinion des Pythagoriciens sur la vie et de monde; le nombre d'or dans l'art; la

nature et les mathématiques; combinatoire et algorithmes; complexes; nombre et géométrie avec des extraits de l'histoire des mathématiques grecques.

Ces ouvrages sont édités soit par des éditeurs privés, soit par l'association des professeurs de mathématiques.

Annexe 1

Exemple de sujet de baccalauréat de la série mathématiques,
fin de 2e année (équivalent de notre première française).

STUDENTEREKSAMEN – mai-juin 1993 – Série mathématique
Mathématiques : niveau obligatoire – Vendredi le 21 mai 1993 (9 h à 13 h)

Un seul des problèmes 6a et 6b est à traiter.

La répartition des points sera approximativement la suivante :

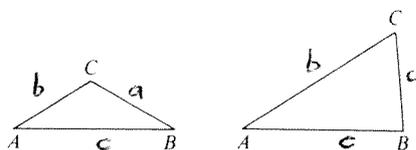
problème 1	...	environ 25 points
problème 2	...	environ 10 points
chacun des problèmes 3 et 4	...	environ 15 points
problème 5	...	environ 20 points
problème 6	...	environ 15 points

Problème 1 :

- a) Pour la fonction $f(x) = b.a^x$, si x augmente de 3, alors $f(x)$ double sa valeur. Déterminer a .
- b) Déterminer la dérivée $f'(x)$ de $f(x) = \frac{x+3}{\sin x}$.
- c) 10000 couronnes sont placées sur un compte. Quatre ans plus tard, on obtient 14641 couronnes. Déterminer l'intérêt annuel moyen.
- d) Tracer le graphe de $f(x) = 120x^{-2}$ dans un système logarithmique double de coordonnées.
- e) Effectuer la division : $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 3)$.

Problème 2 :

Dans le triangle ABC , $\hat{A} = 32,8^\circ$;
 $a = 3,51$ et $c = 5,72$. Comme
montré sur la figure il y a deux
formes possibles de triangles ABC .
Calculer b pour chacune.



Problème 3 :

Une fonction f est définie par : $f(x) = \ln(2x + 1) - 4x, x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Déterminer la monotonie de f . Dessiner précisément le graphe de f . Déterminer l'ensemble image de f .

Problème 4 :

Dans un jeu d'ordinateur vous devez décrire rapidement une orbite. La table ci-dessous donne les pourcentages de joueurs répartis en fonction du temps, pour un grand nombre de joueurs :

temps en mn	% de joueurs
0 - 5	2,4 %
5 - 7	19,6 %
7 - 9	43,0 %
9 - 11	29,3 %
11 et +	5,7 %

- 1) Montrer que le temps pris par un joueur pour décrire l'orbite est distribué approximativement suivant une loi normale.
- 2) Déterminer la moyenne et l'écart type de cette loi normale.
- 3) Dix joueurs sont choisis au hasard. Calculer la probabilité qu'ils prennent 7 à 9 mn pour décrire l'orbite.

Problème 5 :

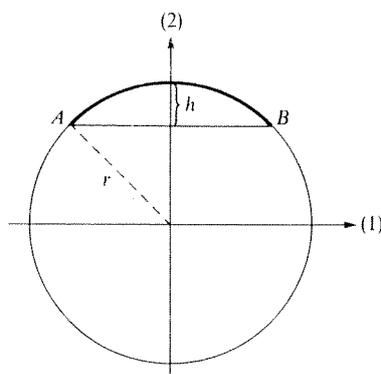
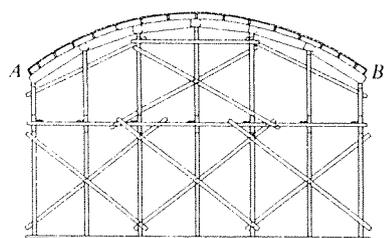


Figure 1 : l'échelle n'est pas respectée pour les relations entre dimensions.

On utilise un coffrage en bois pour couler du béton. Dans la figure 1 on voit un dessin, en coupe verticale, du coffrage d'un toit de forme circulaire. Sur la figure 2, ce cercle est tracé dans un système de coordonnées. L'arc \widehat{AB} correspond au coffrage et h est la plus grande hauteur du coffrage au-dessus de la corde $[AB]$ avec $AB = 9m$ et $h = 1,5m$.

Montrer que le rayon r du cercle vaut $7,5m$ et déterminer une équation de ce cercle.

L'équation du cercle est utilisée pour la construction, par exemple pour calculer la hauteur en différents points. Déterminer la hauteur en un point situé à $2m$ de A . L'angle entre la tangente en A au cercle et l'horizontale est une donnée importante pour le coffrage. Si l'angle est supérieur à 35° , le coffrage doit être plus solide. Déterminer si c'est le cas.

Problème 6a :

La figure 1 montre un container, de forme cylindrique, de rayon r , de largeur l et de volume $V = \pi r^2 l$. La figure 2 est extraite d'un document postal de 1992. Un paquet doit être envoyé au Groenland. La forme du paquet doit être celle de la figure 1. La longueur du paquet plus le périmètre du cercle valent 250 cm. Montrer que le volume du paquet est $V = 250\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$.

Déterminer le volume V maximum.



Figure 1

Formater maksimum Pakker		
Danmark	100 x 60 x 60 cm	Længde 150 cm
Færøerne		Diameter 25 cm
Volumenpakker	Længde 150 cm	Længde 200 cm
	Rumfang 1m ³	Rumfang 1m ³
Grønland	Længde 100 cm	Længde 150 cm
	Længde	Længde
	+omkreds 250 cm	+omkreds 250 cm

Figure 2

Problème 6b :

Dans un système de coordonnées on considère la parabole \mathcal{P} et la droite l avec $\mathcal{P} : y = x^2 - 8x + 11, l : y = -\frac{1}{2}x$. Dessiner l et \mathcal{P} dans le système de coordonnées. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre l et \mathcal{P} et résoudre $-\frac{1}{2}x < x^2 - 8x + 11$. \mathcal{P} a une tangente parallèle à l . Déterminer l'intersection de cette tangente avec (Oy) .

[On rappelle que des problèmes 6e et 6b seul l'un d'eux doit être traité.]

Annexe 2

Exemple de sujet du baccalauréat série mathématique, fin de 3e année
 Mathématiques : haut niveau – Mercredi le 18 août 1992 (9 h à 13 h)

Un seul des problèmes 6a et 6b est à traiter.

Parmi les problèmes 6e et 6b un seul doit être résolu.

La répartition des points est la suivante :

pour chaque problème 1, 2, 3 et 4	environ 15 points ...
pour le problème 5	environ 25 points ...
pour le problème 6	environ 15 points. ...

Problème 1 :

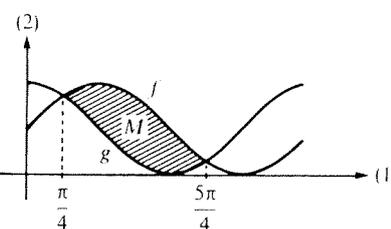
Dans un système de coordonnées de l'espace on donne deux droites parallèles l et m sous forme paramétrique :

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Déterminer la distance entre l et m . Déterminer une équation du plan α , contenant l et m . Une sphère K de centre $C(-5, 2, 1)$ est tangente au plan α . Déterminer une équation de K .

Problème 2 :

Sur la figure est hachuré un ensemble M de points délimité par les courbes des fonctions f et g , avec : $f(x) = \sin x + 1$, $g(x) = \cos x + 1$. Déterminer l'aire de M . Déterminer le volume du solide de révolution engendré par une rotation de M autour de l'axe (Ox) .

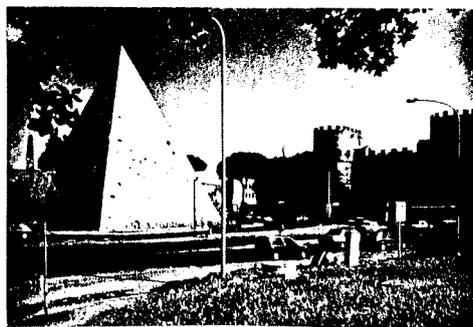


Problème 3 :

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y}$ sachant que $f(\sqrt{3}) = 0$. Donner l'allure de la courbe de f .

Problème 4 :

La figure ci-jointe montre la pyramide de Cestius à Rome. Cette pyramide a pour base un carré de 30 m de côté. Son sommet se situe à 37 m, au-dessus du point d'intersection des diagonales de sa base. Déterminer l'angle entre la base et une face inclinée de la pyramide.



Déterminer l'angle entre deux faces inclinées voisines.

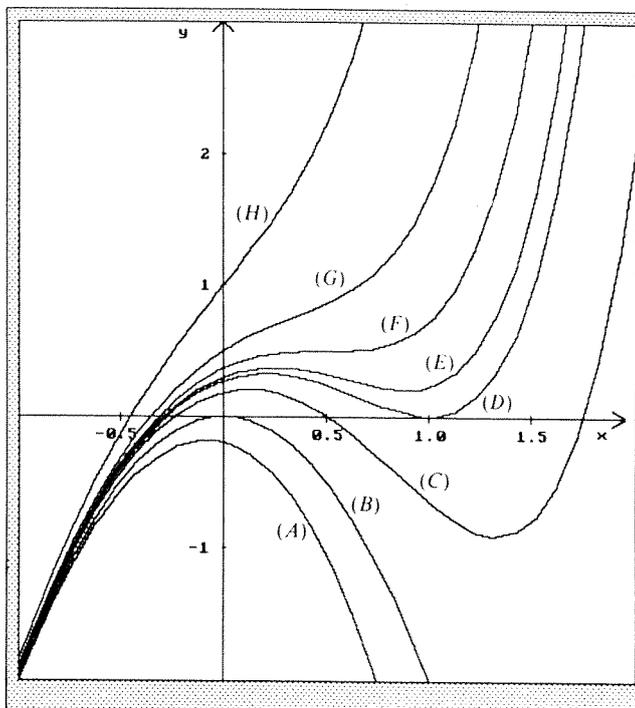
Indication : on pourra dessiner éventuellement la pyramide dans un système de coordonnées.

Problème 5 :

La figure ci-jointe montre l'impression d'une série de courbes solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

Déterminer le polynôme du 2^e degré $p(x)$ solution de l'équation différentielle. Déterminer parmi les courbes précédentes quelle est sa courbe.

On considère la famille de fonctions f_c définies par $f_c(x) = c e^{2x} + p(x)$, où c est un réel.



Montrer que chaque fonction f_c est solution de l'équation différentielle.

Pour une valeur déterminée de c la fonction f_c a la courbe (D) . Déterminer cette valeur de c .

Sur la figure ci-jointe on voit que des courbes ont une tangente horizontale. L'ensemble des points de tangence des tangentes horizontales décrit une parabole. Déterminer une équation de cette parabole.

Problème 6 :

6a) On indique que $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Utiliser cette indication pour calculer $\int \frac{1-\ln x}{x^2} (\frac{1}{2}x^2 + 3) dx$.

6b) Soient dans un système de coordonnées les deux vecteurs $\vec{a} = (\frac{2t}{7+t})$ et $\vec{b} = (\frac{8+2t}{7-t})$, où t est réel.

Déterminer la valeur de t pour laquelle $\frac{1}{2}\vec{b}$ est la projection de \vec{a} sur \vec{b} .

Remarque : parmi les problèmes 6a) et 6b) un seul doit être résolu.

Il devient difficile pour l'I.R.E.M. de composer tous les articles proposés pour 'L'Ouvert' et nous nous trouvons souvent confrontées à de petits problèmes.

S'il vous est possible de nous transmettre un texte à reproduire tel-quel, pourriez-vous veiller à respecter certains petits détails :

- impression recto seulement,
- interligne 2,
- titre centré et en gras,
- pas d'alinéa,
- largeur du texte : 15 cm,
- hauteur du texte : 22 cm,
- nous fournir les figures sur feuille séparée.

Si vous avez l'habitude de travailler en T_EX ou en Word (sur PC ou sur Mac) merci de nous transmettre votre texte sur une disquette (qui sera retournée) ainsi que le document papier.

O. SCHLADENHAUFEN et E. LE GUYADER.