DANS NOS GROUPES I.R.E.M. :

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

Jean-Luc GASSER
Au nom du GROUPE MATHS-PHYSIQUE

Voici donc le deuxième article de cette série. On trouvera ci dessous une solution à chacun des problèmes posés.

SOLUTION DU PREMIER PROBLEME: LA COLONNE PERCEE

Partie Physique:

La solution classique à ce problème de physique est basée sur le théorème de Bernoulli, dont on déduit le théorème de Toricelli qui donne la vitesse d'écoulement v d'un liquide par un orifice pratiqué en mince paroi en fonction de la hauteur de liquide h:

$$v = \sqrt{2gh}$$

C'est cette formule qui permet de calculer la vitesse initiale horizontale de l'eau à la sortie de la colonne d'eau. On peut remarquer qu'elle est proportionnelle à $\sqrt{h}$, ce qui fournit l'occasion d'étudier une fonction en racine carrée de façon motivante!

Cependant aucun des deux théorèmes cités ci-dessus ne figurent au programme de l'enseignement secondaire. On peut faire un autre raisonnement qui permet d'arriver au même résultat en utilisant les outils dont disposent les élèves:

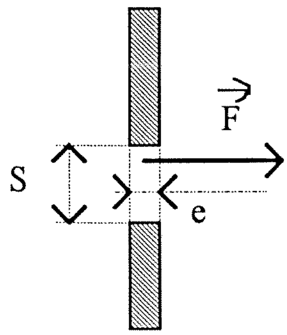


Figure 1

Les notations utilisées sont les suivantes:
* S est la section de l'orifice, supposée "petite".
* F est la force s'exerçant sur la masse m de liquide que l'on étudie.
* ρ est la masse volumique de ce liquide.
* P est la pression s'exerçant à l'endroit considéré.
* h est la hauteur de liquide au dessus du point considéré.
* V est le volume de liquide contenu dans une goutte élémentaire de liquide, de masse m, qu'on étudie lors d'un déplacement de longueur e.

La pression P, avant le passage à travers l'orifice est:

$P = \dfrac{F}{S}$ (par définition) et on a aussi $P = \rho gh = \dfrac{m}{V} gh$.

Par suite, le travail W de la force de pression F lors d'un déplacement du volume de liquide V sur une longueur e (traversée horizontale de la paroi) est:

$$W = F \times e = S\frac{m}{V} ghe.$$

Il est aussi égal à la variation de l'énergie cinétique: $W = \Delta E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 - 0$

Ce qui donne après simplification, comme $e = \dfrac{V}{S}$, la formule $v = \sqrt{2gh}$.

Remarquons que cette vitesse est égale à la vitesse acquise par un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. Le raisonnement, qui utilise le théorème de l'énergie cinétique, en considérant une masse m d'eau partant du haut de la colonne et sortant par l'orifice donne le même résultat. Mais il est faux!

Partie Mathématique:

Une *première méthode* consiste à écrire l'équation de la parabole $y = f(x)$ décrivant la trajectoire de l'eau, et à écrire que la distance x cherchée est obtenue lorsque y prend la valeur correspondant au sol.

Une *deuxième méthode*, plus agréable à mettre en oeuvre, consiste à calculer d'abord le temps t de chute directement, qui ne dépend que de la hauteur entre l'orifice de la colonne et le sol $(H-h)$.Il suffit alors de calculer la distance horizontale parcourue x, connaissant la vitesse horizontale v. Il est inutile d'établir l'équation de la parabole. Cette méthode est intéressante d'un point de vue physique puisqu'elle distingue les deux types de mouvement intervenant dans beaucoup de problèmes de chute des corps: le mouvement horizontal qui est uniforme, et le mouvement vertical qui est uniformément accéléré.

Le temps de chute t pour parcourir la distance $H-h$ est donné par la relation: $H-h = \frac{1}{2}gt^2$.

On en déduit la valeur de t: $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$.

La distance x parcourue horizontalement pendant le même temps t est $x = vt$, soit:

$x = \sqrt{2gh} \times \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$.

La fonction donnant la distance x du point de chute du jet d'eau par rapport à la colonne en fonction de la hauteur h de liquide est donc:

$$f(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$$

On obtient alors les points de chute des jets d'eau suivants en prenant $H = 5,5$:

Pour Albert: $f(4) = 2\sqrt{6} \cong 4,90m$

Pour Bertrand: $f(1) = 2\sqrt{4,5} \cong 4,24m$

Pour Claude: $f(2,5) = 2\sqrt{7,5} \cong 5,47m$

Claude gagne donc son pari, mais il est possible de faire mieux! En effet, il s'agit de trouver le maximum de la fonction $f(h)$. Calculons sa dérivée:

$$f'(h) = \frac{-2h+H}{\sqrt{h(H-h)}}$$

Elle s'annule pour $h = \frac{H}{2}$ et le point de chute maximum du jet d'eau est: $f(2,75) = 5,5m$.

SOLUTION DU DEUXIEME PROBLEME: LE BICONE REMONTE LA PENTE

La maquette réalisée permet de constater que, pour certaines valeurs de l'angle de la déclivité et de son angle d'écartement, le bicône semble remonter la pente! L'interprétation physique est bien sûr immédiate: en réalité, le centre de gravité du bicône descend. On peut de plus conjecturer les propriétés suivantes en faisant varier les différents angles de la maquette: le bicône "descend" la pente si:

- l'angle d'écartement δ des deux pentes est trop faible.
- l'angle de la déclivité γ est trop élevé.
- l'angle au sommet β de chacun des cônes est trop faible.

Ces différentes observations devront être vérifiables sur la condition mathématique qui décrira le phénomène observé.

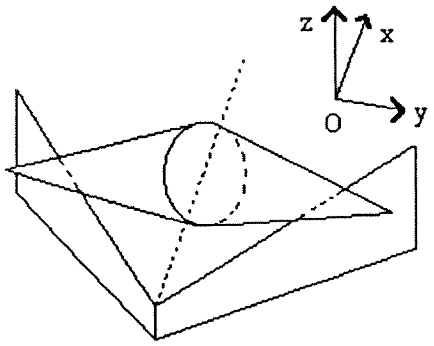


Figure 2

Pour la cohérence des notations, on se place dans un repère (O,x,y,z) comme indiqué sur la figure 2. Le point O est situé dans le plan vertical qui passe par les bases des deux cônes. L'axe z est vertical, les axes x et y sont dans un plan horizontal. Dans l'analyse du problème interviennent trois angles (quatre si on considère la fabrication du cône):

- Le demi angle au sommet du cône noté β précédemment.
- Le demi angle d'écartement de la pente noté δ.
- L'angle de la pente que remonte le cône, noté γ.

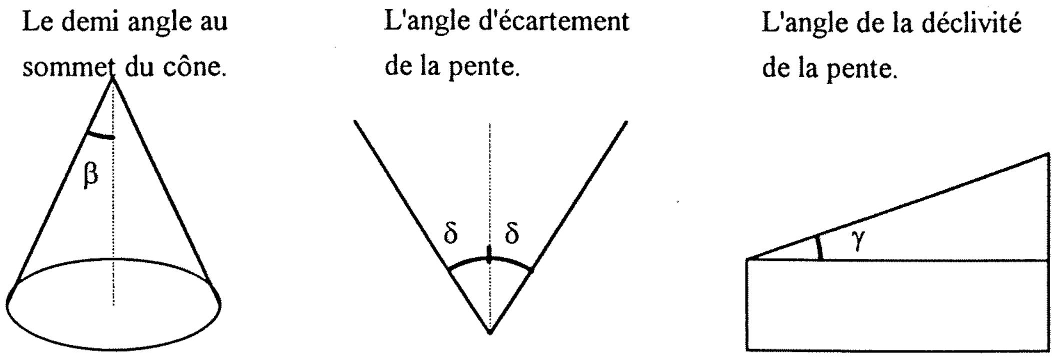


Figure 3

Il est utile de réaliser différentes vues de l'expérience, en ayant présent à l'esprit que les grandeurs réelles ne sont pas forcément respectées sur le dessin (voir figure 4). On note P_1 et P_2 les points de contact du cône avec le support. Leurs projections orthogonales sur l'axe du cône sont notées M_1 et M_2. La dénivellation de l'axe du cône et donc de son centre de gravité est donnée par la distance $M_1P_1 - M_2P_2$. Le cône "remonte" la pente si cette valeur est positive, ce qui correspond en fait à une position plus basse du centre de gravité.

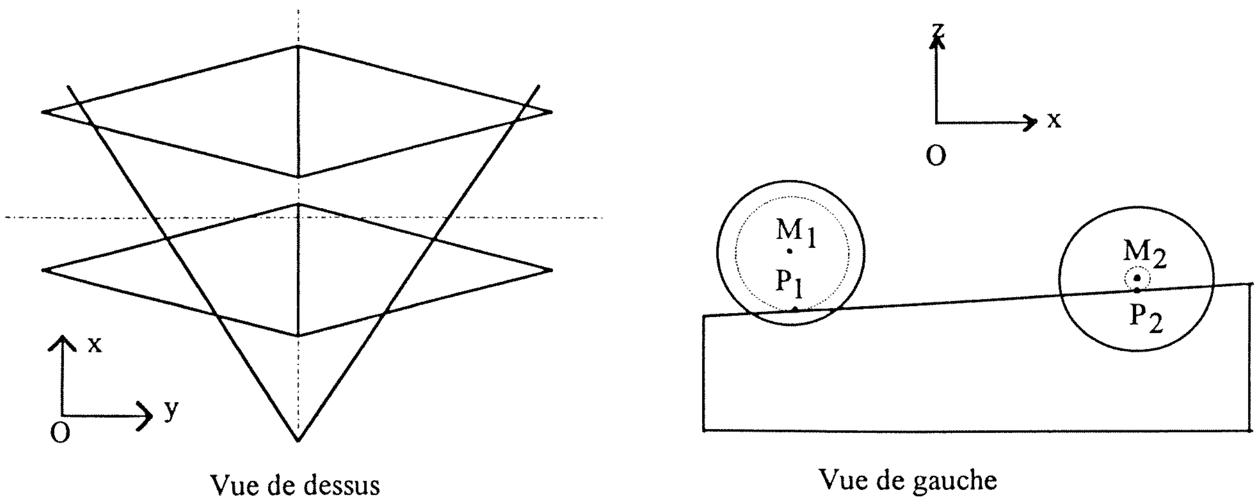


Figure 4

Les cotes des points M_1 et M_2, et donc du centre de gravité du solide (voir figure 5) sont données par les relations:

$$z_1 = M_1P_1 + z_0 \quad \text{et} \quad z_2 = M_2P_2 + P_2R + z_0$$

où z_0 représente une constante qui dépend du repère choisi, et qui s'éliminera dans la suite.

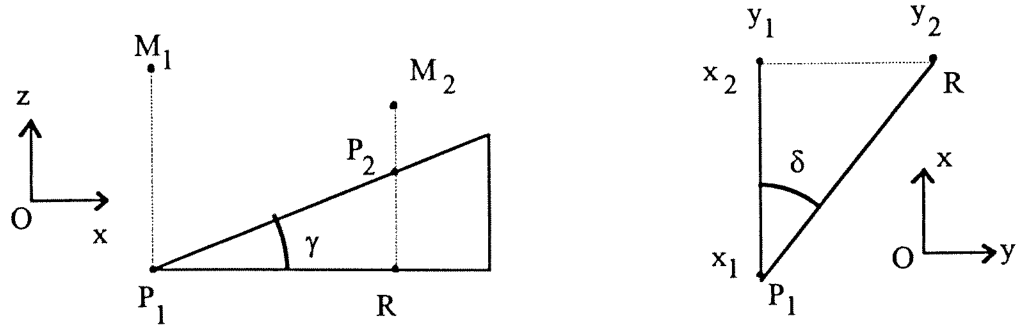


Figure 5

On obtient alors, compte tenu des diverses relations trigonométriques existant:

$$z_2 - z_1 = (y_2 - y_1)\left(\frac{\tan\gamma}{\sin\delta} - \tan\beta\right)$$

Le cône avance si, lorsque $y_2 - y_1 > 0$ (le cône s'est déplacé dans le sens de la montée), $z_2 - z_1 < 0$ (son centre de gravité descend). On obtient alors la condition recherchée pour que le cône "remonte" la pente:

$$\frac{\tan\gamma}{\sin\delta} - \tan\beta < 0$$

Si le cône est construit, l'angle β est fixé et on sait que $\sin\delta > 0$. Cette condition s'écrit alors:

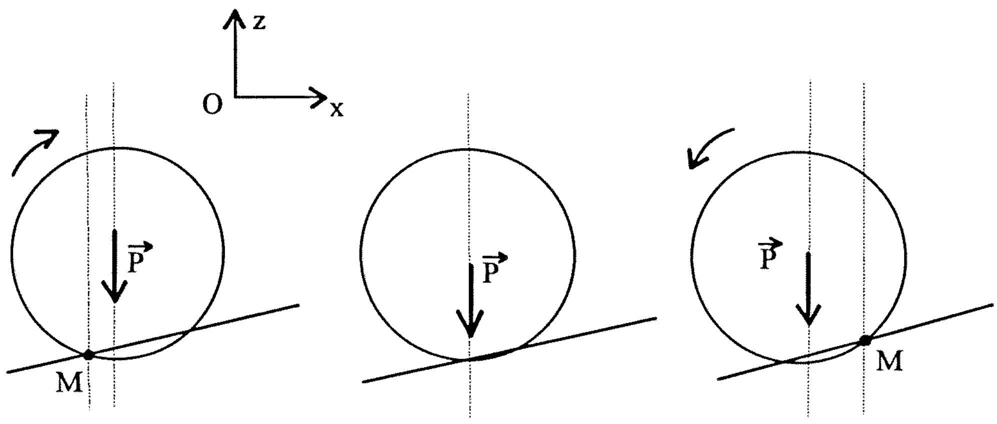
$$\tan\gamma < \sin\delta.\tan\beta$$

On peut vérifier la cohérence de la formule grâce aux remarques faites au début de l'article:

- Le cône étant fixé, si $\sin\delta$ augmente, donc si δ augmente (dans le cadre de notre problème), c'est à dire si l'angle d'ouverture de la pente augmente, l'angle γ peut augmenter. Ce qui se traduit par: plus l'ouverture de la pente est forte, plus le cône peut "remonter" une pente à déclivité élevée.

- L'angle de déclivité γ étant fixé, plus l'ouverture δ de la pente sera faible (δ petit), plus l'angle au sommet du cône devra être élevé (β grand). On peut remarquer que quelle que soit la valeur de δ, il existe un cône qui donnera l'impression de gravir une pente.

Cette solution qui n'utilise pas d'outils mathématiques évolués, mais qui demande une bonne vision dans l'espace, est inexacte si elle est présentée sous cette forme!! Elle a été rédigée par un mathématicien, qui savait qu'elle était fausse (!). En effet, si on observe le montage réalisé, il semble que le point de contact du demi bicône avec la déclivité (points P_1 ou P_2) n'est pas celui que l'on a supposé: il semble que ce point de contact ne soit pas sur la même verticale que l'axe du cône. A ce stade, il était difficile de déterminer la position exacte du point de contact sans faire appel à des notions de géométrie que personne n'avait envie de mettre en oeuvre.



Le bicône "monte" Position d'équilibre Le bicône descend

Figure 6

C'est alors que le physicien est venu au secours du mathématicien: si le cône roule, c'est qu'il est soumis à des forces qui le font avancer dans un sens ou dans l'autre. Faisons donc le bilan des forces qui s'exercent sur ce solide! Le cône est soumis à trois forces: le poids P et les réactions normales du plan incliné. Ces dernières n'interviennent pas dans la description du mouvement et leurs directions réelles sont difficiles à déterminer. C'est pourquoi on les a ommises sur la figure 6. Un solide qui est en mouvement de rotation est soumis à un couple de forces. L' axe instantané de rotation du solide est un axe dont la direction est Oy et qui passe par le point M cherché. Selon la position de cet axe par rapport à la verticale passant par le centre de gravité du solide, le cône ira dans un sens ou dans l'autre. En effet, le couple qui s'exerce change de sens suivant la position des points de contact par rapport à la verticale (voir figure 6). Sa valeur dépend de la distance entre les deux droites représentées en pointillés et du poids P. Cette figure est évidemment fausse puisqu'en vue de gauche, en faisant une coupe suivant un plan (O,x,z), on n'obtient pas un cercle. Le point de tangence ne correspond pas à celui du cercle qui est dessiné, mais il faut bien faire une figure compréhensible! Par conséquent, on en déduit également la position des points de contact si le cône est soumis à un couple nul (il n'avance pas et ne recule pas): ils se trouvent sur la verticale de l'axe du cône.

On peut donc reprendre le raisonnement mathématique développé ci-dessus en modifiant légèrement sa forme: on suppose que les angles sont tels qu'on se trouve dans le cas d'équilibre du cône.

Toutes les relations écrites sont donc vraies, et la conclusion se fait alors sous la forme suivante:

Comme le cône est en équilibre, quelles que soient les valeurs de y_1 et de y_2, $z_2 - z_1 = 0$. Il faut donc que le second terme du produit soit nul, et on aboutit à la relation d'égalité:

$$\tan\gamma = \sin\delta . \tan\beta$$

Il reste encore à vérifier que cette égalité se transforme bien en l'inégalité précédemment établie si on modifie un des paramètres pour se retrouver dans une position où le cône roule, ce qui est évident d'un point de vue physique, mais l'est moins d'un point de vue mathématique.

Il est également intéressant de remarquer que le raisonnement physique permet de justifier a posteriori la solution mathématique envisagée. La recherche mathématique du point de contact du cône avec la pente est ardue et a été évitée de cette façon.

La solution générale a été développée ci-dessus, mais on peut la rendre plus accessible à des élèves en fixant certains paramètres, par exemple en prenant $\delta = \frac{\pi}{4}$ et en fixant $\beta = \frac{\pi}{6}$. L'expérience montre qu'il est plus facile de réaliser des expériences avec un cône peu pointu, ce qui correspond à une valeur élevée de β.

CONCLUSION

Nous avons présenté deux problèmes issus de la physique, que nous estimons être motivants, et qui peuvent être traités par le professeur de mathématiques en collaboration avec son collègue physicien. Dans le premier cas, la décomposition du mouvement de la chute suivant les axes permet une résolution agréable du problème. Dans le deuxième cas, le concours du physicien est indispensable pour valider simplement la solution mathématique envisagée. Au travers de ces deux problèmes, nous avons essayé de faire sentir au lecteur que:

-il est possible de partir de problèmes issus de la physique pour utiliser de façon intéressante les outils mathématiques du programme. De plus c'est l'occasion d'expérimenter, conjecturer, établir une relation et vérifier sa validité.

-la physique peut aussi servir à développer une idée en mathématique. Très souvent, on n'envisage que les mathématiques au service de la physique, alors que la réciproque peut aussi être envisagée. Les échanges peuvent s'effectuer dans les deux sens!

Bien entendu, nous n'avons présenté qu'un des aspects des interactions possibles. D'autres champs d'investigations existent, tels les problèmes de notation, ou les progressions éventuelles à respecter pour utiliser les notions de chacune des matières de façon harmonisée. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive, et beaucoup d'idées sont encore en cours de développement...

Pour aller plus loin dans l'analyse mathématique du phénomène observé avec le bicône, le lecteur peut se reporter à l'article suivant de F. DOUE intitulé "le bicône sur ses deux demi-droites".

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

LE BICONE SUR SES DEUX DEMI-DROITES

Lorsque nous avons découvert le problème posé par un bicône roulant ou glissant sur deux demi-droites fixes, nous n'avons pas pu résister au plaisir d'en rechercher une solution **purement mathématique**. En particulier, nous avons cherché à décrire précisément le contact du bicône sur son support, à voir quelle est la trajectoire du centre (de symétrie) du bicône, puis, au cours d'un roulement sans glissement, à déterminer le nombre de tours effectués par le bicône en fonction du déplacement linéaire de son centre.

Accrochez-vous, il va falloir une bonne vision dans l'espace!

I. Etude géométrique Soit OA et OA' les deux demi-droites de même origine supportant le bicône et soit P le plan bissecteur de ces demi-droites. On supposera, pour respecter une certaine symétrie, que le cercle de base du bicône reste constamment dans P , si bien que P est un plan de symétrie de la figure.

Le problème *géométrique* du contact du bicône avec son support est indépendant du problème *dynamique* posé, c'est-à-dire du mouvement ou non du bicône. En particulier, toute la figure reste invariante lors d'une rotation autour d'un axe horizontal Oy perpendiculaire à P . Il semble donc préférable, pour décrire la position des deux demi-droites OA et OA' dans l'espace, d'adopter d'autres notations, plus intrinsèques. Donc :

Avertissement : Changement de notations!

On appelle γ le demi-angle formé par les deux demi-droites OA et OA' , mesuré dans le plan OAA' , et on repèrera par α l'angle de ce plan (mesuré autour de Oy) par rapport à un plan fixe xOy , par exemple (mais ce n'est pas nécessaire, cf ci-dessous) un plan horizontal. Si on appelle OB la (demi-)bissectrice des droites OA et OA' , α est l'angle de OB avec xOy.

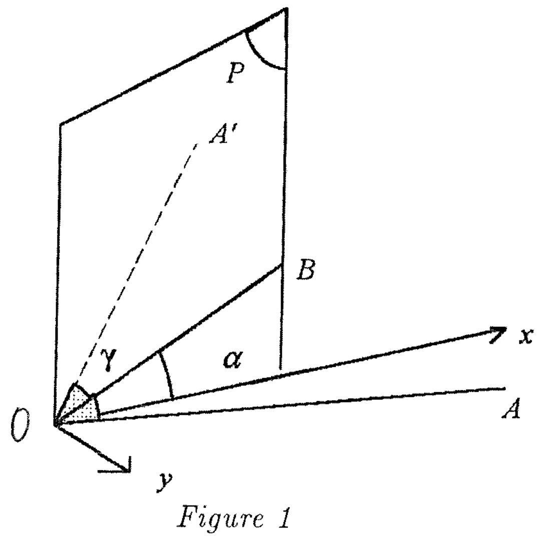


Figure 1

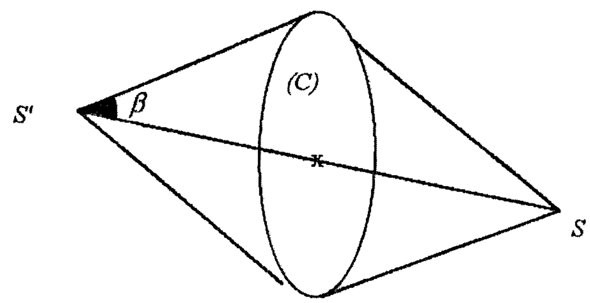


Figure 2

On désigne toujours par β le demi-angle au sommet des deux cônes; on appelle S et S' leurs deux sommets, et (C) leur cercle de base commun.

Dire que le bicône *repose* sur son support signifie que les droites OA et OA' sont tangentes aux deux cônes, c'est-à-dire sont contenues dans deux plans tangents. Appelons encore A et A' les points de contact de ces demi-droites avec les cônes. Vu notre hypothèse de symétrie, A et A' sont symétriques par rapport au plan bissecteur P , donc AA' est parallèle à l'axe SS' du bicône, et AA' coupe orthogonalement la bissectrice OB en B . Le plan tangent P_A en A contient la génératrice SA du cône et aussi la tangente au cercle de base (C) au point H d'intersection de celui-ci avec SA . Cette tangente en H est en fait l'intersection du plan tangent P_A avec le plan P , et comme O est aussi dans cette intersection, alors O est sur cette tangente en H, ou, autrement dit, OH est tangente au cercle (C).

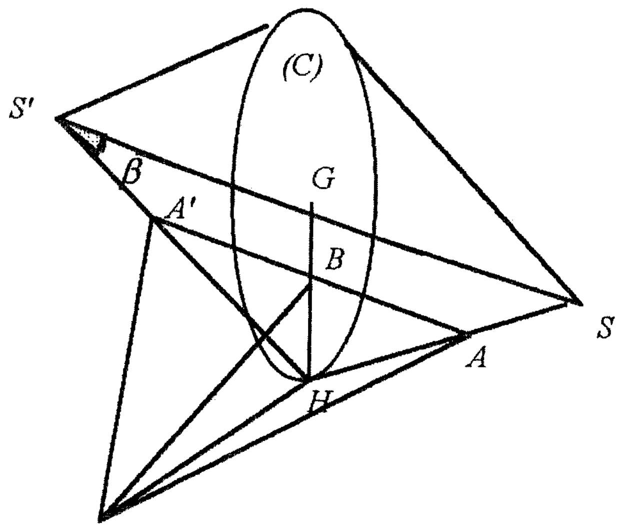


Figure 3

Or un plan tangent à un cône fait un angle constant avec l'axe du cône, donc ici le plan tangent P_A fait l'angle constant β avec la direction fixe SS' ou Oy . Comme de plus ce plan tangent contient la droite fixe OA , on en déduit que nécessairement ce plan reste fixe lors du déplacement du bicône. De même, le plan tangent $P_{A'}$ en A' reste fixe aussi, et donc leur intersection OH est une droite fixe aussi.
Soit α l'angle de OB avec OH . Nous venons de montrer que α est constant, c'est-à-dire ne dépend pas de la distance du bicône à O . Nous allons le retrouver en déterminant α en fonction de β et γ .
Il suffit pour cela de considérer le tétraèdre $OABH$, dont les faces sont toutes des triangles rectangles et où on retrouve β comme angle $\widehat{BAH}$ (car, puisque AA' est parallèle à SS' , $\widehat{BAH} = \widehat{S'SH}$). Des relations trigonométriques simples nous donnent :

$$BH = AB.\tan\beta$$
$$AB = OB\tan\gamma$$
$$BH = OB.\sin\alpha$$

On en déduit :

$$\sin\alpha = \tan\beta.\tan\gamma$$

On voit que cette relation exige que $\tan\beta.\tan\gamma \leq 1$. Ceci se conçoit bien, car si on appelle β' l'angle complémentaire de β , qui est l'angle des génératrices du cône avec le plan de base, cette relation équivaut à $\tan\gamma \leq \tan\beta'$, soit $2\gamma \leq 2\beta'$: l'angle des deux demi-droites du support doit être inférieur à l'angle de deux génératrices SH et $S'H$, sans quoi il n'y a pas de support possible, comme le montre la figure ci-dessous.
On peut aussi dire que cette relation traduit le fait que O se trouve nécessairement à l'extérieur du cercle de base (C) .

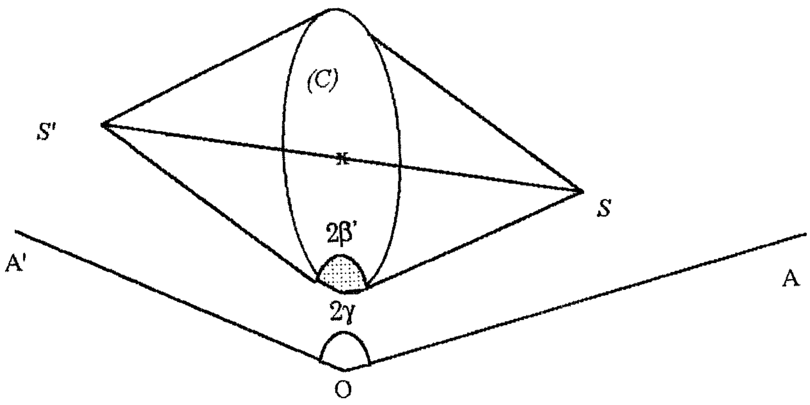


Figure 4

II. Etude statique et dynamique

Appelons α_0 l'angle du plan OAA' avec un plan horizontal xOy :
L'étude précédente a montré que la droite OH reste fixe lorsque le bicône glisse ou roule sur son support (à condition que son axe reste constamment perpendiculaire au plan bissecteur P). Donc le centre de gravité G décrit également une droite fixe, parallèle à OH , à la distance R de celle-ci, R étant le rayon du cercle de base (C) .
D'après les lois de la dynamique (théorème de l'énergie cinétique), le mouvement se fera dans le sens de la *descente* de G par rapport à un plan horizontal :

– si $\alpha < \alpha_0$ alors $\sin\alpha_0 > \tan\beta.\tan\gamma$, le bicône se rapprochera de O , ... sans intérêt!

– si $\alpha > \alpha_0$ alors $\sin\alpha_0 < \tan\beta.\tan\gamma$, le bicône s'éloignera de O , c'est-à-dire donnera l'impression de remonter la pente.

Et qu'en est-il si $\alpha = \alpha_0$? Le bicône est immobile, car en équilibre!
Etudions de plus près cet équilibre. Le poids $\vec{P}$ du bicône s'applique au centre G du cercle de base (C) . Les réactions du support s'appliquent en A et A' et équilibrent $\vec{P}$, elles sont donc nécessairement dans le plan vertical passant par G , soit le plan $SS'AA'$. De plus, à l'équilibre, ces réactions sont perpendiculaires à leur support respectif, donc, si elles ont bien une composante verticale $\overrightarrow{R_V}$ valant chacune $\vec{P}/2$, elles ont aussi une composante horizontale $\overrightarrow{R_H}$ et $\overrightarrow{R'_H}$ qui sont égales et opposées pour s'équilibrer entre elles. Ces forces de réaction $\overrightarrow{R_H}$ et $\overrightarrow{R'_H}$ rendent compte du fait que le poids du bicône a tendance à écarter les deux demi-droites OA et OA' , et donc que la rigidité en O produit cette réaction inverse.

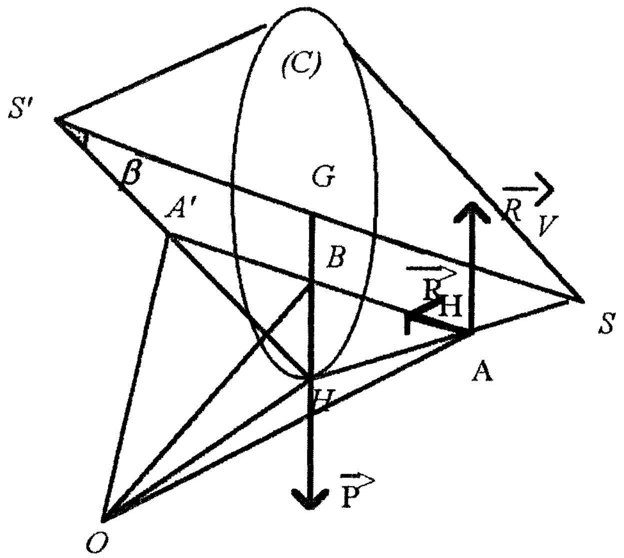


Figure 5

Revenons au cas où $\alpha > \alpha_0$, et où, donc, le bicône s'éloigne de O . L'angle de descente du point G est $\delta = \alpha - \alpha_0$, il se retrouve comme angle entre la verticale et les droites parallèles GH , $\vee A$, $\vee' A'$. On voit alors (cf figure) que la force $\vec{P}$ précédente a un moment non nul par rapport à l'axe AA' . Ce moment est moteur et a tendance à faire tourner le bicône en "remontant la pente". Remarquons toutefois que ce moment vaut $P \times r \times \sin\delta$, et comme r diminue au fur et à mesure que le bicône avance, ce moment diminue de plus en plus.

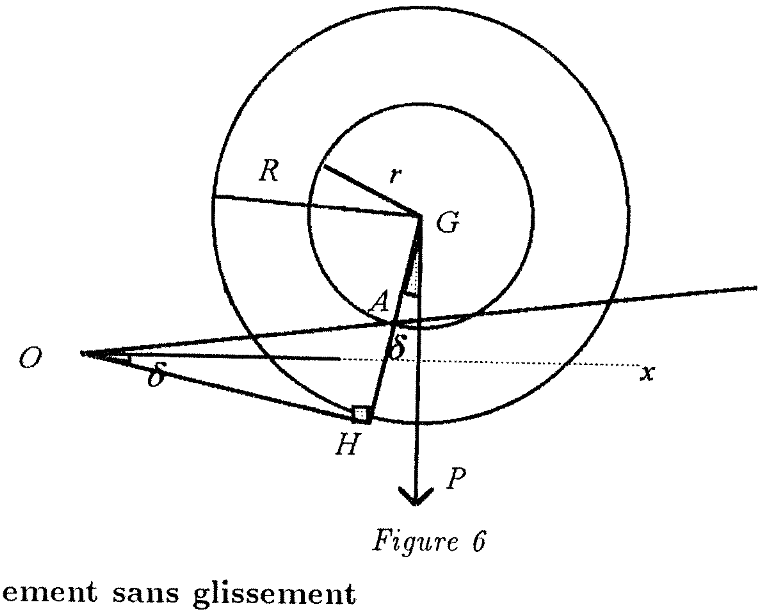


Figure 6

III. Roulement sans glissement

Supposons que le bicône roule sans glisser sur son support : quelle est alors la relation entre le déplacement du point G et l'angle de rotation effectué lors du roulement ?

Prenons la droite OH précédente comme axe Ox , et soit x l'abscisse du point G , θ l'angle, compté positivement, de rotation du bicône. La relation de roulement sans glissement se traduit par $\frac{dx}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$, soit encore, en considérant que x est une fonction de θ , $\frac{dx}{d\theta} = r$ (r représente le rayon du petit cercle parallèle sur lequel s'appuie le bicône). Et on a les relations (cf la figure 2 du **I.**) :

$$r = R - BA.\tan\beta$$
$$BA = OB\tan\gamma$$
$$x = OH = OB.\cos\alpha$$

Compte tenu de la relation $\sin\alpha = \tan\beta.\tan\gamma$, on en déduit finalement $r = R - x\tan\alpha = \frac{dx}{d\theta}$, d'où $x = R(\text{cotan}\,\alpha)(1 - e^{-\tan\alpha.\theta})$. Si nous appelons ℓ la longueur maximale que peut parcourir le bicône (jusqu'à ce que les points A et A' coïncident avec ses sommets S et S'), il vient $\frac{R}{\ell} = \tan\alpha$, d'où une autre expression de x :

$$x = \ell(1 - e^{-\frac{R}{\ell}\theta})$$

Cette expression montre que ℓ n'est qu'une valeur limite de x quand θ tend vers $+\infty$. Donc, si le bicône atteint effectivement le bout de son support, c'est qu'il finit nécessairement par glisser!

Cette relation permet aussi de tracer la roulante, c'est-à-dire l'ensemble des points du bicône qui viennent en contact avec les demi-droites du support au cours du roulement. Ces roulantes (une par cône) sont des loxodromies, c'est-à-dire qu'elles coupent les génératrices du cône suivant un angle constant. Cela se voit par le fait qu'au cours du roulement, la tangente à la roulante au point A de contact coïncide avec la tangente en A au support, c'est-à-dire la droite OA , or OA fait un angle constant avec la génératrice SH à tout instant.
La figure 7 tente de rendre compte du mouvement de roulement du bicône sur son support.

IV. Cas d'un bicône à facettes

Pour les plus courageux, nous suggérons de reprendre le problème en remplaçant le cercle de base par un polygône régulier à N côtés. On verra apparaître alors une suite géométrique traduisant la relation entre la progression x_n de G et l'angle $\theta_n = \frac{2\pi n}{N}$ de rotation du bicône.
Affaire à suivre, donc!

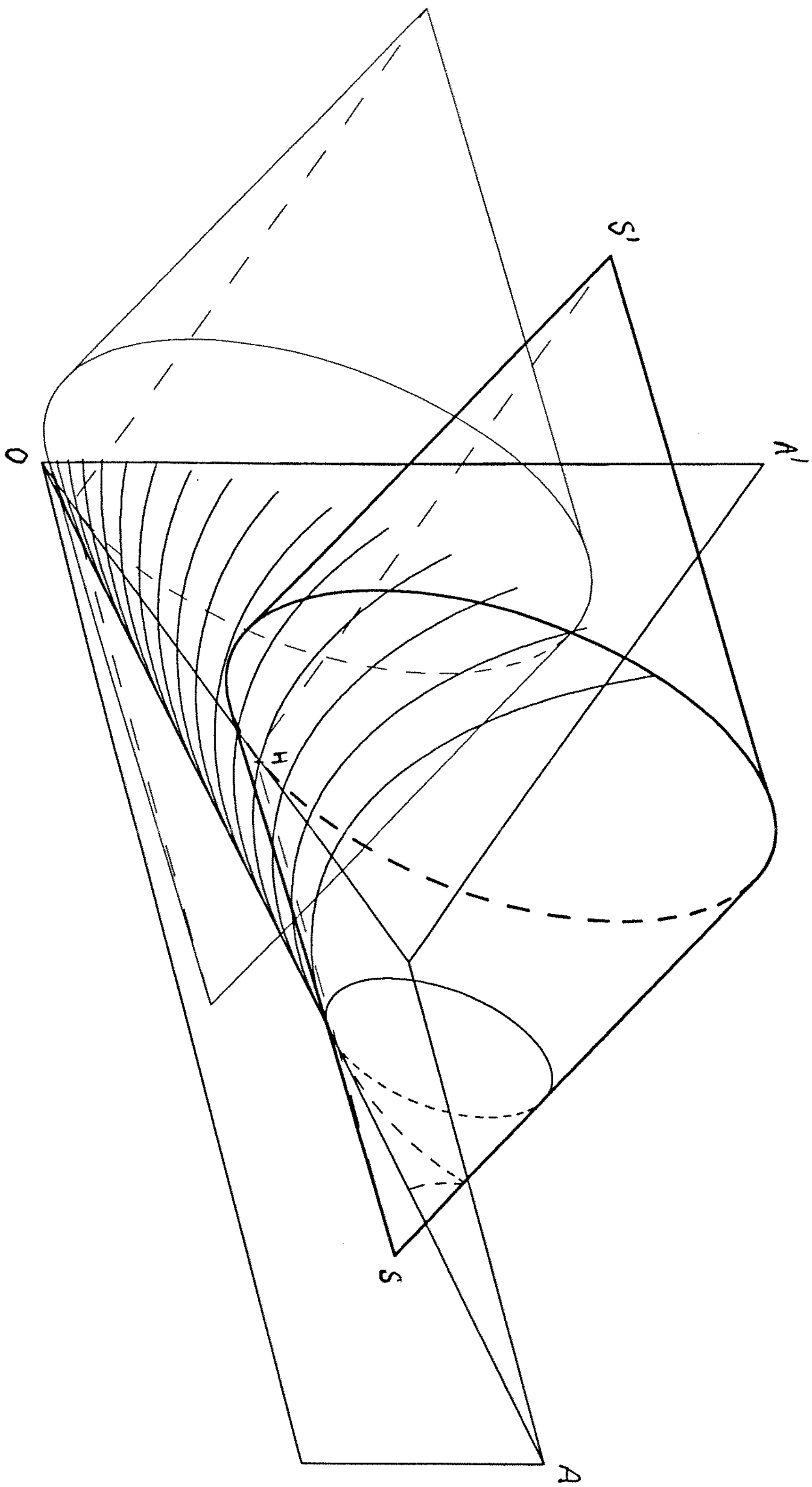


Figure 7