
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
N° SPÉCIAL – SEPTEMBRE 1994

I.S.S.N. 0290 - 0068



Georges REEB

En hommage à Georges Reeb

Georges Reeb est mort il y a un an, le 6 novembre 1993. Le hasard veut que quelques mois auparavant R. Cabassut avait entrepris pour '*L'Ouvert*' une série d'entretiens avec lui, qui devaient démarrer une rubrique régulière présentant des interviews de mathématiciens. Georges Reeb n'eut pas le temps de corriger la retranscription de ses paroles que nous vous livrons donc tel qu'il s'est exprimé : simplement, avec humour et bon sens, ainsi qu'il le faisait volontiers avec ses interlocuteurs, collègues ou étudiants. Plusieurs ont voulu témoigner de leur dette envers Georges Reeb, nous vous présentons ici leurs articles. D'autres comme Claude Godbillon et Jean Martinet trop tôt disparus, et qui avaient travaillé étroitement avec lui, auraient certainement eu à cœur d'évoquer leur collaboration.

Si ses premiers travaux portant sur les feuilletages sont unanimement reconnus, il n'en est pas de même de sa prise de position quasi militante en faveur de l'Analyse non standard. Mais quelle que soit l'opinion que l'on peut avoir à ce sujet, quant à sa pertinence ou non, quant à son caractère novateur ou non, ces divers témoignages révèlent avant tout la personnalité d'un accoucheur d'esprits à la manière d'un Socrate, hors des modes et des idéologies dominantes. Et c'est cette image là que nous voulons retenir d'abord, dans nos mémoires.

J.-P. FRIEDELMEYER.

SOMMAIRE

N° SPÉCIAL G. REEB – 1994

◇ <i>Le parcours d'un mathématicien</i> , par G. REEB	1
◇ <i>L'Institut de Mathématiques d'Oberwolfach</i> ,	7
◇ <i>Comment j'ai connu et compris Georges Reeb</i> , par J. HARTHONG	8
◇ <i>Un maître</i> , par J.-M. SALANSKIS	25
◇ <i>G. Reeb et l'UPR "Fondements des sciences"</i> , par H. BARREAU	33
◇ <i>Intuitionnisme 84</i> , par J. HARTHONG et G. REEB	42
◇ <i>Reeb : mémoires informatiques</i> , par J.-P. REVEILLÈS	78
◇ <i>La saga du bon maître Reeb</i> , par R. LUTZ	84
◇ <i>Les feuilletages de Reeb : comment G. Reeb à la suite de son maître C. Ehresmann a assis solidement les fondements de la théorie des feuilletages</i> , par G. HECTOR	93

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix de ce numéro spécial* : 50.– F (+ frais de port).

LE PARCOURS D'UN MATHÉMATICIEN :

Georges REEB

Les mathématiques et un certain sens de la pratique

Les mathématiques, j'ai toujours aimé ça. Mon père qui était tonnelier me faisait faire du calcul mental très fréquemment, plus exactement je lui demandais de m'en faire faire. Chez moi, les mathématiques et un certain sens de la pratique ça allait de pair. Je me souviens très bien en classe de quatrième le professeur avait posé un problème concernant la roue d'un char cerclée par un forgeron. Il avait donné toutes les dimensions, la densité du métal, le prix du métal etc et il fallait calculer le prix du cerceau. Pour moi il était clair, parce que j'avais vu des charrons à l'œuvre, que le cerceau était un parallélépipède rectangle qu'on repliait pour en faire un cerceau. Par conséquent j'ai calculé son volume de cette manière. Il est clair qu'à peu près la totalité de la classe avait procédé en calculant la différence de volume des deux cylindres qui limitent le cerceau. Et le professeur qui évidemment avait donné ce problème en application des calculs de volumes de cylindres a été amusé de trouver une autre version et ne m'a pas pénalisé, mais pas non plus félicité.

Ça m'a toujours plu les mathématiques dans leur relation avec la pratique et mon parcours était jalonné de quelques petites trouvailles. Une trouvaille dont j'ai été fier était située au niveau du certificat de mécanique rationnelle (niveau maîtrise actuelle) où a été posé le problème suivant : vous considérez un vase de forme assez arbitraire mais qui ressemble à un vase. Le centre de gravité de ce vase, considéré comme solide, était supposé relativement bas, et on versait de l'eau dans le vase. Il s'agissait de montrer que, au moment où le centre de gravité du système "vase plus eau" se trouvait dans le plan d'affleurement de l'eau, ce centre de gravité était le plus bas possible, c'est-à-dire qu'à partir de ce moment, qu'on ajoute de l'eau ou qu'on retranche de l'eau, le centre de gravité monte. Je me souviens qu'à l'époque la plupart des étudiants avaient traité le problème à coup d'intégrales doubles, triples, etc, de théorèmes plus ou moins complexes alors que la solution est évidente. Vous supposez que le centre de gravité se situe dans la surface d'affleurement. Si vous ajoutez une tranche de liquide c'est tout à fait évident, par composition des centres de gravité ça monte. Si vous en enlevez il y a une petite histoire de signes mais le même raisonnement qui marche à la montée marche à la descente. Disons qu'il faut réfléchir un tout petit peu plus pour ne pas s'emmêler dans les signes. Disons que c'est du niveau du primaire. Pour moi j'ai été un peu étonné quand même de me rendre compte que de tels raisonnements très simples venaient assez peu souvent à l'esprit des gens. Par ailleurs je n'avais pas de réussite particulière dans les petites devinettes qu'on pose quelquefois et exerçant une certaine observation mathématique. Très souvent je me fichais dedans comme tout un chacun.

Le choix des mathématiques comme études

C'est la façon la plus simple de s'en sortir techniquement dans les études. D'une certaine manière ce sont les études qui coûtent le moins cher, que l'on peut faire en étant éventuellement un peu éloigné du lieu d'étude. Comme j'aimais ça et que je n'y trouvais que des avantages, je me suis lancé là-dedans. J'ai choisi les mathématiques par envie, parce que ça s'accordait avec ma vie. C'était en 1939. L'environnement particulier imposait des contraintes et pour moi il s'est trouvé que ces contraintes s'accordaient bien avec les mathématiques. En tant qu'étudiant, l'enseignement était fait par des gens qui appartenaient de près ou de loin au groupe Bourbaki. J'ai donc été élevé au biberon bourbakiste. J'ai beaucoup aimé cela. Je ne serai certainement jamais efficace comme formaliste mais j'ai beaucoup d'admiration pour le formalisme et encore plus d'admiration pour ceux qui savent le manipuler. J'ai toujours été choqué par le fait que des mathématiciens ne s'intéressent pas au débat entre intuitionnistes et formalistes. Mais j'ai considéré qu'il n'était pas important de prendre une option dans un tel débat. Je n'irai certainement pas dire que je suis intuitionniste, encore moins formaliste. Je ne peux pas évoquer cette époque, sans songer à Jacques Feldbau. Sur la porte d'entrée de la bibliothèque de l'Institut de mathématiques de Strasbourg on lit "salle Jacques Feldbau". Feldbau était un nom juif, assez répandu en Alsace à l'époque. Malheureusement Feldbau a connu le sort des juifs à l'époque : il est mort en déportation dans des conditions dramatiques. C'était un très chic type, un Monsieur très bien et qui avait déjà en cours une thèse avec Ehresmann, une thèse qui certainement serait devenue un travail important si Feldbau avait pu l'achever.

La recherche : l'influence déterminante de Ehresmann

A l'époque le mot "recherche" était encore un mot qu'on ne prononçait pas à la légère. Un jeune homme ou une jeune fille ne déclarait jamais : "je vais faire de la recherche" (pour autant déjà qu'on savait que ça existe). On considérait que c'était réservé à une élite tout à fait restreinte. On n'avait pas soi-même qualité à parler de faire de la recherche. La seule chose qui pouvait arriver, c'était que quelqu'un dise "on vous oriente là-dedans". J'ai fait ma licence etc en même temps que j'étais pion, maître d'internat, les deux choses s'accordaient bien ensemble. Le tout s'est soldé par le fait que j'ai été nommé professeur du secondaire, sans difficulté particulière, sans brio particulier non plus. Toute cette partie était auvergnate. Je suis retourné en Alsace après la libération. Là, grâce à mon patron Ehresmann, j'ai été boursier du CNRS avec un salaire de famine.

J'aurais dû commencer à enseigner comme professeur. Mais j'ai quand même fini par accepter ce poste au CNRS. Quelquefois des patrons recherchent des élèves. En fait, Ehresmann avait obtenu à Strasbourg la première chaire de topologie créée en France, mais était replié à Clermont-Ferrand à cause de la guerre. Il s'est trouvé que j'ai été auditeur de cet enseignement de topologie, qui se situait au niveau du DEA actuel. Ehresmann m'a donc entraîné sur cette voie. Maintenant

je n'en tirerai pas la vanité de dire que c'était parce que j'étais réellement brillant. Il trouvait que je faisais du bon boulot. Et comme il avait tout à fait envie d'avoir des étudiants j'ai pu suivre cette carrière.

Ehresmann m'a enseigné la communication : écouter, parler, ne jamais se taire. Aujourd'hui il est difficile de trouver des personnes qui disent des choses que vous pourriez écouter et d'autres qui écoutent ce que vous pouvez raconter. Avec Ehresmann on était trois ou quatre amis auvergnats qui le fréquentions de façon assidue. Il y avait un jour de la semaine où on se rendait chez lui. On sonnait à la porte. La bonne venait ouvrir et nous reconnaissait. Elle nous catapultait d'office dans son bureau. Et comme on venait par le train relativement tôt le patron n'avait pas encore déjeuné. On savait qu'il fallait attendre un peu. Assez vite on le voyait. Puis alors pendant deux heures, trois heures ça parlait, ça parlait, ça parlait. Il avait une capacité d'écoute extraordinaire, pourvu qu'on lui raconte quelque chose.

La carrière de chercheur

Ehresmann m'a communiqué le sujet qui allait être celui de ma thèse, les variétés feuilletées. La description la plus simple est de dire que c'est une pâte feuilletée, comme son nom l'indique. Ce sujet était excellent. La rencontre a été bonne. Ça m'a inspiré. Ma thèse est de 48. Le sujet a fait une belle carrière. Des centaines et des centaines de papiers. Et d'autre part une université californienne a pour motif décoratif une sculpture sur ce qui est appelé feuilletage de Reeb. La réussite, c'est celle d'Ehresmann d'avoir proposé ce sujet.

J'ai fait bien des voyages, je suis passé à Princeton par exemple. Mais je dirais que le voyage le plus intéressant s'est fait à 50 km d'ici. A cette époque fonctionnait en Forêt Noire et fonctionne toujours le fameux Institut de recherche d'Oberwolfach. A l'époque c'était un lieu de rencontre tout à fait extraordinaire. C'était quelque peu postérieur à la Libération. Presque tous les mathématiciens de quelque importance sont passés par là, à cette époque. Il s'est trouvé que j'ai eu la veine de pouvoir séjourner à Oberwolfach pendant presque une année, de dormir dans la bibliothèque et j'ai donc eu la possibilité inouïe de rencontrer des chercheurs de tous bords. Parmi les personnages marquants de l'époque il y avait sans aucun doute de Rham, Heinz Hopf et bien d'autres... je parle de topologues. Cette façon de faire la louange d'Oberwolfach ne doit pas faire oublier que Strasbourg aussi était un centre d'un grand intérêt ; grâce à Ehresmann on a vu défiler à Strasbourg des gens tout à fait remarquables. Mais Oberwolfach, du fait de son isolement dans la forêt, est un endroit où ceux qui y sont ont au moins le temps d'écouter sinon l'envie de le faire.

Puis j'ai été nommé à Clermont-Ferrand en 1953, puis Grenoble et Strasbourg en 1963. J'ai commencé à enseigner. Je ne revendique certainement pas d'avoir été un bon prof. Mon ami Aimé Fuchs, lui, avait une réputation d'enseignant parfait. Il avait un truc : il préparait ses cours. Je revendique de n'avoir jamais reculé devant un enseignement nouveau à faire. Par exemple à une époque où les enseignements de statistiques étaient très peu répandus en France, à Clermont-

LE PARCOURS D'UN MATHÉMATICIEN :

Ferrand, j'ai flairé le vent et je me suis lancé dedans sans aucune compétence et je crois que j'ai rudement bien fait. Je n'ai jamais reculé devant l'idée d'enseigner quelque chose de nouveau et je ne me suis jamais posé la question de savoir si j'étais compétent ou non. Je crois que ça a été profitable pour moi et pour les auditeurs. J'attachais aussi une grande place aux choses extérieures aux mathématiques : savoir pourquoi on fait telle ou telle chose. Pour revenir aux probabilités et aux statistiques, à vrai dire la théorie mathématique des probabilités, je m'en fiche. Si je rencontre un Monsieur qui me dit : "si j'avais quelques ingénieurs qui sachent faire un peu de contrôle de la qualité, alors ma boîte s'en porterait peut-être mieux", ça m'intéresse. C'était un argument pour me mettre dans cet enseignement que je faisais à la Bourbaki. Il y a une deuxième revendication. Je pense que j'ai toujours essayé de provoquer chez les autres la réflexion personnelle quel que soit le niveau auquel se situe l'enseignement. J'ai l'impression que cet aspect de mon enseignement a été réussi. Avec cette méthode là j'ai évidemment fait des bides extraordinaires. Je n'en regrette aucun. Sans aucun doute la partie recherche était essentielle mais j'ai toujours adoré enseigner.

J'ai été candidat à l'agrégation mais j'ai toujours été collé avec brio, étant toujours très nettement au-dessous de la barre. Il y a une chose qui me préoccupait beaucoup, c'était le sort des étudiants en universités, en mathématiques qui avaient des qualités manifestes et qui devaient aborder l'agrégation dans des conditions absolument pénibles à l'époque et j'ai toujours gueulé contre ce qui me paraissait une injustice : avoir d'un côté l'Ecole Normale avec les conditions les meilleures possibles pour aborder le concours et la situation tout à fait déficiente dans laquelle se trouvaient nos étudiants. Les choses ont beaucoup changé d'ailleurs depuis.

La rencontre avec l'analyse non-standard

Leibniz voulait faire du calcul infinitésimal. On peut se demander, malgré la nostalgie des infinitésimaux introduits par Leibniz, pourquoi on a abandonné les infinitésimaux? On distinguerait deux types de réponses. On a abandonné la notion parce qu'elle est contradictoire : on tombe très vite sur des cercles vicieux. Une deuxième réponse est que de toute façon ce que propose la mathématique actuelle est tellement bon dans sa construction qu'il n'y a plus de raisons de chercher une autre issue. Robinson nous a dit : le cercle vicieux que vous croyez voir dans la notion d'infinitésimaux est simplement une erreur de votre part. Les mathématiciens auraient pu convaincre Robinson qu'il se trompe dans son argumentation. Ils ne l'ont pas fait, non parce qu'ils ont cherché à le détromper mais parce qu'ils ont dit : nous savons d'avance que vous êtes dans l'erreur. C'est exactement le procès fait à Galilée. Pourquoi les idées de Leibniz ont-elles été ressenties comme contradictoires et pourquoi a-t-on eu tort de penser qu'elles étaient contradictoires? Leibniz définit un réel infinitésimal positif ε comme un réel tel que pour tout réel **connu** positif x on a $\varepsilon < x$ (ndlr : dans cette définition ε est considéré comme un réel inconnu). Supposons qu'il existe des infinitésimaux et on va montrer qu'on aboutit à une contradiction. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des infinitésimaux. Il n'est pas vide à cause de l'hypothèse qu'il

existe des infinitésimaux. Il est majoré par exemple par un. Donc $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure appelée α . Mais alors $\alpha/2$ sera aussi un majorant de $\mathcal{E}$. D'où la contradiction. En fait si on suit les règles de Bourbaki il n'y a aucun moyen de montrer que $\mathcal{E}$ est un ensemble. D'où la contradiction est levée. Dieudonné a regardé dans le livre de Robinson comment il définit un infinitésimal. Et Robinson le définit par une construction bourbachique complexe. Effectivement Dieudonné a tout de suite pigé que Robinson ne se trompait pas. Par contre Dieudonné a dit que le travail de Robinson pouvait être inséré dans l'ouvrage de Bourbaki comme sous-chapitre de la topologie, dans la rubrique filtre, sous la rubrique ultra-produit. De plus Cartier, membre du groupe Bourbaki, a fait un exposé Bourbaki sur l'analyse non standard et continue à suivre cette affaire avec des vues saines sur cette situation là. Dieudonné ne s'est pas intéressé davantage à l'analyse non standard mais n'a jamais eu un propos malheureux pour l'analyse de Robinson.

Dans la bibliothèque de l'institut de math j'ai mis le nez sur le livre de Robinson "Non standard analysis" dont j'avais vaguement entendu parlé. J'ai ouvert ce livre, évidemment je n'ai pas commencé par le lire à partir de la page 1, car pour moi il était évident que de toute façon je n'y comprendrai rien; j'ai commencé à la page 51, comme le conseillait Robinson : instantanément j'ai vu que Robinson avait raison et que c'est ce genre de mathématiques qu'il fallait faire. Un quart d'heure après avoir eu le livre en main, j'ai écrit dans ma tête les 200 pages suivantes.

Après ma découverte du livre de Robinson, j'ai voulu en parler autour de moi et j'ai eu les plus grandes surprises de ma vie. D'abord j'ai rencontré beaucoup de gens qui m'ont menti, ce que je ne savais pas à l'époque. Beaucoup de gens m'ont dit qu'ils n'avaient jamais entendu parler de ça. En fait ils m'ont menti : ils avaient écouté des enseignements donnés par Robinson à Paris et en avaient conclu que c'était de la fadaise. Mais comme ils me voyaient dans cet état enthousiaste, ils se sont dits : "Reeb est en train de se casser la figure, surtout ne faisons rien pour lui éviter la chute".

Ils ont refusé absolument toute communication sur le sujet. D'une certaine manière ce sont de très mauvais mathématiciens : ils ont le sentiment d'avoir très bien compris le système formel dans lequel ils se déplacent et sont totalement incapables de discerner un faux raisonnement de cette nature là (ndlr : du type de celui qu'on objecte à l'analyse non-standard). Depuis, quand même, l'histoire s'est un peu plus diffusée et on commence à être un peu prudent. Il y a vingt ans ils étaient incapables de voir que ce raisonnement est fallacieux. S'ils avaient bien compris le système formel dans lequel ils travaillent ils auraient immédiatement dits "mais d'après les règles de Bourbaki, je vois nulle part une raison de donner à $\mathcal{E}$ le qualificatif d'ensemble". J'ai rencontré des personnes qui avaient compris. J'ai exposé le slogan "les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ " (c'est-à-dire il existe des entiers non standards) à des gens dont j'attendais une réaction intéressante. Tout d'abord les deux tiers avaient les réactions habituelles des mathématiciens. De plus ce n'est pas parce qu'on parle de cette question à un bonhomme que le Monsieur aura le temps de réfléchir à ça ou d'être un peu intéressé. Maintenant j'ai rencontré

LE PARCOURS D'UN MATHÉMATICIEN :

une catégorie d'individus qui ont parfaitement compris. Dans cette catégorie je citerai Lichnerowicz, de Rham, Choquet, l'anglais Stewart. Ces personnes qui sont de grands mathématiciens ont toutes les qualités du scientifique c'est-à-dire qu'aucune ne considère qu'elle a apporté le moindre seau d'eau au moulin. Ces personnes se sont donc mises à l'arrière plan et n'ont pas posé la question car elles ont estimé simplement que ce n'était pas leur rôle de le faire. Elles n'avaient pas à ouvrir la bouche sur un sujet où elles n'étaient pour rien et où de toute façon leurs autres préoccupations ne leur donnaient pas de temps.

Ensuite, il y a eu des personnes comme Whitney, américain très connu en topologie, à l'esprit très fin. J'ai eu l'occasion d'en parler à Whitney et je suis tombé sur un mur, l'homme qui n'était plus capable, qui avait vieilli. Mon patron Ehresmann, dont j'avais attendu beaucoup, avec toute la déférence que je lui dois, était aussi presque dans cette catégorie. Il n'a plus été apte à m'écouter. Enfin il y a eu les ennemis manifestes... Je pense que certains mathématiciens m'ont reproché d'avoir popularisé un truc qui était réservé à une élite.

J'en ai parlé à des jeunes et il s'est constitué une équipe qui a fait parler d'elle. Je n'ai pratiquement pas publié moi-même. J'ai donné l'occasion à des tas de jeunes de s'exprimer sans m'être mis en travers de leur expression par des choses que j'aurais publiées moi-même. En publiant moi-même j'imprimais certainement un style qui aurait pu les gêner.

Aujourd'hui, un des domaines où l'apport de l'analyse non standard est évident est la liaison entre le discret et le continu. L'exemple le plus typique à notre époque est l'ordinateur. Par exemple, sur l'écran on a un damier discontinu de pixels et on veut faire croire qu'on a des images continues. Pour parler de l'écran on utilise la géométrie de Descartes : c'est mettre un casque rond sur une tête carrée. Or la mathématique non standard c'est exactement le langage qu'il faut pour parler de l'écran comme d'un vrai plan euclidien. Je pense que les applications de la mathématique non standard dans ce domaine ont un avenir considérable et qu'il n'en est qu'à son début.

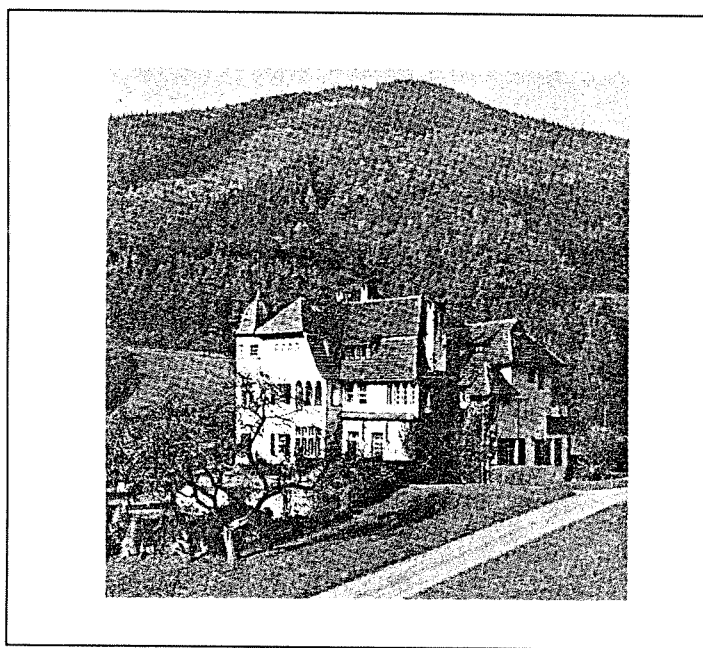
L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES D'OBERWOLFACH

L'Institut de mathématiques d'Oberwolfach (*) est situé dans une vallée paisible de la Forêt Noire, à 60 km au Nord-Est de Fribourg, à l'écart de toute agglomération.

L'institut a été fondé en 1944 par W. Süss, professeur de mathématiques à l'Université de Fribourg. Henri Cartan fut le premier conférencier à donner une conférence dans une langue non germanique le 11 novembre 1946.

Actuellement, plus de cinquante colloques sont organisés chaque année avec environ 2500 participants venant de tous les pays (plus de 50 % d'étrangers).

En mai 1983, Gerd Faltings présentait pour la première fois sa preuve de la conjecture de Tate.



(*) Extrait de la "*Gazette des mathématiciens*", n° 53 (juin 1992), par Micheline Vigué.

COMMENT J'AI CONNU ET COMPRIS GEORGES REEB

Jacques HARTHONG

Professeur à l'E.N.S.P.S. (*)

J'ai vu Georges Reeb pour la première fois lorsque j'ai été recruté par l'U.L.P. donc en 1972; cela implique en particulier que je n'avais pas suivi ses cours lorsque j'étais étudiant. Mais je n'avais rien à faire avec lui, il faisait partie du personnel enseignant, c'est tout. Je n'avais pas l'intention de m'intégrer dans son groupe de recherches. L'image qu'on avait de lui dans le milieu (celui du département de mathématique) était celle d'un vieux prof, plutôt conservateur, alsacien, et en tout cas en attente de partir à la retraite. Quand on me parlait de lui, on rapportait que son idée fixe était "qu'il était contre les normaliens", et que les professeurs étaient pratiquement tous normaliens, excepté lui. Je raconte tout cela parce que c'était l'image qu'on avait de lui dans ce milieu, mais je n'étais pas concerné; je ne lui devais rien, je ne travaillais pas avec lui, et je ne le connaissais pas. Cette histoire de normaliens était amusante, mais je n'en aurais pas fait une cause. En dehors de son propre groupe de recherche, on ne racontait pas qu'il était connu pour ses travaux sur les feuilletages, mais cela fait partie des usages de ce milieu: chaque clan vénère un ou plusieurs gourous, mais la communication entre clans différents est limitée, par convention tacite, aux petits commérages et aux questions administratives; on ne parle pas de sujets scientifiques qui sont la spécialité d'un autre clan que le sien, cela "ne se fait pas", et de toute façon, on n'y connaît rien. Par ailleurs, à cette époque les clivages politiques étaient très marqués. Aujourd'hui on pense que tous les politiciens sont également médiocres et interchangeables. Cela était différent à cette époque: les gens de gauche pensaient que la droite était un ramassis de vieux notables encroûtés ou corrompus, et les gens de droite que la gauche était formée de dangereux révolutionnaires. Les jeunes mathématiciens étaient pratiquement tous de gauche. Je n'ai pas souvent discuté de politique avec Georges, mais aujourd'hui que je le connais, je pense qu'il devait se considérer lui-même comme "centriste", c'est-à-dire le juste milieu entre les notables encroûtés et les dangereux révolutionnaires. Or à gauche, on disait qu'on reconnaissait un homme de droite précisément au fait qu'il se dit centriste (l'extrême droite n'existait pratiquement pas).

Cette description du climat de l'époque a, comme vous allez le voir, une certaine importance pour comprendre la relation privilégiée que j'ai eue avec Georges. Moi, j'étais communiste.

(*) Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg.

Ceux qui l'aimaient bien, généralement des gens du même clan que lui, celui des "géomètres", en disaient plutôt du bien, ils mettaient en avant qu'il était tolérant, et qu'en tant que mathématicien, il avait fait ses preuves; bien sûr il avait ses petites manies. Ceux qui ne l'aimaient pas, soit pour des raisons de rivalité professionnelle, soit par simple antipathie spontanée, mettaient en avant qu'il était un mandarin conservateur, ou, s'ils étaient eux-mêmes conservateurs, qu'il était vieux et complètement dépassé.

Voilà donc la palette de préjugés qui était disponible sur le marché, et qui m'était offerte avant même de lui avoir parlé pour la première fois. Après environ une année passée dans ce microcosme, je commençais à avoir un contact plus concret avec les gens. J'ai pu voir Georges de près pour la première fois à une réunion où il est intervenu; j'ai tout oublié de cette intervention, sauf qu'il y était effectivement question de "la mafia" (la mafia était dans son langage celle des normaliens). Il devait probablement s'agir de recruter quelqu'un, et on devait avoir une fois de plus "écarté" la candidature d'un type très valable au profit d'un normalien (attention, je vous arrête tout de suite: je raconte ce que j'ai vu et entendu, c'est tout; ne m'attribuez pas une opinion sur cette question: il est bien clair que le normalien devait être tout aussi valable, et je me moque éperdument de savoir si on avait eu raison ou tort de recruter *X* plutôt que *Y*). Mes souvenirs d'aujourd'hui sont aussi vagues que mon intérêt d'alors pour le problème; mais ce que je veux montrer, c'est que l'une des idées fixes attribuées au vieux prof se manifestait là, conformément aux dires. J'en ai aussi entendu d'autres. Il avait ainsi confié à plusieurs jeunes collègues nouvellement recrutés des conseils du genre suivant: "Si vous avez eu une idée, savez-vous comment vous assurer qu'il s'agit d'un bon sujet de recherches? Voici une méthode infallible: vous prenez un normalien, vous lui demandez si votre idée est un bon sujet; s'il vous répond négativement, alors vous pouvez être sûr qu'il s'agit d'un bon, et vice versa." Il ne semblait en effet pas beaucoup aimer les normaliens, mais il avait un certain humour.

Cette façon d'aborder les nouveaux venus était assez typique du personnage, mais atypique au sens sociologique. Je crois qu'il était le seul à faire ainsi le premier pas. Les comportements typiques au sens sociologique étaient les suivants : les profs de gauche étaient généralement jeunes, sympas, venaient aux réunions pour rencontrer les gens, et y affichaient un comportement ouvert; après la réunion, on allait prendre un pot et selon les sentiments spontanés, on sympathisait ou non, mais on n'abordait pas les gens a priori; il n'y avait pas de hiérarchie, on était soixantehuitard, mais réservé ou même distant, et la distance était le plus souvent déterminée par de simples préjugés; en tous cas des clans se formaient très vite. Les profs de droite au contraire étaient attachés au respect de la hiérarchie; ils avaient supporté des humiliations pour pouvoir devenir importants, ils voulaient que les jeunes aient peur d'eux, et par conséquent s'efforçaient de ne leur adresser la parole que de très haut. Bien entendu, la palette ne se réduisait pas aux clivages politiques, il y avait aussi le folklore: par exemple les inévitables *matheux typiques*, qui étaient politiquement neutres, mais très peu portés sur la communication;

ils faisaient cours en tournant le dos aux étudiants et en écrivant tout petit, ils ne venaient jamais aux réunions amicales, étaient très timides, faisaient des mathématiques incompréhensibles, etc. Mais le fait de parler systématiquement à tous les nouveaux venus, a priori et sans faire d'exception, était unique en son genre. Généralement cette offre de communication était très décontractée dans le ton et contenait un certain humour au troisième degré (ou plus). Il s'est adressé à moi un jour aussi comme cela. Je ne saurais dire combien de temps après mon arrivée. Il était question de l'Alsace; comme je suis d'origine alsacienne, il me demandait d'où je venais, et la conversation a porté sur l'Alsace. Je crois qu'il semblait un peu déçu quand j'ai dit que je ne connaissais pas le dialecte alsacien, mais je ne me souviens plus guère de la conversation. Je n'étais pas normalien non plus, ce qui devait lui plaire, mais il n'a pas été question des normaliens. Le fait que j'étais communiste devait lui plaire moins, mais il ne faisait pas d'exclusive (l'ayant connu mieux par la suite, je pense qu'il n'y voyait pas le diable, mais simplement des songes creux). Il m'a raconté qu'il n'était pas d'origine bourgeoise, que son père était tonnelier, qu'il comprenait "le prolétariat". En tous cas le ton de la conversation était tout-à-fait décontracté, ce qui n'était pas fréquent dans ce milieu coincé.

Je me souviens encore d'une autre conversation très ancienne, mais postérieure à la précédente; ce devait être en 1973. D'après des recoupements que j'ai faits par la suite, cette conversation a dû avoir lieu très peu de temps après qu'il ait découvert le livre de Robinson *Non-standard Analysis*. Beaucoup plus tard, il racontait en effet volontiers comment il était un jour tombé par hasard, en fouinant dans la bibliothèque, sur le **Livre**. La conversation dont je parle maintenant a donc dû avoir lieu très peu de temps après. Je me souviens que j'étais en train de discuter avec un ami (il s'agit de Paul Borel). En arrivant près de nous, il nous a demandé si nous avions déjà entendu parler de "l'Analyse non-standard". Comme nous ne savions rien, il nous a expliqué qu'il s'agissait d'une théorie qui permettait de faire des calculs avec des nombres infiniment petits comme au dix-huitième siècle, mais avec toute la rigueur moderne, et qu'il y avait un livre à la bibliothèque sur ce sujet. Nous (Borel et moi) sommes allés immédiatement emprunter ce livre et l'avons étudié, de façon assez approfondie. Nous avons tous les deux eu le sentiment qu'il s'agissait d'une chose intéressante (parmi d'autres) et nous en avons discuté pendant les semaines qui ont suivi. Mais cela n'a pas été la révélation foudroyante que Georges a, selon ses dires, éprouvée.

Par la suite, lorsque je rencontrais Georges dans un couloir (mais à cette époque je ne l'appelais pas Georges), il me demandait chaque fois où en était ma réflexion sur Robinson. Le sujet m'avait intéressé, mais il fallait que je termine ma thèse de troisième cycle. D'autre part, je crois que je n'avais pas eu la même idée que lui sur l'Analyse non-standard. Lui voulait simplement faire des mathématiques avec les infiniment petits. Moi, selon ce qui était vaguement suggéré dans le livre de Robinson, mais aussi parce que je raisonnais selon les idées fausses propagées par les mathématiques à la *Bourbaki*, je pensais que l'Analyse non-

standard devait être une simple technique de démonstration. C'est-à-dire que certaines démonstrations difficiles pourraient être plus simples grâce à cet outil, ou même que certaines démonstrations impraticables à cause de leur complexité pourraient être rendues abordables. Georges ne niait pas cet aspect, mais voulait plutôt utiliser les idées de Robinson pour calculer comme les physiciens; en fait, ce n'était pas si clair, car son discours sur les infiniment petits de Robinson n'était jamais réduit à son noyau purement pragmatique, il était toujours mêlé à des considérations très abstraites sorties du livre de Robinson. Par ailleurs j'avais ma thèse à terminer. En outre, à cette époque je désirais de plus en plus vivement quitter les mathématiciens (j'avais envisagé de faire une maîtrise de physique et de repartir à zéro en physique avant qu'il ne soit trop tard) car je n'aimais pas les mathématiques comme elles sont faites chez les mathématiciens *purs*. Je détestais de plus en plus cette espèce de milieu scientifiquement fermé, où "on résout les problèmes qu'on se pose et non les problèmes qui se posent" (Poincaré). Depuis que j'en suis sorti, on m'a dit que les choses évoluent de ce point de vue. J'en doute, mais admettons. En tous cas à l'époque ça n'évoluait pas. Donc ma mentalité à ce moment était: "je termine ma thèse de troisième cycle puis je pars".

J'ai présenté cette thèse en 1976, mais malheureusement je n'ai pas pu partir. A cette époque tous les robinets se fermaient, plus de postes, plus moyen d'aller ailleurs. Donc je devais me résigner à rester éternellement chez les mathématiciens, quitte à m'occuper le mieux possible. Cette raison basement matérielle est donc aussi une cause de mon rapprochement avec Georges, mais elle n'aurait pas suffi car j'aurais pu m'occuper avec la Mécanique quantique (mon sujet favori). La curiosité purement scientifique pour l'Analyse non-standard n'aurait pas suffi non plus. Jusque là mes rapports avec Georges se réduisaient à de brèves rencontres dans un couloir, il me demandait "comment ça va ... non-standardement?" Je donnais des réponses du type "R.A.S." mais de façon à montrer que le sujet ne me semblait pas inintéressant. Un jour il découvrit une nouveauté sur la question: un article paru dans le *Bulletin of the Mathematical Society of America*, intitulé *Internal Set Theory*, par Edward Nelson. Cet article ayant paru en 1977, cela donne un repère pour dater ce qui suit. A la rencontre suivante dans un couloir, il m'a parlé de cette parution, qui visiblement l'avait inspiré. J'ai lu cet article, puis je lui ai fait part de mes impressions; je ne comprenais pas ce que cela apportait de mieux que le livre de Robinson. Il n'était pas du tout du même avis (en fait cette divergence entre nous s'est maintenue par la suite, mais elle est sans importance). Du coup, nous avons de quoi discuter plus longtemps. C'est ainsi que Georges est devenu un interlocuteur intéressant, et du coup aussi l'Analyse non-standard devenait un sujet plus vivant: simplement parce que c'était devenu un sujet possible de *conversation*, et non uniquement de lecture. J'insiste sur le fait qu'il s'agissait de *véritables* conversations, et non, comme c'est le défaut de beaucoup d'enseignants, un monologue où le prof parle et, lorsque son interlocuteur parle à son tour, n'écoute rien et se concentre uniquement sur ce qu'il va dire ensuite. Ce point est essentiel pour comprendre la personnalité du défunt. J'avais déjà évoqué plus haut sa volonté de communiquer avec tous les nouveaux venus, sans la moindre

considération hiérarchique; cet égalitarisme absolu était pratiqué et non professé. Par là il se distinguait radicalement du stéréotype du prof de droite obsédé par le souci permanent de marquer sa position, mais aussi du prof de gauche égalitariste en paroles, mais incapable de faire le premier pas. Georges était comme on dit “capable de faire confiance aux gens”.

Beaucoup de profs de gauche, soixantehuitards et égalitaristes en paroles, stigmatisaient le paternalisme mandarinal, mais tout au fond d’eux-mêmes, à leur insu, une voix disait “oui, ce type devant moi, à qui je cause, n’est pas là pour faire de la recherche, mais de l’enseignement; il n’a pas été recruté par un concours difficile, il ne vient pas des cercles parisiens triés sur le volet comme moi; il va faire une thèse pour la forme, parce qu’il le faut bien, mais les mathématiques de haut niveau ne sont pas pour lui”.

Par exemple, si Georges faisait un enseignement avec un collègue, et que ce dernier proposait une idée (mais rassurez-vous, cela ne se produisait pas trop souvent), il était capable d’accepter de modifier son cours dans le sens de l’idée, ou même d’en confier la mise en oeuvre à celui qui l’avait proposée, même lorsque celui-ci était un jeune assistant. Cela ne signifie pas qu’il était incapable de distinguer un bon chercheur d’un mauvais; mais il attendait de voir le travail et se refusait absolument à préjuger de l’existence ou de l’absence de ces qualités d’après le seul examen du pedigree.

Je ne suis pas le seul à avoir constaté cela: tous ceux qui ont connu Georges ont remarqué cette mentalité foncièrement républicaine et démocratique. Son discours stéréotypé sur “la mafia des normaliens” était une expression de cette mentalité. Mais le début de mon récit montre que cette expression, réduite à une sorte de slogan, ne fonctionnait pas: mis à part ceux qui connaissaient Georges d’assez près, elle était perçue comme un radotage de vieux. On met ici le doigt sur un désaccord persistant entre Georges et moi à propos de la *communication*, car pour communiquer l’Analyse non-standard, il a agi de la même façon que pour communiquer son esprit démocratique: à coup de petites phrases, trop courtes pour être dépourvues d’ambiguïté, et répétées un nombre incalculable de fois. Je n’ai jamais réussi à croire à l’efficacité de ce procédé, car une défense très simple permet d’y rester sourd: il suffit de se dire “Ca y est, le vieux sort son refrain”. C’était parfois un sujet de discussion entre nous, lorsque par exemple il me reprochait de ne pas parler pour *la cause*. La thèse que je lui opposais était que je ne crois absolument pas à la communication, et qu’à mon avis il n’y a que deux choses utiles: a) la provocation, le scandale (il suffit de voir comment *Les Versets Sataniques*, *Madame Bovary*, ou *Le Sacre du Printemps* sont devenus célèbres); b) avoir réellement quelque chose à dire (la raison pour laquelle *Madame Bovary* et *Le Sacre du Printemps* n’ont pas été oubliés, longtemps après le scandale). Cela est tout aussi vrai pour la création mathématique: à quoi bon faire de la publicité pour la mathématique non-standard si on ne fait rien d’intéressant avec? Georges ne refusait pas de recourir à la provocation et au scandale, malgré sa mentalité centriste; en tout cas les petites phrases étaient un trait caractéristique

du personnage. J'y reviendrai.

Le rêve de Georges était de lancer une idée (en l'occurrence, l'Analyse non-standard) qui n'émane pas des institutions établies. Celles-ci pouvaient être par exemple "la mafia des normaliens". Réussir à lancer une telle idée, qui non seulement n'aurait pas été l'initiative des institutions établies, mais aurait même rencontré leur hostilité, de sorte qu'ensuite, éventuellement, son succès les fasse enrager, était une motivation profonde.

Sa rivalité avec les normaliens était un avatar d'une rivalité vieille comme le monde, décrite par exemple dans le théâtre de Beaumarchais (la rivalité entre Figaro et les nobles). Ses mérites scientifiques étaient certes reconnus, mais la petite secte parisienne ne le reconnaissait pas comme un des siens: il était alsacien, avait une élocution lente, était provincial jusqu'au bout des ongles. Vous allez dire "Mais pourquoi vouloir damer le pion à cette petite secte, n'est-ce pas exagérer son importance?" Je suis bien de votre avis, mais permettez-moi de ne pas répondre à tous les pourquoi. J'essaie de faire revivre la mémoire du défunt, c'est tout. Plusieurs histoires ont circulé dans le milieu à propos du mépris parisien pour cet universitaire de province. Faute de place, je n'en raconte qu'une. Un jour, pour je ne sais quelle promotion, une commission parisienne examinait le dossier d'un certain Georges Reeb. Les membres de la commission disaient "Tiens, c'est marrant, un type qui fait de la géométrie et qui a le même nom que Reeb, l'américain des feuilletages; c'est curieux, ce type est français et il a le même nom". Comme personne ne connaissait ce type, le dossier fut écarté. Plus tard, à une session ultérieure, quelqu'un vint dire que la commission avait fait une grosse bêtise, et la gaffe fut corrigée. Mais Figaro n'était pas devenu comte de Figaro pour autant. Commencez-vous à comprendre pourquoi Georges avait tant l'esprit républicain?

Je voudrais encore éviter un malentendu. Il est clair que dans le paragraphe précédent c'est Georges qui joue le beau rôle et "les normaliens" le mauvais. J'ai dû passer par là pour vous décrire un aspect de sa vie. Mais je suis absolument neutre dans cette polémique entre normaliens et non normaliens. Il y a exactement la même proportion d'imbéciles parmi les normaliens que partout ailleurs. Il suffirait que par un hasard quelconque (par exemple à la suite d'une guerre où l'élite mathématique parisienne serait morte en déportation) l'école française d'Analyse non-standard, réduite actuellement à des positions de pouvoir extrêmement modestes, se trouve seule disponible pour la reconstruction et acquière ainsi une position dominante, pour que toute l'histoire se reproduise avec d'autres acteurs.

Revenons à notre héros. Une chose peu connue des profanes est que la vie d'un chercheur scientifique se divise souvent en deux parties. Dans la première partie il trouve quelque chose qui lui apporte une certaine notoriété (dans le cas de Georges il s'agissait des feuilletages); dans la seconde, il vit de sa notoriété et le plus souvent devient alors un bureaucrate: il dirige une équipe, un laboratoire, ou une institution, et ne fait plus que du travail administratif, de la politique, ou de l'expertise. Bien sûr ce schéma n'est pas systématique: certains scientifiques n'ont d'intérêt que

pour la seconde étape, et y parviennent directement, à force d'arrivisme, sans notoriété scientifique préalable; d'autres, d'ailleurs particulièrement nombreux chez les mathématiciens, n'ont de goût que pour la première étape, et il arrive alors un moment dans leur vie où ils doivent trouver un nouveau domaine de recherches, car le premier — celui qui leur avait apporté une notoriété — est épuisé ou ne les inspire plus. Quand j'ai connu Georges il devait être à peu près à une telle époque charnière. Malgré l'image du mandarin conservateur que certains donnaient de lui, il n'avait pas de goût pour le pouvoir. Il a accepté des responsabilités administratives (de toutes façons refuser en bloc était contraire à sa nature centriste), mais il préférerait de loin l'entreprise consistant à lancer une idée non conformiste. Par ailleurs, l'idée de l'Analyse non-standard lui plaisait, car il était géomètre "à l'ancienne" et avait toujours préféré les représentations intuitives, avec des "vecteurs infinitésimaux" et des "petites régions", comme on le faisait au *XIX^e* siècle, aux formalismes lourds du *XX^e*.

Ici apparaissent deux points essentiels pour comprendre la psychologie du personnage et de ma relation avec lui: le lien avec les mathématiques du *XIX^e* siècle, et une sorte d'*idée intérieure* sur ce que doivent être les mathématiques. Le premier point est facile à saisir: Il signifie simplement que Georges avait une connaissance des auteurs anciens, qu'il en avait lu beaucoup, ce qui est pratiquement inexistant chez les mathématiciens modernes, performants et pointus, qui ne lisent rien que de récent. Lire les auteurs anciens est perçu aujourd'hui comme une activité déclassée (répertoriée *histoire des sciences*) réservée aux chercheurs fatigués ou aux femmes; mais c'est alors une spécialité à part, sans articulation avec une activité mathématique. Le second point par contre est délicat et subtil et exige des explications. J'emprunte ce concept d'*idée intérieure* au peintre allemand Caspar David Friedrich. Celui-ci l'utilisait pour expliquer le sens de sa peinture.

Bewahre einen reinen, kindlichen Sinn in dir und folge unbedingt der Stimme deines Innern, denn sie ist das Göttliche in uns und führt uns nicht irre.

Heilig sollst du halten jede reine Regung deines Gemütes; heilig achten jede fromme Ahndung, denn sie ist Kunst in uns! In begeisternder Stunde wird sie zur anschaulichen Form; und diese Form ist dein Bild.

Keiner soll mit fremdem Gute wuchern und sein eignes Pfund vergraben! Nur das ist dein eignes Pfund, was du in deinem Innern für wahr und schön, für edel und gut anerkennst.

Mit eignem Auge sollst du sehen und, wie dir die Gegenstände erscheinen, sie treulich wiedergeben; wie alles auf dich wirkt, so gib es im Bilde wieder!

L'*idée intérieure* est à peu près ceci: de même qu'il existe un sentiment moral spontané, qui permet de considérer a priori que la torture ou les meurtres d'enfants sont abominables, que le respect de la vie est bon et la violence mauvaise, etc..., de même il existe un sentiment esthétique spontané qui permet à l'artiste de sentir en lui-même ce qui est *le beau* et qu'il *doit* représenter; ce n'est pas une propriété objective de l'objet qu'il peint, c'est lui qui l'y voit, mais il sent que *c'est* cela qu'il faut représenter. On pourra rapprocher cette *idée intérieure* de Friedrich (was du in deinem Innern für wahr anerkennst) de celle plus connue du physicien Einstein sur la nature des lois physiques. Mais il faut voir le contexte: Friedrich explique l'importance pour l'artiste de cette *idée intérieure* en l'opposant à ce qu'on appelle

aujourd'hui la mode. Le carriériste soucieux d'arriver va s'empresse de suivre la mode, en espérant ainsi flatter les goûts de ses contemporains. Le véritable artiste suit son *idée intérieure*: si une oeuvre fait encore impression plusieurs siècles après sa création, c'est parce qu'elle avait été l'expression d'une *idée intérieure*, communiquée par un homme à d'autres hommes qui vivent à une autre époque. Ne venez pas me dire que ces conceptions qui prétendent à l'universalité sont historiquement et géographiquement conditionnées, que Friedrich était chrétien, romantique et vivait en Europe: car justement, Georges *était* chrétien, romantique, et européen.

Appliquée aux mathématiques, cette *idée intérieure* ne doit pas être confondue avec les représentations intuitives ou *images* intérieures que les mathématiciens se font des abstractions qu'ils manipulent: il s'agit d'un sentiment strictement personnel, qui permet au mathématicien de juger, de manière absolument subjective, ce qui est intéressant pour lui, ce qui est "sa voie". Elle peut bien entendu conduire à l'échec, car la science n'est pas l'art: un travail scientifique ne doit pas seulement être beau, mais aussi être vérifié. En tous cas la véritable *création* vient d'une idée intérieure.

Georges avait une *idée intérieure* des mathématiques. Le mathématicien moderne, performant et pointu, n'en a pas; ou s'il en a eue un jour, il l'a enterrée, parce qu'on lui a fait comprendre qu'elle était un handicap dans la course à la performance et à la pointe. C'est pourquoi il n'a aucun autre moyen de choisir son thème de recherche que de suivre la mode (même, et surtout, s'il n'a pas la conscience d'agir ainsi). Il travaillera sur la théorie des noeuds "parce qu'on a découvert récemment que la théorie des noeuds est fondamentale en physique quantique" et non parce qu'il en a lui-même la conviction intime. Ou bien, il travaillera sur les fractals "parce qu'on a découvert récemment que les fractals sont des objets importants". Lorsque Georges est tombé un jour par hasard à la bibliothèque sur le livre de Robinson, et qu'il s'est dit "mais voilà, *c'est ça*; c'est comme cela qu'il faut faire des mathématiques!", il se référait à son *idée intérieure*, celle qui l'habitait depuis toujours. J'avais dit plus haut qu'il était géomètre "à l'ancienne" et avait toujours préféré les représentations intuitives, avec des "vecteurs infinitésimaux" et des "petites régions", comme on le faisait au XIX^e siècle, aux formalismes lourds du XX^e. Cela veut dire qu'il avait passé vingt ans dans un milieu entièrement voué aux formalismes lourds du XX^e siècle, sans jamais oublier ni perdre une référence plus forte que la pression de l'environnement, et qui était en lui (die Stimme seines Innern).

Je reprends maintenant le récit chronologique de nos relations. Je m'étais arrêté au moment où il m'avait parlé de l'article de Edward Nelson, qui fut un sujet de discussion, de telle sorte que nos rapports ont cessé de se réduire à des échanges de politesse.

J'ai oublié le détail de ces discussions; souvent, nous parlions d'un point technique que je ne comprenais pas. Je me souviens par exemple lui avoir posé la question suivante: prenons la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Si on fait la somme sur les n standard,

on doit trouver $\frac{\pi^2}{6}$. Mais si on fait la somme sur les entiers standard *et* non standard? On devrait trouver un résultat infiniment proche, mais plus grand, donc non standard. Il a eu tout de suite la réponse. Il est incontestable qu'il était parfaitement compétent sur le sujet. Il est peut-être utile que je dise cela ici, car je me souviens qu'un collègue (d'ailleurs particulièrement médiocre) m'avait demandé à l'époque où l'on nous voyait discuter ensemble, si Reeb comprenait réellement quelque chose à l'Analyse non-standard; je rappelle que pour la plupart des collègues, "le vieux était gâteux".

Mais le centre de ces discussions était la question de savoir en quoi cet article de Nelson était vraiment intéressant. Georges estimait que la présentation de Robinson était inutilement formelle, et que Nelson allégeait considérablement. Je répondais que le formalisme de Nelson était peut-être plus léger, mais tout aussi opaque, puisqu'on ne comprenait pas davantage le *sens* des choses. Ici commençait à poindre une question qui nous a occupés pendant des années: que signifie *réellement* (appliquée à un objet mathématique) l'expression "être standard"? Il avait un élément de réponse, qu'il formulait ainsi: "les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$; une de ces petites phrases qu'il allait répéter un nombre incalculable de fois. Comme la petite phrase sur la mafia, il y avait un contenu vivant et profond derrière, mais qui ne transparaissait absolument pas dans la petite phrase elle-même; seul était perçu "un nouveau refrain du vieux". Toutefois, à cette époque (1978), nous ne discutons pas encore du sens profond d'expressions telles que "standard" ou "naïf", mais seulement de savoir si l'article de Nelson apportait un vrai progrès. En fait, notre discussion sur l'article de Nelson, qui enthousiasmait l'un, mais laissait l'autre sur sa faim, était due à la différence de deux *idées intérieures*, la sienne et la mienne, mais cela n'était pas encore clair à cette époque. Comme je l'ai déjà dit, il était géomètre et son idée intérieure concernait les éléments géométriques infinitésimaux (vecteurs tangents, etc). L'article de Nelson lui semblait apporter à un coût raisonnable les concepts mathématiques infinitésimaux, et leur sens était, pour lui, clair dès lors qu'il était déterminé par l'intuition géométrique. J'y reviendrai pour la suite de cette discussion, lorsque la chronologie le permettra.

Un jour j'ai lu dans une revue scientifique un article sur *les phénomènes de moiré*. Cet article relevait d'une approche purement expérimentale. Je me suis dit "Tiens, mais voilà quelque chose qui peut se traiter avec des infinitésimaux". J'ai essayé aussitôt quelques petits calculs sur un papier pour vérifier la pertinence de l'idée; cela semblait marcher. J'ai décroché le téléphone pour appeler Georges, et je lui ai soumis l'idée pour avoir son avis, pour savoir par exemple si, au cas où on obtiendrait effectivement quelque chose, cela aurait des chances d'intéresser quelqu'un. Il m'a dit de commencer à regarder et de venir lui montrer le résultat. Ce qui fut fait. J'ai exposé mes calculs, qui utilisaient effectivement les concepts robinsoniens, devant quatre ou cinq personnes dans un bureau. J'ai vu son enthousiasme augmenter à vue d'oeil. Il a dit: "Bon, à partir de maintenant, on se tutoie".

Le lendemain, j'ai utilisé mes relations chez les physiciens pour me procurer des réseaux à moiré. Je suis venu avec une petite boîte, que j'ai donnée à Georges en lui souhaitant bon amusement. J'ai appris le lendemain qu'il avait fait le tour de tous ses collègues pour leur montrer les moirés qui étaient dans la petite boîte. Il exultait. Et il ajoutait "Les normaliens n'ont pas d'imagination".

Cet épisode m'a appris une chose essentielle. Je n'ai jamais cru, ni à ce moment, ni après, qu'il s'agissait d'une découverte scientifique. Mais j'ai compris comment fonctionnait la science. Ou en d'autres termes: j'ai fait une découverte scientifique, qui n'était pas celle de la théorie mathématique du moiré, mais qui était celle du mécanisme par lequel les succès, les best-sellers, ou les modes se créent de toutes pièces. "On" suit les modes, mais pourquoi, parmi les millions d'idées plus ou moins folles qui sortent chaque année de millions de cerveaux, quelques unes deviennent des modes et pas les autres? Avec cette histoire de moiré, j'ai vécu une expérience qui me montrait à quel point il est moins ennuyeux de créer une mode que de la suivre.

Pour Georges, cette histoire de moiré était la preuve que les infiniments petits étaient utiles. Il *sentait* que c'était cela qu'il fallait faire. Ce sentiment venait de son idée intérieure, et n'était pas justifié par des arguments du type "Si nous voulons avoir un bon rapport du C.N.R.S. il faut faire ceci car c'est la tendance actuelle; j'étais à Paris hier, j'ai discuté avec *X*, qui m'a dit qu'il était à la réunion *Y*, où il a entendu qu'on allait favoriser ceci ou cela".

Au même moment (en fait déjà avant, mais je ne le savais pas: mes rapports avec lui n'ont commencé à devenir réguliers et étroits qu'après l'histoire du moiré), Georges faisait de la polémique. Il fustigeait en public l'indifférence de la communauté; en privé il confiait qu'il ne comprenait pas cette indifférence. Cela a duré jusqu'à sa mort. Je crois qu'à ce point du récit vous en savez déjà assez pour commencer à pénétrer dans sa propre vision des choses, c'est-à-dire pour "comprendre ce qui le faisait courir". Son idée intérieure des mathématiques lui apportait la conviction que l'Analyse non-standard était le véritable langage des mathématiques, celui qui permettrait enfin de dire les choses telles qu'elles sont, ou telles qu'on les perçoit (son ami Detlev Laugwitz disait cela mieux que nous: mit üblicher Mathematik kann man zwar alles gerade so gut beweisen; mit der nicht-standard Mathematik kann man es aber verstehen). Voilà donc ce qui "allait damer le pion aux normaliens"

Si je puis me permettre un commentaire: de sa double motivation, l'idée intérieure d'une part, et le plaisir de "damer le pion aux normaliens" d'autre part, le second volet est celui qu'il a emporté dans sa tombe. Pour moi qui raconte, il était toutefois nécessaire de le mentionner, afin que le personnage apparaisse tel qu'il était encore un quart d'heure avant sa mort. Lorsqu'il disait qu'il ne comprenait pas l'indifférence de la communauté, je n'ai jamais pu croire à sa sincérité, pour deux raisons: a) parce que cela lui plaisait trop de damer le pion aux normaliens, et b) parce que je trouvais la raison de cette indifférence évidente comme le nez au milieu de la figure. Jamais je ne croirai qu'il ne voyait pas cette raison si évidente.

En revanche le premier volet de sa double motivation, à savoir l'*idée intérieure*, est le véritable héritage qu'il laisse derrière lui. Transmettre une conception purement technique de la science à des jeunes chercheurs, quitte à étouffer en eux une idée intérieure s'ils en ont une, équivaut à les livrer pieds et poings liés à la stupidité aveugle de la science contemporaine, devant laquelle ils n'auront aucun autre repère que la succession sans queue ni tête de modes aussitôt oubliées. Georges avait une conception de la science qu'on pourrait appeler humaniste, en tous cas diamétralement opposée à la conception dominante, qui assimile la science à une gigantesque compétition sportive. Ce qui lui apparaissait comme le bien le plus précieux était d'*avoir une idée* (1) et non de participer à une compétition, et c'est cela qu'il respectait avant tout chez les autres. On peut appeler cela du mysticisme si on veut, mais je ferai remarquer que Kepler ou Einstein (ainsi que beaucoup d'autres) étaient motivés par une idée intérieure et non par la course aux prix académiques; les résultats en ont été plus concrets que ceux des politiques de la recherche élaborées par des nuées de technocrates pseudomatérialistes.

Certes, un danger réel de ce prétendu mysticisme aurait consisté à lancer des jeunes chercheurs sur des voies marginales qui leur interdisent par exemple d'obtenir un poste à l'université. On le lui a reproché. Mais Georges ne négligeait pas du tout cela (par exemple il se souciait de ma carrière plus que moi).

Justement parce qu'il avait une idée intérieure et ne croyait pas à des sornettes technocratiques, Georges a été une des très rares personnes avec qui j'ai eu de *véritables* discussions scientifiques.

La plus importante de nos discussions portait sur le sens caché des formalismes; cette discussion avait commencé, comme je l'ai déjà dit, à propos de la comparaison entre l'Analyse non-standard selon Robinson ou Nelson. Elle a duré plusieurs années et son contenu est pour l'essentiel rapporté dans un article que nous avons publié (*Intuitionnisme* 84). Il faut bien voir que cette discussion n'a pas été organisée; nous la reprenions de temps en temps, quand l'occasion se présentait, parfois par téléphone. Il faut aussi avoir en vue que parallèlement il y avait d'autres chats à fouetter. Georges faisait un cours de D.E.A., il voyageait pour faire des conférences et communiquer les travaux non standard de ses élèves sur les équations différentielles, il polémiquait, et répétait sans cesse des petites phrases telles que "les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ". Après l'histoire du moiré, il emportait toujours avec lui la petite boîte, que j'ai revue un jour chez lui toute usée. Il m'est impossible de tout rapporter, c'est pourquoi je me concentre sur les ressorts essentiels et non sur des aspects anecdotiques.

Or, cette discussion sur le sens caché des formalismes faisait entrevoir les ressorts essentiels, en cela qu'elle faisait affleurer les idées intérieures; en particulier, elle nous a permis d'approfondir et de préciser cette espèce de vision qu'il avait que

(1) J'insiste sur le fait que l'expression "avoir une idée" (notez bien le singulier) est de lui; ce n'est pas moi qui plaque artificiellement une théorie de Friedrich; d'ailleurs Friedrich dit littéralement la *voix* intérieure (die Stimme des Inneren). Le problème est de comprendre quel sens l'expression "avoir une idée" avait pour Georges.

“les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ”. Nous allions voir que derrière cette petite phrase se cache une perspective fantastique.

Son idée intérieure le poussait à simplifier le formalisme au maximum, afin que, une fois réduit à sa plus simple expression, il ne reste plus que l'image qu'on se fait de la chose (ceci étant évidemment l'idéal qu'on n'atteint jamais). Pour lui, le passage de Robinson à Nelson allait dans ce sens. En effet, disait-il, Robinson éprouve par exemple le besoin de démontrer qu'il existe des nombres non-standard *en plus* des nombres usuels; pour cela il utilise tout un arsenal à la base duquel se trouve l'axiome du choix (2). Or Nelson nous économise cela; il nous dit: inutile de construire de nouveaux nombres, on prend les usuels et on distingue parmi eux certains qu'on appelle standard. Pour éviter la contradiction lorsqu'on parle des nombres standard, il suffit de respecter trois règles, ce qui est peu. Je n'étais pas satisfait, car je trouvais que d'une part la simplification était assez médiocre (si on comptait le temps pour l'étudier on gagnait au grand maximum un facteur deux) et d'autre part, on devait encore payer ce faible gain, car le mystère s'en trouvait épaissi: au moins dans Robinson on comprend d'où les choses viennent; dans Nelson le mystère n'est pas expliqué, mais dissous par la prestidigitation d'une axiomatique ad hoc. Si j'écoutais mon idée intérieure, il fallait qu'on m'explique le mystère, non qu'on le balaie sous le tapis à coup d'axiomatique. Mais attention, je vous explique les choses comme cela aujourd'hui, alors qu'elles n'étaient pas aussi claires pour moi à ce moment! Il y avait des choses que je n'avais pas comprises en lisant Robinson, j'avais donc lu Nelson en espérant que ce serait plus clair, et je n'y ai pas trouvé ce que je cherchais. En fait l'explication que je cherchais remonte à un passé lointain; elle est perdue dans les mathématiques d'aujourd'hui, il était impossible de la trouver dans *aucun* livre postérieur à, disons, 1945, et nous allions la trouver ensemble.

Puisque Georges estimait bon ce qui était léger en formalisme et riche en images géométriques, je lui objectais: “Mais alors, pourquoi aller chercher Robinson, Nelson, ou toute autre idée compliquée de mathématicien, puisqu'il suffit de faire comme les physiciens, on calcule et on néglige ϵ parce qu'il est petit, et c'est tout”. Je lui ai montré des calculs dans Landau et Lifschitz *Cours de Physique théorique*, qui ressemblaient comme deux gouttes d'eau à des calculs non standard. “Pourquoi ne te satisfais-tu pas de cela? Là, le formalisme est *vraiment* réduit au minimum”.

Je ne me souviens plus de sa réponse à ce moment là. Mais la bonne réponse est arrivée toute seule quelque temps plus tard, parce que des gens du groupe créé par Georges (il s'agit de Diener et van den Berg) ont remarqué que parmi les ensembles spéciaux, dits *externes*, qui apparaissent en Analyse non-standard, il y

(2) Pour le lecteur non-mathématicien, précisons ici que ces histoires de démonstrations d'existence ne sont que des artifices que le lecteur n'a aucun besoin de comprendre; elles consistent seulement à s'assurer qu'on peut assumer l'existence en question sans tomber dans une contradiction logique. Pour le lecteur mathématicien, il suffira de dire que les constructions de Robinson ne sont que des versions sophistiquées de la construction par Skolem (1917) d'un ensemble non dénombrable satisfaisant aux axiomes de Peano, avec récurrence et tout et tout, en recourant à l'axiome du choix.

en avait de deux sortes: les halos et les galaxies (3). Tout cela peut bien sûr sembler très abstrait, et je ne veux pas vous entraîner dans des détails oiseux. Voici donc le point essentiel: les calculs de physiciens, ou les représentations géométriques infinitésimales chères à Georges, telles que les vecteurs tangents, n'ont jamais laissé soupçonner cette distinction entre halos et galaxies. Or les calculs effectués par les élèves de Georges sur les équations différentielles montraient que cette distinction apparaissait concrètement, et qu'il ne s'agissait donc pas d'un artefact du formalisme (dû par exemple à l'axiome du choix). Je lui ai raconté tout cela, en insistant bien sur le fait que ces formalismes étaient opaques, mais qu'ils devaient receler "quelque chose" qui serait la cause ou l'explication de cette distinction, et qui n'était pas contenue dans l'idée intuitive spontanée des infinitésimaux.

La discussion prit une tournure plus systématique après que nous ayons créé avec Hervé Barreau un séminaire qui, bien entendu, n'était pas destiné uniquement à cette discussion, mais qui en fut la tribune.

Je ne suis plus capable de situer les moments-clés dans le temps de façon précise, mais le problème était ainsi posé: quel sens véritable, caché *derrière* les formalismes, pouvait avoir cette histoire de halos et de galaxies? Ou plus exactement: y a-t-il autre chose dans l'Analyse non-standard que la simple formalisation, en plus ou moins compliqué, du calcul des infinitésimaux comme le pratiquaient Leibniz, ou les physiciens?

La raison pour laquelle je n'étais pas satisfait, alors que lui semblait l'être, provenait de l'idée intérieure que j'avais des mathématiques. L'attitude de n'importe quel spécialiste performant et pointu eût été la disqualification a priori de ces questions. "C'est de la philosophie" est la petite phrase consacrée à ces cas. Georges ne percevait pas exactement ce que je cherchais, et que je ne percevais pas exactement moi-même, puisque *je le cherchais*. Mais il essayait de deviner. Il me suggéra "Il faudrait que tu lises Brouwer". Mais notez bien ceci, qui est essentiel: il n'a pas réagi comme le spécialiste compétent qui "sait" que les interrogations du débutant sont des naïvetés qu'il convient d'enterrer; il ne les a pas disqualifiées comme "philosophiques". Non seulement ces interrogations n'étaient pas reconnues dans ce qu'on appelle "la communauté des spécialistes", mais elles n'étaient même pas les siennes. Il a réagi conformément à sa règle de vie, dont j'ai déjà évoqué plus haut des manifestations: il faisait confiance aux autres a priori, sans aucune considération de préséance (hiérarchique par exemple). Mais ici, à ce point du récit, on pourra mieux comprendre la nature exacte de cette règle de vie. Cette idée intérieure encore confuse dont je parlais, était pour lui la véritable source de la science. Alors que tout le monde percevait cela comme une naïveté ou comme un handicap à la compétitivité, lui le percevait comme le bien à cultiver.

J'ai écrit qu'il faisait confiance aux autres, mais maintenant vous pouvez voir à

(3) Pour le lecteur un peu mathématicien, les halos sont par exemple l'ensemble des nombres infiniment voisins d'un nombre donné, ou l'ensemble des nombres infiniment grands; les galaxies sont les complémentaires des halos. Mais aucun ensemble ne peut être à la fois une galaxie et un halo.

quoi au juste allait cette confiance: à ce qui venait directement du cerveau humain naturel, avant d'avoir pu être corrompu par le mensonge social, avant d'avoir été expurgé par toutes les censures et autocensures. Le principe sous-jacent était que la culture s'enrichit peu à peu par des idées inattendues, qui germent naturellement dans le cerveau; en fait, très peu de ces idées s'avèrent intéressantes, mais il faut les écouter *avant* de prendre la décision de les jeter. Et surtout, la règle d'or: il faut les juger selon la conviction intérieure, et non selon les critères académiques. Mais je crois devoir insister sur le point suivant: cette règle de conduite n'était jamais explicitement proclamée, mais systématiquement mise en pratique. C'est cela qui constituait, je pense, la véritable originalité de Georges (car l'inverse, proclamer qu'il faut promouvoir "des esprits originaux", mais ne rien pratiquer, est par contre très courant).

Peut-être utilisait-il le truc consistant à se dire en son for intérieur "Que répondrait un normalien si on lui demandait? Il répondrait que c'est sans intérêt, que c'est de la philosophie. **Donc** ...".

Je suis allé chercher les oeuvres complètes de Brouwer, j'ai lu ou relu Hilbert, Poincaré, et bien d'autres, et nous avons discuté pendant des années pour savoir ce qui était caché sous les formalismes opaques. Nous avons découvert ensemble que le *secret* des halos et des galaxies, c'est-à-dire le secret de la mathématique non-standard, était l'*incomplétude de l'arithmétique* (4). On pourrait penser à première vue que cela était évident, puisque Robinson construit (façon de parler puisque c'est une construction par l'axiome du choix) les modèles non-standard, et que cette construction, si on la considère d'un point de vue purement technique, résulte du théorème d'incomplétude de Gödel. Mais qu'est-ce qui prouve que ce rapport est plus qu'une technique de démonstration? Les mathématiques sont remplies de vérités pour lesquelles il existe une démonstration naturelle (qui montre *pourquoi* cette vérité a lieu) et aussi une autre démonstration, élégante mais artificielle, qui fait appel à des considérations étrangères à la vérité en question. Rien ne prouvait donc que l'incomplétude était la condition indispensable pour qu'un calcul des infiniment petits à la Robinson soit logiquement possible. D'ailleurs, le formalisme nelsonien faisait complètement disparaître ce rapport (ce qui me faisait dire plus tard à Georges: "Tu vois, Nelson est peut-être un peu plus simple, mais finalement beaucoup plus obscur"). Mais c'était mon problème, pas le sien.

Dans cet ordre d'idées, je me permets une remarque en passant: le formalisme officiel des mathématiques dites "pures", par exemple celui qui est présenté dans Bourbaki *Eléments de mathématiques*, a le même défaut: il fait complètement disparaître toute évocation de l'incomplétude, même sous la forme d'un théorème d'incomplétude entièrement formalisé. Je soupçonne que l'incomplétude heurtait l'idée intérieure des promoteurs de Bourbaki.

Ce que je viens de dire là montre que ce *secret* de la mathématique non-standard était inaccessible tant qu'on restait à l'intérieur de la mathématique ossifiée du

(4) Il n'est pas question d'expliquer cela ici: le lecteur curieux pourra lire *Intuitionnisme* 84.

XX^e siècle. Il a fallu revenir à Brouwer (grand critique de cette mathématique), et plus loin, au XIX^e siècle. Nous avons beaucoup lu et discuté des textes tombés dans l'oubli (cela ne se faisait pas qu'en privé, mais aussi, comme je l'ai déjà indiqué, dans le cadre d'un séminaire, avec d'autres participants).

Tout le sens de ces discussions revenait toujours à la relativité des idées mathématiques. Une erreur énorme caractérise la mathématique contemporaine: la conviction d'avoir aujourd'hui atteint la vérité définitive, que par exemple les nombres dits réels *sont* ce qu'on enseigne aujourd'hui, alors qu'en réalité seuls les entiers *naïfs* sont éternels (en langage plus technique, on devrait dire "seul ce qui est récursif est indépendant des choix historiques"). Le travail effectué au cours du séminaire a aussi consisté pour une grande part à fouiller les poubelles de l'histoire pour y retrouver ce qui y avait été jeté. Mais Georges avait pour cela *le sens de la relativité* nécessaire. Il racontait volontiers l'origine de cet héritage: une année passée à l'Institut de Mathématique d'Oberwolfach (Forêt Noire), dont beaucoup de nuits passées dans la bibliothèque, et beaucoup de discussions avec des mathématiciens de passage, non des moindres. Georges savait que les mathématiques n'avaient pas toujours été basées sur les mêmes certitudes qu'aujourd'hui, mais aussi, ce qui est moins facile et beaucoup plus important, *que les certitudes d'autrefois n'étaient pas plus fausses que celles d'aujourd'hui*. Cela est essentiel pour comprendre pourquoi il a éprouvé autant d'enthousiasme à la lecture de Robinson. Ce qui a rendu mes discussions avec lui si intéressantes, était qu'il avait en lui le souvenir du XIX^e siècle, en quelque sorte le souvenir de *ce qu'il y avait eu avant*, ce qui offrait la possibilité de comparer.

Beaucoup considèrent que cette mathématique non-standard est un outil pour faire des démonstrations; j'ai dit au début que j'avais eu moi-même cette vision des choses. Cette perception, qui conduit facilement à la déception, est évidemment typique de cette sorte de dogmatisme absolu qui a envahi les mathématiques, sans être pour autant le résultat d'un complot. Vous connaissez la théorie du complot: elle consiste à imaginer une organisation occulte (le K.G.B., la franc-maçonnerie, le sionisme, etc.) qui manipule le monde, et à lui attribuer une efficacité fantastique. Dans le cas de la mathématique, la théorie du complot consisterait à dire que "les bourbakistes", ou "les orthodoxes", surveillent l'apparition d'hérésies et utilisent leurs positions de pouvoir (comités de lecture, commissions, conseil du C.N.R.S., etc.) pour bloquer leur propagation. Cette théorie est délirante, et la vérité toute prosaïque: les spécialistes sont tout simplement incultes. Ils ont appris les mathématiques en étant toujours pressés de produire une thèse ou des publications *performantes* et *pointues* et n'ont jamais eu le temps d'acquérir une vue d'ensemble. Leur problème n'était pas de comprendre, mais d'être les plus rapides. C'est l'ignorance, et non le complot, qui est la cause du dogmatisme; ici, il s'agit de la forme toute particulière d'ignorance qui est celle des spécialistes. Lorsque ceux-ci se documentent sur la mathématique non-standard, ils sont déçus et n'en comprennent pas le sens, exactement comme une personne non cultivée lorsqu'elle essaie de lire une oeuvre de la littérature classique ("Il y a trop de psychologie et

pas assez d'action").

Georges a consacré beaucoup de temps à faire la promotion de la mathématique non-standard et s'est toujours plaint de se heurter à de l'indifférence ou même parfois de l'hostilité. Maintenant, il est mort. Je ne sais pas ce qui va rester de tout cela. Il avait dit plusieurs fois (mais discrètement) qu'il attachait plus de valeur à ce qu'il a fait pour la promotion de la mathématique non-standard qu'à ses travaux sur les feuilletages. La "communauté" n'est pas de cet avis : selon elle, Reeb était un mathématicien ayant acquis un renom mérité avec ses travaux sur les feuilletages, mais en devenant vieux il a perdu ses facultés de jugement et s'est fourvoyé dans des sottises (je reproduis autant que possible mot-à-mot la phrase qu'il énonçait lui-même pour exprimer le jugement de ses pairs). En essayant de faire revivre Georges et en essayant de faire apparaître ses ressorts cachés, je pense avoir fourni toutes les clefs pour comprendre son choix. Georges assistait à l'évolution de sa branche (la géométrie) avec le sentiment d'un pur et simple enlèvement. Comme tout homme arrivé à un certain âge, il se demandait s'il allait réellement passer le reste de sa vie, ou de sa carrière, à écouter des exposés de plus en plus artificiellement formels, alors que son idée intérieure lui disait que ce n'était pas la bonne voie; ou pire, au lieu de simplement assister à cela, y participer activement en dirigeant des jeunes dans cette voie sans autre issue que ce qu'il craignait justement d'être en train de devenir lui-même. N'y avait-il réellement rien de mieux à faire?

Le jugement des pairs ("Reeb est devenu gâteux") n'a pas d'autre base que l'axiome "il faut suivre la mode, savoir gérer ses succès, engranger le maximum de prix et de médailles, optimiser la carrière". Cet axiome n'est jamais énoncé car le seul fait de l'énoncer crée déjà le doute. De tels axiomes implicites sont appelés des *évidences*. Une autre évidence du même type était "les entiers naïfs remplissent $\mathbb{N}$ ". Vous voyez la même attitude face aux deux évidences. Critiquer ces évidences est facile; ce qui est difficile, c'est de les détecter, puis d'y échapper; pour cela, il faut une *idée intérieure*, et ne pas l'avoir enterrée.

Beaucoup de nos pairs se sentiront visés, voire mis en accusation par ces paroles (ce qui est absurde puisqu'ils ne sont pas coupables, mais victimes) et avanceront pour se défendre que ces histoires fumeuses d'idée intérieure ne nous fournissent pas de postes pour les jeunes. Je répète que Georges n'a jamais négligé cet aspect de la question. Ce qui est en cause est l'autre aspect de la question: *pour quoi faire* ? Certains disent sans doute derrière mon dos, ou derrière le dos de tous ceux qui ont fréquenté Georges, qu'ils auraient fait une meilleure carrière en faisant des choses sérieuses. Ce n'est pas vrai! Ou plus exactement, il est peut-être possible que ces carrières aient été un peu "meilleures", dans le sens absolument inintéressant qu'ils donnent à ce terme. Grâce à Georges j'ai pu faire de la véritable recherche, c'est-à-dire écouter mon idée intérieure, et non servir d'instrument pour répercuter les modes venues d'ailleurs.

Je ne sais pas ce qu'il adviendra de la mathématique non-standard, ou plutôt, selon la version reebienne, de son utilisation pour restaurer l'intuition géométrique. Autant en emportera le vent. La seule chose sûre est que parmi toutes les poussières emportées par le vent, seules les semences ou les spores, et non les particules minérales, sont susceptibles de produire un être vivant, parce qu'elles contiennent un code génétique (une idée intérieure). Répercuter la mode revient à souffler sur des poussières sans même savoir si elles sont minérales ou vivantes (ce qui est sans inconvénient pour le compétiteur dont le souci est d'être celui qui souffle le plus fort, ni pour le conformiste dont le souci est de ne pas être celui qui se fait remarquer parce qu'il s'abstient de souffler). Mais suivre une idée intérieure revient à émettre une nouvelle sporée, sans d'ailleurs savoir ce qu'il en adviendra. Je crois que je résume ainsi au mieux la philosophie de base de Georges.

UN MAÎTRE

J.-M. SALANSKIS

Chercheur au C.N.R.S.

En octobre 1983, j'ai confié ma destinée intellectuelle d'aspirant philosophe à Hervé Barreau, et j'ai rencontré Georges Reeb dans le cadre du séminaire d'épistémologie des mathématiques de l'unité de recherche *Fondements des sciences*, à laquelle j'allais désormais consacrer le meilleur de mon activité.

A cette époque, le texte de "Intuitionnisme 84" venait de voir le jour dans une de ses premières moutures quasi-définitives, et nous en avons aussitôt discuté. D'une façon d'abord difficile pour moi, parce que Jacques Harthong disait du mal de l'*establishment* mathématique, et j'acceptais difficilement un tel ton critique; parce que j'avais l'impression que l'on essayait de m'expliquer que je n'avais pas compris la théorie des modèles alors que je croyais l'avoir comprise; parce qu'il me semblait qu'on voulait m'astreindre à voir la mathématique comme contemplation de l'objectivité constructive, alors que je l'avais toujours pensée comme jeu de la construction des mondes.

Tout cela n'était qu'un point de départ. Au fil des discussions, les aspérités de la confrontation intellectuelle avec Georges Reeb (1) se sont effacées. Un long travail, un long chemin – surtout les miens, je pense, mais *in fine*, peut-être, également les siens – ont fait suite à cette prise de contact. De 1983 à 1992, j'ai étudié l'analyse non standard, et en fait surtout et plus précisément l'analyse non standard telle que Reeb la voyait. J'ai organisé d'abord un petit colloque puis un gros, dans l'intention non exclusive mais essentielle de faire connaître les vues de l'école reebienne d'analyse non standard. J'ai rencontré les diverses personnalités de cette école et suivi quelques temps leurs activités de près, au point par exemple de fréquenter assidûment le séminaire hebdomadaire organisé par F. et M. Diener à Paris VII. Et finalement, j'ai écrit un livre dans lequel j'essaie de présenter sur le mode philosophique cette expérience, sa profondeur, sa valeur, ses promesses (2).

On peut résumer tout cela en disant que j'ai accepté Georges Reeb comme mon maître, et que j'ai fait ce que doit faire tout bon disciple : répercuter et défendre le discours du maître.

Il est malvenu de dire les choses de cette manière dans le monde intellectuel qui est le nôtre. Les individus se targuent non seulement d'être libres, mais encore de s'être eux-mêmes créés, d'être les inventeurs de leur style et de leurs centres

(1) Et tout aussi bien avec Jacques Harthong d'ailleurs.

(2) Le *constructivisme non standard*, à paraître en 1994 dans la collection *Mathesis*, aux éditions Vrin.

© L'OUVERT N° spécial G. Reeb (1994)

d'intérêts : de ne jamais fonctionner à partir de la confiance, du crédit illimité, de ne jamais attendre d'un *autrui* l'accès à l'intelligence, de la bonne réceptivité à ce qu'il enseigne. Il est comique que de telles maximes engendrent une telle uniformité des avis et des cultures, un tel conformisme des entreprises, presque toujours absolument respectueuses de la bienséance intellectuelle d'un moment. A ne jamais vouloir céder à la rencontre singulière d'une pensée, d'une personne, d'un discours, il semble qu'on s'expose à se soumettre à la pseudo-pensée, à l'impersonnalité, au discours figé qui résulte statistiquement de l'addition de ces libertés frileuses.

Je vais maintenant parler du message de Georges Reeb, parce que je porterais gravement tort à un tel homme en oubliant ce à quoi il vouait son énergie pour ne s'intéresser qu'à sa personne. Mais il me semble presque aussi important, aujourd'hui que sa destinée est close, de comprendre qu'il était un maître, ce que c'est qu'un maître, et à quel point le monde intellectuel a besoin de maîtres. Je rejoindrai naturellement ce niveau de mon sujet dans la troisième partie de ce texte. Pour commencer, je vais essayer de raconter ce que je vois comme le propre de son itinéraire intellectuel et de l'impulsion qu'il a essayée de donner à une école mathématique.

La cause mathématique de Reeb

Georges Reeb a voulu, dans la seconde partie de sa carrière, après avoir fait ses armes dans la géométrie différentielle bourbachique, lancer une sorte de révolution mathématique, révolution qui aurait eu, dans son esprit, un aspect *technique*, avec l'adoption de formalismes non standard comme outils, un aspect *programmétique*, avec la réorientation de la recherche vers des problèmes d'un autre type, plus proches de la physique notamment, et un aspect *épistémologique*, avec la promotion d'une mathématique plus liée à sa critique fondationnelle.

Il y a quelques mots à dire du choix de l'analyse non standard comme cheval de bataille. Le travail de Robinson – disons le livre *Non Standard Analysis* de 1966 – a d'abord été vécu comme un fleuron de la grande mathématique ensembliste triomphante de l'après-guerre. Ce que Robinson réussissait à faire était un morceau de bravoure, témoignait de la puissance impressionnante de cet "idéisme de la collectivisation" qui manifestait partout son opérativité; on pouvait d'ailleurs classer la théorie des élargissements comme un des rejetons de la théorie des ultraproduits, à côté de quelques autres. Comme étudiant, je me souviens que vers 1970-74, on évoquait la nouvelle théorie des infinitésimaux avec admiration (sans en connaître grand-chose néanmoins). Donc, Reeb a pris fait et cause pour quelque chose qui était d'abord dans la mode, qui était un bon objet de l'intérêt mi-enfantin, mi-dogmatique des mathématiciens. Mais il a d'emblée mis dans son adhésion à l'analyse non standard bien plus que ce que les gens y voyaient.

C'est que, il faut le dire, il y avait dans l'attitude de Reeb un profond refus de céder à l'intimidation et la pédanterie englobante de la mathématique enivrée d'elle-même. Il a développé et encouragé chez ses élèves une suspicion systématique à l'égard de la complexité bourbachique. On conseille à ceux qui étudient

la philosophie de ne pas se croire kantien simplement parce qu'ils sont étonnés et fiers d'avoir compris la *Critique de la raison pure*. De même, Reeb recommandait, le plus souvent simplement par l'exemple, de ne pas sanctifier un contenu mathématique seulement parce que son exposition traversait toute une machinerie de constructions auxiliaires, ou bien incluait un cheminement déductif ramifié, enchevêtré, intriqué. L'idée que la mathématique devait pouvoir être perçue et vécue comme géniale directement au titre de ce qu'elle donnait à voir et comprendre de l'espace et du nombre était inscrite dans la charte implicite du reebisme.

Les mathématiciens classiques n'ont pas cessé – on en a encore des preuves aujourd'hui – de comprendre l'analyse non standard comme une voie encore plus contournée, anti-intuitive et innaturelle que celles qu'ils suivent quotidiennement. Reeb a vu dans l'analyse non standard, tout au contraire, l'instrument possible d'une récupération de la clarté et du sens, d'une relégitimation de la mathématique vis-à-vis de son noyau. L'adoption de formalismes non standard n'était pas prônée au nom du mérite actuel de tel ou tel formalisme dans sa sophistication ou sa splendeur, mais plutôt comme moyen d'une sorte de conversion existentielle à un rapport honnête à l'objet mathématique.

Il s'agissait aussi de faire valoir une *autre intuition*. C'est de ce point de vue que le passage par l'histoire des mathématiques était important. Il fallait nier que l'intuition qui accompagnait le modèle de Cantor-Dedekind du continu et plus généralement la pratique de la mathématique dans ZFC (3) fût l'équipement cognitif immémorial de l'homme, et montrer plutôt, à la fois en s'appuyant sur les auteurs du passé et sur les expérimentations modernes menées avec des formalismes non standard, qu'une intuition infinitésimaliste de la droite (infinitésimaliste-incommensurabiliste faudrait-il dire afin de marquer l'importance de la vision du continu comme synthèse infiniment ramifiée d'échelles), qu'une autre intuition du continu pouvait être vécue et cultivée.

L'intérêt pour la recherche de nouvelles formalisations de l'analyse non standard s'expliquait par ce double objectif au moins : se donner un cadre qui soit fidèle aux enjeux, qui ne dissimule pas ou surtout ne complique pas inutilement ce dont il s'agissait, trouver les manières d'écrire et de parler propres à transmettre la nouvelle intuition. Tout le cas que Reeb a fait de l'article IST (4) de Nelson se comprend à mon avis d'abord par là. Mais au-delà, les tentatives de ses élèves, qu'il s'agisse du système ZFL (5) de Lutz et Callot ou du système RIST (6) de Péraire (et Wallet à l'origine), correspondent à la même intention. Il est évident que dans cet exercice, on redécouvre de manière profonde ce qu'est un formalisme : les mathématiciens de l'école de Reeb ont cet avantage singulier sur la plupart de leurs collègues que ZFC n'est pas pour eux une table de la loi poussiéreuse dont il n'est nécessaire ni de connaître le détail ni de comprendre le sens ; ils ont eu l'occasion

(3) Zermelo-Fraenkel-axiome du Choix.

(4) Internal Set Theory.

(5) Zermelo-Fraenkel-Limité.

(6) Relatif Internal Set Theory.

de fréquenter la sorte de difficulté qu'il y a à synthétiser un bon formalisme, la sorte d'intention qui vous y porte, la sorte de réussite qu'on peut rencontrer ou ne pas rencontrer dans cette entreprise.

Pour en venir aux visées programmatiques de Reeb, qui dit autre intuition dit autres domaines de recherche. On admettait généralement sans plus de discussion que toute proposition alternative et concurrente par rapport à la mathématique dominante devait être jugée à l'aune de la contribution dont elle était capable *aux problèmes ouverts de cette mathématique dominante*. C'est de cette manière qu'on instruisait le cas du constructivisme – par exemple bishopien – c'est de cette manière que Robinson semblait lui-même accepter par avance qu'on évaluât l'analyse non standard. Reeb a d'emblée perçu que l'analyse non standard non seulement ne devait pas être liée une fois pour toutes à l'un des formalismes disponibles, mais encore qu'elle était en droit d'inventer ce à quoi elle allait s'appliquer, d'aller chercher les situations mathématiques propices à la mise en œuvre de son talent. Le développement de la *théorie des canards* a été l'accomplissement de ce désir, le remplissement de cette anticipation. Cette théorie, avec ses prolongements et ses approfondissements, reste, au bout de plus de trente ans d'analyse non standard, la conquête de la méthode par excellence qui n'apparaisse pas à l'usage et à l'usure comme s'attachant de manière seulement contingente à l'approche non standardiste (à l'encontre, par exemple, du théorème probabiliste de Perkins sur le temps local d'un mouvement brownien). Mais Reeb a systématiquement encouragé, par la suite et par ailleurs, toutes les incursions de ses élèves vers des problèmes vraiment originaux, susceptibles de révéler le génie propre de la méthode non standard. Son adhésion immédiate aux travaux de J. Harthong sur le moiré en fut une première preuve; sa participation à l'application informatique du calcul dit de Harthong-Reeb à la résolution rapide des équations différentielles en nombres entiers et au tracé des formes géométriques simples, qui devait donner lieu aux travaux de géométrie discrète de Reveillès, en fut un second et probant indice.

Reeb philosophe

Mais ce qui, pour moi, contribuait le plus à donner à ma relation avec Georges Reeb la coloration du rapport à un maître était sa façon spontanée d'habiter la condition de mathématicien comme une condition apparentée à celle de philosophe. Le lien entre la mathématique et la philosophie est vieux comme l'une et l'autre, et il surprend seulement ceux qui, abusés par une situation provisoire et contingente de la philosophie en France, se sont habitués à penser qu'elle avait plus à voir avec la politique et la littérature qu'avec la science en général et les mathématiques en particulier. Mais Reeb avait une façon tout à fait profonde et originale de rendre vivant ce lien.

Ordinairement, les mathématiques sont invoquées et réfléchies par les philosophes et les philosophies comme démarche exemplaire, comme contenu-phare et contenu-guide pour une analyse de la connaissance humaine ou pour le développement d'une

connaissance philosophique. Symétriquement, les mathématiciens se rapprochent de la philosophie dans la mesure où ils découvrent que certains aspects de ce dont ils cherchent à statuer ne relève d'aucun tribunal technique; ils examinent alors si tel ou tel grand récit philosophique n'aurait pas pris position sur le segment d'informalité découvert par eux à partir de la mathématique. Reeb, quant à lui, avait pour commencer un rapport systématique, pour ainsi dire méthodologique à la philosophie : il semblait clair pour lui que les contenus et les intentions mathématiques devaient d'abord être reçus au plan d'une intelligence absolument *générale*, d'une vigilance flottante, d'un concevoir schématique qui sont globalement le propre de la philosophie. Cela n'empêchait évidemment pas, ensuite, de se les approprier sur le mode technique. Mais il a professé la supériorité d'une possession des contenus qui fût également philosophique, et ce du simple point de vue de la qualité et de la réussite de la recherche mathématique.

La synergie mathématiques/philosophie chez Reeb, ce fut aussi, bien entendu, son insistance légendaire sur le slogan "les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ", qui constitue ce qu'on aurait envie d'appeler son message épistémologique. *Slogan?* A vrai dire, cet énoncé est présenté dans "La mathématique non standard, vieille de soixante ans?" sous le nom de *constat Q* terme qui paraît impliquer que la phrase ne serait ni plus ni moins que l'enregistrement d'un état de fait externe. Mais la dernière fois que je l'entendis exposer l'affaire au séminaire Loi à l'École Normale, Reeb avait justement dit *slogan*, et je me souviens que j'en avais été intérieurement très satisfait. Pas seulement parce que, surestimant sans doute l'impact auprès de lui de nos discussions, j'osais m'attribuer quelque responsabilité dans ce changement de vocabulaire. Mais aussi et plus encore parce qu'en dénommant *slogan* sa phrase, il en avait ouvertement fait un morceau de philosophie.

Si l'on analyse un peu les attitudes, les expériences et les connaissances enveloppées dans cette phrase, on reconstruit dans son originalité la position de Reeb, et ce qu'elle implique vis-à-vis des mathématiques et de la philosophie.

La phrase en appelle d'abord à un sol commun de l'expérience pré-théorique des nombres : nous sommes censés comprendre ce que sont les entiers *naïfs*. Reeb nous l'expliquait en racontant l'histoire de la définition récursive des entiers comme inscriptions sérielles de bâtonnets, ou en invoquant la pratique d'"école primaire" des algorithmes d'addition et de multiplication sur les entiers écrits dans la numération décimale de position, quelquefois en concédant que des enfants ou des peuples restés prudents à l'égard de la mathématique pouvaient avoir beaucoup moins d'entiers que nous. En tout cas, il demandait qu'on prît les entiers naïfs comme un donné, et pas comme quelque chose d'à *construire*, logiquement ou philosophiquement. Je dirais que sa revendication de la notion d'entier naïf s'apparentait profondément au geste phénoménologique de l'exhibition du soubassement pré-théorique, antéprédicatif, irréfléchi de la connaissance et de la pensée. Alors qu'il n'en va pas aussi clairement de même chez Brouwer, auquel Reeb tenait tant à se référer : peut-être d'ailleurs l'introduction de l'adjectif *naïf*, supplantant l'adjectif

intuitif, exprime-t-il cela d'un seul coup. Les entiers *intuitifs* sont tout de même des entiers garantis par une faculté pure de l'homme, des entiers partiellement platoniciens. Les entiers naïfs sont véritablement quelque chose d'antérieur à tout cela : quelque chose que le mathématicien peut reconnaître comme son bien, parce qu'il ressaisit sans peine la couche d'évidence des entiers naïfs à laquelle sa pratique ne cesse d'accéder sans problème, s'il veut bien faire porter sa réflexion sur cette pratique. Quelque chose dont le philosophe peut comprendre la figure aussi, parce qu'il s'agit, ainsi que je l'ai dit, d'un retour aux *choses mêmes* dont la philosophie a éprouvé généralement le besoin au cours de ce siècle.

Mais la phrase en appelle ensuite et aussi à une vision épistémologique, à un rapport à l'institution méthodologique des mathématiques au XX^e siècle. Il faut comprendre que $\mathbb{N}$ est le référent incarnant putativement la collection des entiers pour l'un quelconque des formalismes régissant la mathématique : peut-être $\mathbb{N}$ est-il le ω de la théorie ZFC, peut-être est-il un domaine – pas nécessairement identifié comme ensemble déjà – satisfaisant les axiomes de Peano. Et il faut comprendre en quel sens il est normal de penser que les entiers naïfs trouvent tous leur place dans ce putatif référent, dans ce “sac à poussière” mytique, pour parler comme Thom. Un tel regard est indissolublement un regard de logicien, de mathématicien, d'épistémologue, *et* un regard de philosophe. Le premier aspect (logicien, mathématicien, épistémologue) va de soi : la bonne intellection de la différence technique entre ω , $\mathbb{N}$ ou autre et la collection des naïfs mène naturellement à une lecture critique de la théorie des modèles, à une appréhension plus profonde et plus essentielle du théorème d'incomplétude de Gödel; récupérée, retraduite et décalée par E. Nelson, elle conduit à l'invention d'une nouvelle notion de constructivité, une notion pour ainsi dire hilbertienne et non plus brouwerienne, la *prédicativité-au-sens-de-Nelson*, exposée dans un livre de logique fort difficile (7). Le second aspect (philosophe) devrait, au fond, apparaître avec la même netteté. Le problème du remplissement de $\mathbb{N}$ par les naïfs est totalement dénué de sens si l'on ne joue pas le jeu de rêver que les formalismes suscitent des référents. Si l'on ne s'abandonne pas à la facilité à nouveau naïve de croire qu'à l'énoncé des axiomes de la théorie PA de Peano répond en quelque sorte l'apparition au moins interne d'une mystérieuse collection d'objets sans lieu spatial ou temporel qui porte la structure déclinée par ces axiomes : dans ce cas, et dans ce cas seulement, on a intellectuellement le “sac à poussière” $\mathbb{N}$, et l'on peut se poser le problème de savoir si les naïfs le remplissent. Reeb nous demandait donc de jouer le jeu de la mathématique formaliste contemporaine, d'adhérer à quelque chose d'elle qui ne se laisse absolument pas expliciter comme tel autrement que sur le mode philosophique, je dirais même, à nouveau, sur le mode *phénoménologique* : le grand précédent pour la pensée d'un tel rapport entre des référents et des actes – en l'occurrence des énonciations d'axiome – est la pensée husserlienne de la corrélation entre *noèmes* et *noèses*, ainsi que Jean Petitot l'a remarqué avant moi (8).

(7) *Predicative arithmetic*, Princeton, Princeton University Press, 1986.

(8) Voir notamment son article “Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche trans-

Ce que je veux dire, c'est que la pleine assumption intellectuelle du slogan de Reeb plaçait nécessairement celui qui la réussissait dans une attitude composite, partagée entre le niveau pratique/pré-réflexif, le niveau technique logico-mathématique, la vision épistémologique du précédent, et une évaluation philosophique de l'intentionnalité mathématique. Et c'est pourquoi cette phrase ne pouvait pas être prise comme un constat. Recevoir son sens exigeait une conversion du regard, une modification profonde de l'attitude à l'égard de la chose mathématique. Cette phrase n'était pas seulement ce qu'elle disait, mais aussi le slogan enjoignant de se déplacer jusque vers le regard, l'attitude nécessaire pour la comprendre (9). Et se mêler de prescrire essentiellement l'attitude sous-jacente au connaître, c'est certainement accomplir un geste philosophique.

Mais la relation de Reeb avec la philosophie allait au-delà de ce que je viens d'exposer. Par dessus le marché, Reeb avait un intérêt philosophique réel, autonome, indépendant, respectueux de ce que la philosophie a de propre. Lorsqu'on lui soumettait un segment de philosophie de façon trop compacte et trop ramassée pour qu'il fût comestible, comme il m'est – hélas – souvent arrivé, il se mettait en peine de la comprendre pour lui-même, en oubliant le lien peut-être hasardeux qui avait été suggéré entre ce segment et tel ou tel aspect de la problématique mathématique chère à son âme. Je me souviens ainsi qu'un jour que j'avais tenté de lui raconter la différence ontologique heideggerienne, sous je ne sais plus quel prétexte, il avait réfléchi à son propos en germanophone – car, je l'oublions jamais, l'homme était alsacien – et il avait “retrouvé” tout seul, comme Pascal les propositions d'Euclide, la possibilité de faire correspondre le *Es gibt* allemand à l'événement de l'Être selon Heidegger. Mais j'ai observé le même éveil, le même intérêt désintéressé, la même disponibilité maintes fois.

Il y aurait encore autre chose à dire sur Reeb et la philosophie, mais au fond, ce serait sur Reeb et l'existence : il était pénétré par l'importance du problème de la pluralité des langues, et de l'interposition de cette pluralité dans tout dialogue. Il était profondément sensible au fait que l'analyse non standard, entre autres choses, apportait un nouvel idiome (n'était-ce pas ainsi que Robinson, déjà, avait voulu exprimer sa finalité, croyant sans doute amadouer son public en relativisant son apport?). Il y voyait à la fois une richesse et une difficulté du non standard. Il se demandait sous tous les angles jusqu'à quel point une réelle distance de pensée pouvait s'établir entre les adeptes des idiomes concurrents, ne s'arrêtant pas aux possibilités de domestiquer la difficulté en s'installant dans des formalismes garantissant une traductibilité réputée “intégrale”, comme IST au premier chef. Il voyait bien que par delà ces codifications, il y avait une hétérogénéité entre l'intuition infinitésimale de la droite et son intuition cantorienne, qui devait en dernière analyse s'inscrire dans des façons de parler non congruentes, et que le recollement des discours sur l'objectivité constructive ne pouvait être envisagé

cendantale”, *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel éd.), 213-282, Editions TER, Mauvezin.

(9) On retrouve ici l'idée de la part pratique incluse dans la vraie connaissance, idée néo-platonicienne notamment.

a priori que sur le mode problématique. Il métaphorisait spontanément cette situation par celle de l'herméneutique protestante de la Bible, en évoquant à mes oreilles avides cette activité particulière dont j'ai oublié le nom technique, et qui consiste pour l'herméneute chrétien à reconnaître dans tel ou tel fragment de l'ancien testament l'annonce du nouveau, ou du message christique : il voyait bien que là aussi, c'était seulement dans l'habitation d'une unilatéralité jamais remise en question qu'on pouvait croire avoir ainsi établi un *continuum* là où il y avait d'abord et surtout, en vérité, de la distance et le plus grand risque de l'incompréhension. C'est ainsi qu'à mots couverts nous parlions du différend judéo-chrétien, dans sa voiture, en persistant quelques minutes dans un emplacement interdit devant l'aéroport d'Entzheim.

Est-il besoin de dire à quel point un tel souci témoigne de la manière philosophique de vivre, du moins de ce qu'elle devrait être ? La philosophie, c'est ou cela devrait être avant tout la conscience du référentiel à quoi s'adosse tout ce qui se dit ou se vit, et le désir de convoquer une discussion universelle qui prenne en compte la dépendance des attitudes de l'existence sur les référentiels : le désir d'une relativisation de la relativité humaine qui la respecte absolument. Reeb vivait l'aventure du non standard à un niveau philosophique.

Tout ce que je viens de dire, à mon sens, converge vers cette idée simple, mais dont il faut mesurer l'importance, que Georges Reeb était un maître. Cela veut dire d'abord et avant tout qu'il a suivi un projet intellectuel, et qu'il a construit pour lui-même et pour les autres une possibilité de travail : Georges Reeb était un maître *de mathématique*, et il l'a marqué en inventant l'école française d'analyse non standard après sa première carrière de géomètre différentiel. Mais cela veut dire aussi que ce projet intellectuel se dépassait naturellement vers une façon philosophique de comprendre et d'assumer les savoirs, et ultimement, vers une attitude à l'égard de la pensée de l'autre homme qui relevait de l'ordre éthique. Cette face de la personnalité de Georges Reeb se manifestait d'ailleurs de manière très évidente dans le souci, l'attention, la protection dont il gratifiait ses élèves. Les mathématiques et l'analyse non standard définissaient pour lui un espace où des rencontres d'une certaine qualité avaient lieu, et toute personne rencontrée par Georges Reeb dans cet espace avait le sentiment d'avoir gagné en lui une bienveillance et une complicité définitive.

Je me résume : le maître se définit par trois choses : la construction intellectuelle, l'inscription du travail dans le cadre philosophique de la pensée et la générosité. Georges Reeb fut – et reste, parce que dans ces matières, la mort n'est pas victorieuse – mon maître.

GEORGES REEB ET L'UPR "FONDEMENTS DES SCIENCES"

A propos d'un procès visant à la fois l'Analyse Non Standard et l'intuitionnisme

Hervé BARREAU

Directeur de Recherche au C.N.R.S.

Pendant vingt ans, Georges Reeb a été un fidèle participant des différents Séminaires qui se sont tenus dans le cadre des "Fondements des Sciences". Mais, pendant les douze dernières années de sa vie, il a été bien davantage : il a assuré le leadership moral du Séminaire "Mathématiques pures et appliquées", qui fut certainement le Séminaire le plus original de l'UPR ⁽¹⁾ (d'abord E.R. ⁽²⁾) "Fondements des Sciences" du CNRS, laquelle a succédé, à partir de 1982, à l'ancienne R.C.P. ⁽³⁾ du même nom. Cette formation, il m'avait encouragé à en demander la création. A ce sujet je me souviens encore d'une conversation qui fut très brève, car toutes les conversations que j'eus avec Reeb furent brèves, même si elle furent parfois entrecoupées de longs silences, comme lors de notre retour du Colloque de Cerisy-La-Salle, dans sa voiture, en septembre 1990. C'était donc en avril 1982, sous la pluie, Place de l'Université, à Strasbourg : il voulut me faire comprendre qu'il fallait que les "Fondements des Sciences" passent à une vitesse supérieure. Je ne demandais bien sûr que cela, mais encore nous fallait-il des alliés : Pierre Cartier le fut pour la branche mathématique, comme Bernard Metz s'en chargea pour les sciences de la vie, tandis que René Taton, dont je me suis toujours émerveillé qu'il ait fait confiance à un philosophe, voulut bien promouvoir une équipe de recherche en épistémologie et en histoire des sciences. C'était donc en 1982, quand l'avenir semblait sourire à une discipline que la section de Philosophie au CNRS avait eu la bonne fortune d'abriter.

Les orages ne tardèrent pas à venir. Certes l'examen "à deux ans" ⁽⁴⁾ fut très positif dans les sections de Philosophie et de Physiologie, mais il fut sévèrement répressif en Mathématiques. J'ai gardé, dans les Archives, la fameuse motion n° 6 de la Commission 03 du Comité National, session d'automne 1984, qui énonçait une condamnation dans les termes inimitables qui sont ceux de tribunaux de ce genre : "La Commission 03 émet des réserves très sérieuses sur les thèses présentées par Monsieur Barreau et, sauf évolution positive, ne voit pas comment elle pourra renouveler son soutien à cette formation. Oui 20, Non 0, Abstention 0". Le secrétaire de la Commission, auteur présumé de la dite motion, se garda

(1) Unité Propre de Recherche.

(2) Equipe de Recherche.

(3) Recherche Coopérative sur Programme.

(4) Une Unité de Recherche est créée pour 4 ans. A mi-parcours il y a un examen.

© L'OUVERT N° spécial G. Reeb (1994)

bien de m'en informer, si bien que je ne pris connaissance de l'incident que bien plus tard, quand le compte-rendu officiel me parvint. Bien entendu les thèses incriminées n'étaient pas les miennes (je ne les aurais pas formulées moi-même de cette façon); je m'étais borné, après de nombreuses discussions, à leur donner la forme impersonnelle et un peu énigmatique qui oblige le contradicteur à n'en fournir qu'une caricature, s'il entreprend de les démolir, et qui sert de repérage utile dans un groupe de recherche. Ces thèses et questions étaient au nombre de 12, et voici les 5 premières :

1. La théorie de Nelson (IST ⁽⁵⁾) expose le vrai Calcul infinitésimal.
2. Non seulement Leibniz et Carnot sont de brillants précurseurs de Nelson, mais on ne trouve chez eux aucune contradiction avec ce dernier.
3. Skolem, Gödel et les logiciens qui ont élaboré la Théorie des Ensembles sont les inspirateurs insignes du mouvement qui s'est concrétisé chez Robinson et Nelson (IST).
4. Intuitionnisme et Formalisme doivent se réconcilier, contrairement à ce qui fut le cas dans le passé. Ce sont deux manières "complémentaires" d'aborder l'objet mathématique.
5. La perspective de cette réconciliation implique une saine vision de l'IST de Nelson.

Encore aujourd'hui, il me semble que rien de plus raisonnable et de plus consensuel n'est sorti du Séminaire "Mathématiques pures et appliquées". Mais sous la plume du Rapporteur, qui prit soin de ne pas emprunter la forme brutale qui convient à une Motion, ces thèses, qui avaient un parfum d'originalité, bien propre à justifier l'existence d'une nouvelle équipe de recherche, prenaient l'allure "apologétique" qui, comme on le sait, est l'arme la plus sûre de dérision dans les débats scientifiques. Voici donc ce Rapport qui est le digne précurseur de la Motion n° 6 :

"Les préoccupations de l'E.R. "Fondements des Sciences" sont très électiques. Pour la part qui relève de la compétence de notre Commission, il s'agit quasi-exclusivement d'une étude épistémologique, avec certains aspects historiques et didactiques, de l'Analyse Non Standard (ANS).

Ce choix d'une branche marginale de la discipline s'accompagne d'une volonté explicite de promouvoir l'intuitionnisme en tant que doctrine opposée au formalisme dominant dans les mathématiques contemporaines. Cette approche conduit naturellement à une attitude plus apologétique qu'objective, ainsi qu'en témoignent les douze thèses et questions qui constituent le noyau central de réflexion de la sous-équipe "Mathématiques pures et appliquées" (voir les thèses n° 1 à 5 notamment, dans le rapport scientifique ci-joint).

Le rapporteur est dans ces conditions amené à formuler des réserves sur l'activité scientifique de cette formation."

Le Rapporteur avait sans doute prévu qu'un de ses complices suggérerait la

(5) Internal Set Theory.

transformation de ses propres "réserves" en "réserves très sérieuses". Le choix des qualificatifs utilisés dans le Rapport était bien propre, en effet, à susciter la surenchère dans l'indignation vertueuse et collective, qui semble être le prix social, assez souvent risible, à payer pour garantir l'honnêteté scientifique de la grande majorité des membres des Commissions du CNRS. Les conversations que j'ai eues avec quelques membres de la Commission en question m'assurent que je n'exagère en rien l'honnêteté, doublée d'une certaine naïveté, de ces honorables collègues.

Reste qu'il fallait réagir. Reeb me conseilla de prendre l'avis de Cartier, avec qui j'eus une longue conversation dès septembre 1985. La conduite à tenir était simple : il fallait demander une entrevue au Directeur Scientifique du Département et le prier, ainsi que le Président de la Commission, de faire nommer un nouveau Rapporteur à la prochaine session. J'eus la chance d'obtenir satisfaction sur ces deux points. Et l'E.R. eut la chance (relative) que le nouveau Rapporteur désigné ait été Alain Connes, Médaille Field, bien connu pour son antipathie pour l'ANS, qui lui avait fait perdre un temps précieux dans ses recherches néanmoins couronnées de succès.

Le Rapport d'Alain Connes fut, bien entendu, à la hauteur de sa réputation. Le voici (avec quelque incertitude due à une reprographie fautive en ce qui concerne le dernier paragraphe, dont le contenu est du reste le moins "scientifique") :

"Pour la part qui relève de la section 03, l'activité de recherche de l'équipe "Fondements des Sciences" est centrée autour de l'Analyse non standard. Comme il s'agit d'une théorie séduisante, en particulier par le sens qu'elle donne à la notion d'infiniment petit il me semble nécessaire de mettre en évidence les points suivants :

(1) Le vice principal de l'analyse non standard est qu'il est impossible d'explicitier un seul nombre non standard, c'est un théorème mathématique. On peut parler de l'ensemble de ces nombres mais leur utilité en tant qu'entité mesurable est nulle.

(2) La séduction de l'analyse non standard est due en grande partie à la création d'un vocabulaire suggestif; la géométrie différentielle s'est bien gardée de céder à cette tentation, ce qui aurait été facile par exemple dans la théorie des solutions asymptotiques aux équations différentielles.

*(3) Il existe un outil puissant : les ultraproducts, qui permet d'exploiter au maximum l'axiome de choix, il est peu connu des mathématiciens et l'analyse non standard est **strictement** contenue dans son utilisation.*

Il me semble que la vulgarisation de l'analyse non standard peut rendre service en faisant connaître (3) mais devrait prévenir de (2)... Mais l'équipe est à voir avant la décision définitive."

On doit reconnaître à Alain Connes le mérite de ne s'être pas fait trop prier pour venir lui-même à Strasbourg, où il rencontra le Séminaire dans une réunion mémorable du 4 mars 1986. Au cours d'une séance qui dura trois heures, le visiteur put s'assurer du sérieux des chercheurs qui étaient réunis là. Il faut ajouter que les persécutions cessèrent, du moins du côté des mathématiciens qui laissèrent à

d'autres le soin de prendre le relais.

Que pensait Reeb du Rapport de Connes reproduit ci-dessus? Comme je lui demandais de me faire connaître sa réaction par écrit, il me fit parvenir la réponse suivante :

"Rapport Connes

Le point (3) est parfaitement exact et parfaitement connu. Œuvrer pour faire connaître (3) ou œuvrer en ANS, quelle différence ?

Si dans (1) on remplace "vice" par "fait" on est d'accord sur la première phrase ; mais je continuerais ainsi : "Adoptant la vue I.S.T. on ne peut pas parler de l'ensemble des nombres standard. C'est en cela que réside l'utilité".

Au point (2), j'oppose l'avis d'un spécialiste d'asymptoties : "L'article de Zvonkin Shubin est une contribution importante à la littérature de perturbation singulière, il explique bien l'utilité et la beauté de l'approche non standard" Howes, Math. Rev. Le point (1) a été clairement perçu par Brouwer. Le rapport retarde de 10 ans sur le travail de l'équipe.

Reeb".

Cette note est, par elle-même, suffisamment éloquente et explique l'attitude de retrait qu'adopta Reeb pendant la visite de Connes. Elle se trouve davantage explicitée cependant dans une autre note que Reeb voulut bien rédiger à ma demande, à l'intention du Rapporteur (il s'agissait donc du 3^e!) qui devait présenter l'E.R. à la session d'automne 1986, en vue de son renouvellement :

"Outre ma participation à des activités qui ressortissent au programme de l'E.R., il me semble opportun de faire part de quelques réflexions d'ordre général, concernant les expertises en général, suivies d'applications au cas particulier de l'E.R. ("Fondements des Sciences") :

a) Si à côté des experts, la défense ne peut aligner des contre-experts, alors la défense est acculée à "démontrer", à établir des "failles" dans l'attaque. Dans notre cas nous aurions la charge d'établir la désolante vacuité du premier Rapport et à montrer que le deuxième rapport, mathématiquement parfait, trompe seulement par ses silences

b) Si des contre-experts existent, sollicités ou notoires, alors on n'est plus dans la situation a); il appartient alors aux experts de l'accusation d'infirmier les dires des contre-experts. Dans notre cas je citerai comme contre-experts notoires : Shubin-Zvonkin (1984, Progresses in Math.), Howes (Math. Rev. 1985), Fenstatt (1986)... et comme experts sollicités quelques 15 membres étrangers des jurys de thèses soutenues à Mulhouse et Strasbourg, ainsi que le rapport E. Nelson sollicité par l'UFR Mathématiques de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I). Enfin la Commission d'évaluation des Universités s'est penchée sur le problème de l'ANS.

c) Notre E.R. s'occupe davantage d'histoire du Calcul infinitésimal que d'ANS. Les contre-experts cités en b) sont, quant à quelques -uns, très connus pour leur approfondissement de l'histoire du Calcul différentiel. Peut-on en dire autant des Rapporteurs de la Commission 03 ?

d) *Il me semble que la commission de Mathématiques n'a pas été informée par les deux Rapports mentionnés ci-dessus de l'extension (au sens logique du terme) de la contre-expertise.*"

Encore une fois, les mathématiciens de la Commission 03 admirent que nous étions respectables et même, pendant deux ans, m'invitèrent à certains de leurs conciliabules. Je garde donc de l'aventure, je dois dire, une impression plutôt positive à leur égard : à quel scientifique n'arrive-t-il pas, par souci de ne pas compromettre la gestion de sa discipline auprès de censeurs toujours à l'affût, de faire porter sa défiance à tort et de se laisser abuser ? Je suis prêt à admettre que ces adversaires sont sortis d'une difficulté manifeste avec une certaine élégance et je souhaiterais qu'il en fût toujours de même dans la grande maison qu'est le CNRS.

Mais puisqu'il doit être question ici de Reeb plus que du CNRS, je dois ajouter qu'il était juste en somme que Reeb n'ait pas ménagé son soutien dans la mauvaise querelle qui nous avait été faite. Car, si nous avions été sous le feu d'accusations injustes ou seulement partiales, c'est avant tout pour nous être montrés ses disciples. Il me revient maintenant de fournir la preuve de cette affiliation, que nous partagions tous d'une façon ou d'une autre, quitte à nous démarquer parfois, à tort ou à raison, des affirmations du Maître. J'ai sous les yeux un preprint de Reeb, daté du 3 janvier 1983, et qui doit être le texte d'une conférence qu'il aurait faite à cette époque soit en Allemagne (Oberwolfach, Mannheim), soit en Espagne (Barcelone, Murcia), à moins que ce ne soit en France (Paris, Poitiers). Ce texte s'intitule *Intuitionnisme, Formalisme, Mathématique non standard et Infinitésimaux*. On va voir que Reeb, qui n'avait rien à perdre, était beaucoup plus provocateur que nous nous étions permis de l'être, assujettis que nous étions aux instances soupçonneuses du CNRS.

Reeb avait constitué, en effet, "les pièces d'un dossier", dont on va voir qu'elles soutenaient fort bien les pas d'une conférence destinée à convaincre sur son approche de l'ANS, et qui portaient sur "les amours orageuses" entre le formalisme et l'intuitionnisme. Ces pièces sont au nombre de 11, et je vais en faire défiler le contenu, en y ajoutant les citations qui, à mon sens, sont les plus significatives pour en souligner ou en préciser la portée, et, parfois, quelques commentaires. Les titres en italique sont de Reeb, à un verbe auxiliaire près.

(1) *Intuitionnisme et formalisme sont nés simultanément et se sont développés parallèlement*. Reeb mentionne les couples Poincaré-Frege, Brouwer-Hilbert, Apéry-Dieudonné, H. Weyl-Bourbaki, Heyting-Bernays, et remonte à Kant-Bolzano, en regrettant de ne pouvoir, "par manque de compétence", "remonter très loin dans le temps". Je crois qu'il aurait pu ajouter, mais avec la prudence qui convient quand il s'agit de transporter dans le passé des oppositions qui n'ont pris leurs traits décisifs que plus récemment : Descartes-Leibniz, et même Aristote-Platon (ou plutôt les successeurs immédiats de Platon à l'Académie). Quoi qu'il en soit, il s'agit bien, semble-t-il, d'un genre de récurrence constante dans la conception

que l'on peut se faire des mathématiques.

(2) *Intuitionnisme et formalisme se sont épaulés*. A vrai dire, j'ai écrit "se sont toujours épaulés"; j'hésite quelque peu à reprendre l'affirmation complète téméraire. Mais l'apport mutuel des deux conceptions apparaît clairement dans les travaux herculéens de Hilbert et Brouwer..."

(3) *Que serait l'intuitionnisme sans le formalisme?*... Contrairement à ce que ressent un mathématicien peu informé, la critique de Brouwer ne nie en aucune manière la beauté, la cohérence, la pertinence, l'utilité de la construction formalisée. Cette critique refuse de parer l'édifice de vertus qu'il ne possède pas, que ses constructeurs, en personnages avisés et érudits, ne revendiquent pas pour le formalisme, mais que la "rumeur publique" se complait à louer".

(4) *Que serait le formalisme sans l'intuitionnisme?* Un peu ce que serait le procureur sans délinquant. Plus sérieusement, le fonctionnement d'instances mathématiques (académies, commissions, comités de lecture, textes mathématiques formalisés) peut, à l'occasion, donner un avant-goût de la fiction sur laquelle porte notre interrogation. Ce fonctionnement donnerait ce faisant aussi un aperçu des conséquences d'une telle utopie". Il est amusant de relever que ce texte est, comme il est évident, antérieur à l'épisode rapporté plus haut sur l'attitude de la Commission 03 du CNRS.

(5) *La matérialité des amours orageuses et la narration des conflits et guerres sont trop connues pour nécessiter des commentaires*. "A voir l'ancrage des préjugés il faut croire que la lecture de Brouwer et Hilbert stagne à un niveau bien superficiel". Il convient d'ajouter ici que Reeb, aidé par J. Harthong, a puissamment œuvré pour qu'on s'élève au-dessus de ce niveau superficiel; voir, en particulier : J. Harthong et G. Reeb "Intuitionnisme 84" dans *La Mathématique Non Standard*, Ed. du CNRS, 1989, 213-252, notamment dans l'Annexe 1 de l'article (244-245) consacré aux quatre "constatations" de Brouwer (*). Reeb s'est donc rendu compte que la joute Brouwer-Hilbert était, en réalité, mal connue et s'est appliqué à en préciser les enjeux.

(6) *L'irruption d'objets idéaux au sein du formalisme fut diagnostiquée (voire saluée) par Hilbert*. ... "Essayons de mieux cerner la notion d'objet idéal et d'objet concret. C'est évidemment la réflexion intuitionniste qui permet la perception de ces deux notions ... Notre regard intuitionniste permet de reconnaître en 0, 1, 2, 3 ... écrits par M.F. (Mathématique Formalisée) les répliques de nos entiers intuitionnistes (préalables à toute mathématique) notés aussi 0, 1, 2 ... Ces habitants de $\mathbb{N}$ nous les appellerons *concrets* ou *naïfs*. Voici maintenant comment les entiers idéaux vont forcer l'entrée. Considérons le discours suivant de M.F. (discours que nous n'oserions écrire tel quel dans le jargon intuitionniste) :

(*) article reproduit ci-après.

Définition : x, y, z, n désignent des entiers $> 0, n \geq 3$; x, y, z, n sont variables.

On pose $a = 0$ si $x^n + y^n \neq z^n$ (quels que soient x, y, z, n)
et $a = \text{Minimum de } x + y + z + n$ pour x, y, z, n formant l'ensemble des solutions de $x^n + y^n = z^n$, au cas où cette équation aurait des solutions.

Théorème : a existe et est unique.

La définition et le théorème concernent le grand théorème de Fermat et font partie du bagage, presque élémentaire, de M.F. Mais, au jour où j'écris ⁽⁶⁾, rien ne permet d'affirmer que a est naïf. En ce sens a est (ou plus prudemment ⁽⁷⁾ pourrait être) un "intrus" ou "objet idéal".

Hilbert exprime avec fougue l'idée que renoncer à la définition de a (et au théorème qui l'accompagne) au bénéfice de l'éviction des intrus revient à payer un prix exorbitant. Mais personne (Brouwer moins que tout autre) ne conteste ce point. Cependant une légende a cours dans la troupe des mathématiciens formalistes – bien qu'officiellement on ne l'évoque jamais et pour cause – selon laquelle a ne peut être que naïf. *C'est la légende (et pas la définition de a) qui provoque la critique intuitionniste.*"

(7) *Un regard intuitionniste peut être posé sur la mathématique formelle.* "Il est à la base de la réflexion de Hilbert et Brouwer. Une conspiration du silence occulte ce fait simple et premier ... Pourtant il est une évidence : la mathématique formalisée, comme une œuvre d'art (un sonnet par exemple), est une construction concrète et comme telle une chose matérielle. On peut en jouir de l'intérieur (comme le font les mathématiciens dans le premier cas ou les lecteurs poètes dans le cas du sonnet) ou on peut le regarder de l'extérieur comme un objet matériel (signes typographiques imprimés). Rien n'exclut que ce regard puisse être propice à la compréhension interne de l'œuvre (il n'est pas nécessaire de savoir lire pour apprécier un sonnet, mais ...)."

(8) *Les intrus sont des objets non standard.* "L'affirmation est trop brutale pour être vraie sous cette forme, une mise au point nécessiterait (mais mériterait) des précisions techniques assez longues. Mais les "intrus" évoqués en (6) sous le nom d'entiers non naïfs sont des entiers infiniment grands fort présentables. Le plus petit contre-exemple à Fermat – nommé a en (6) – est un candidat à ce titre (mais n'est pas encore élu ⁽⁸⁾). Un tel entier infiniment grand vérifie les propriétés qui suivent :

$\omega > 1, \omega > 2 \dots \omega > 10^6$, si $b \in \mathbb{N}$ est naïf, alors $\omega > b$.

$\omega^2 > \omega$, il y a un nombre premier $p_\omega > \omega$, cet entier p_ω est infiniment grand etc.

La routine fait constater maintenant

a) que les entiers naïfs peuvent être enfermés dans un ensemble fini : par exemple dans l'intervalle fermé $[0, \omega]$, ω infiniment grand;

b) les entiers naïfs ne constituent pas un ensemble. En effet si A était l'ensemble

⁽⁶⁾ et encore moins en 1994! (Note de l'auteur).

⁽⁷⁾ la prudence de Reeb se trouve justifiée en 1994!

⁽⁸⁾ et n'a plus de chance de l'être en 1994!

des naïfs, on aurait les propriétés suivantes : $0 \in A, N \supset A$ et $a \in \mathbb{N} \implies a+1 \in \mathbb{N}$. On en déduirait $A = N$.

Etant en possession d'infiniment grands, nous pouvons fabriquer dans $\mathbb{R}$ lui-même ($R \supset N$) des infiniment petits. Et dès lors nous sommes à pied d'œuvre pour un calcul infinitésimal susceptible d'être perfectionné sans peine."

(9) *Les infinitésimaux sont des objets par excellence du discours mathématique.*

“Depuis vingt ans que la mathématique non standard teste les infinitésimaux, leur efficacité se confirme. A notre sens un excellent test – sur une propriété classique – de cette efficacité est la version infinitésimale du théorème affirmant que les racines d’un polynôme dépendent de façon continue de ses coefficients. Insistons encore une fois sur les raisons du succès des méthodes non standard. Les infinitésimaux (numériques) sont des nombres réels à part entière, des éléments de $\mathbb{R}$; ce ne sont pas des parasites rajoutés à l’édifice primitif.”

(10) *L'irruption des infinitésimaux répond à une ardente nostalgie.* “Cette nostalgie a probablement culminé dans les écrits de Fraenkel. Mais surtout nous pouvons suivre, tel un fil rouge, sans interruption l’expression de cette nostalgie depuis la fin du XVIII^e siècle jusque vers 1960, date de naissance du véritable calcul infinitésimal.”

(11) *L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, où, conformément aux explications de (8) nous avons distingué des éléments non naïfs, ω par exemple, permet une arithmétique des infiniment grands très encourageante.*

“Les entiers $\omega - 10, \dots, \omega - 1, \omega, \omega + 1, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega \dots \omega^{\omega^{\dots^\omega}}$... en donnent une idée. (Mais dans le cas de $\mathbb{N}$ nous n’avons rien à construire, nous profitons en habiles stratégies du labeur dépensé par Bourbaki pour construire $\mathbb{N}$).

Ce premier succès, dont l'impact est forcément modeste devant la perfection de la construction de Cantor, conduit à la percée décisive :

comme $\mathbb{R} \supset \mathbb{N}$, les inverses $1/\omega, \dots, 1/\omega^\omega \dots$ sont des réels non nuls : de vrais infiniment petits.

Dès lors les rêves les plus téméraires des Euler...Véronèse deviennent réalité.”

Cette marche on onze pas, dont certains exigent du lecteur qu'il n'adopte ni le point de vue intuitionniste classique ni le point de vue formaliste classique, mais qu'il sache passer de l'un à l'autre en "habile stratégie", sachant que la mathématique doit savoir tirer profit de tous ses ouvriers, est susceptible de dérouter. Mais Socrate déjà déroutait ses disciples, alors qu'il s'agissait du domaine éthique. Dans le domaine mathématique aussi, il n'est pas défendu d'user de dialectique, une dialectique qui est plus subtile que celle de Hegel, puisqu'elle se garde de faire éclater les concepts et se contente de les comparer sans leur faire violence. Reeb a repris souvent, devant des auditoires variés, une telle dialectique, qui avait pour effet de couper le souffle à quelques uns et d'enflammer certains autres de colère. Dans les deux cas, le dialecticien avait réussi et la jubilation qu'il en ressentait le rendait d'autant plus ouvert aux commentaires et aux critiques. C'est cette philosophie pratique de l'usage des mathématiques qu'il nous communiquait, celle

dont la version plus savante est exprimée dans l'opuscule édité par l'IRMA (1979) : *La mathématique non standard vieille de soixante ans ?*

Avons-nous fait fructifier convenablement cette philosophie pratique, dont E. Nelson ne cachait pas, dans le Rapport que lui avait demandé l'UFR de Mathématiques de Strasbourg, qu'elle lui semblait avoir remarquablement ouvert les yeux des non standardistes mulhousiens et strasbourgeois ? D'autres que moi sont beaucoup mieux placés pour en juger. Mais je veux relever, du moins, que l'E.R. (devenue U.P.R.) "Fondements des Sciences", a contribué à faire connaître ou à "vulgariser" comme on voulait bien nous le concéder, l'ANS de différentes façons. D'abord par l'ouvrage, dont Jacques Harthong est le co-éditeur, *La Mathématique Non Standard*, paru aux Editions du CNRS en 1989, et qui reflète plusieurs années de notre travail, ouvert à des contributions remarquables de chercheurs français et étrangers, non affectés à l'U.P.R. On a déjà eu l'occasion d'y faire référence à propos de l'article de J. Harthong - G. Reeb "Intuitionnisme 84". Il faut souligner aussi que l'ouvrage de Jean-Michel Salanskis (le premier chercheur à avoir rejoint l'E.R.), *L'Herméneutique Formelle : l'infini, le continu, l'espace* (Editions du CNRS, 1991) fait une large part à l'ANS, dont il nourrit sa propre philosophie mathématique. Enfin l'ouvrage collectif, *Le Labyrinthe du Continu*, Springer-Verlag 1992, dont J.-M. Salanskis et H. Sinaceur sont les co-éditeurs, et qui constitue les *Actes* du Colloque de Cerisy-La-Salle dont j'ai fait mention plus haut, contient, outre une IV^e partie entièrement consacrée à *l'approche non standard du continu : théorie et pratique* dans une perspective qui affiche ouvertement sa filiation reebienne, de nombreux travaux d'ordre historique et philosophique qui ont été élaborés dans le cadre du Séminaire "Mathématiques pures et appliquées". A ce genre appartiennent, qu'ils figurent dans l'un ou l'autre volume, les articles de R. Peiffer-Reuter sur Véronèse, l'article de J.-C. Chirollet sur Poincaré, celui de J.-P. Wurtz sur Leibniz, et les miens sur Aristote et Carnot. Je ne crois pas que beaucoup de formations du CNRS aient produit, en si peu de temps, avec si peu de moyens matériels et humains, une production comparable, en qualité et en quantité. Tous nous le devons au profond intérêt que Georges Reeb a manifesté pour les travaux qui prolongeaient les siens.

Cet article-ci ne pouvait être un bilan. Il est trop tôt pour établir ce bilan. Mais en montrant, de façon suffisante je l'espère, comment des travaux importants sont sortis d'une audace de Georges Reeb, qui avait commencé par faire scandale, je crois que ce témoignage peut constituer une contribution à un hommage, qui doit avoir de multiples aspects. Car, pour ceux qui ont connu Georges Reeb à l'UPR "Fondements des Sciences", ce n'est pas seulement la perspicacité du mathématicien qui frappait, mais la profondeur du mathématicien philosophe de sa discipline, et la générosité d'un Maître plus soucieux de faire jaillir la pensée chez les autres que d'imposer la sienne. C'est pourquoi, pour tous ceux-là, sa disparition suscite une reconnaissance pour sa mémoire qui est proportionnelle au deuil ressenti pour sa personne.

INTUITIONNISME 84

Jacques HARTHONG et Georges REEB

Avertissement ajouté en 1994 pour la publication par l'Ouvert

Dans le texte qui suit (aux paragraphes 10 – 12), sera exposée brièvement, pour les besoins argumentatifs des auteurs, la critique faite par le mathématicien L. E. J. Brouwer au programme de Hilbert de formalisation des mathématiques. Dans la formulation de sa critique, Brouwer a très souvent utilisé le “théorème” de Fermat comme argument, en tant que prototype de conjecture arithmétique indécidable. Afin de conserver la fraîcheur du style original et de mieux marquer son caractère historique, nous avons conservé cette manière imagée de se faire comprendre, là où le spécialiste moderne de logique aurait tout simplement fait référence aux théorèmes d'incomplétude. Aujourd'hui, en 1994, une lecture superficielle associée à un battage médiatique récent, pourrait produire le sentiment que tous ces arguments seraient périmés, puisque le théorème de Fermat semble près d'être démontré. Je me sens donc obligé de formuler l'avertissement suivant.

a) Le théorème (la conjecture) de Fermat n'était chez Brouwer qu'un prototype possible de conjecture indécidable, choisi pour sa célébrité, afin d'illustrer plus concrètement ou plus nommément l'argumentation.

b) L'existence d'une démonstration de ce théorème n'enlève absolument rien aux arguments avancés et peut même, au contraire, leur donner un relief supplémentaire, comme le montrera aisément toute lecture non superficielle.

Le texte d'*Intuitionnisme 84* est reproduit ici dans sa version de 1987 sans la moindre modification.

J. Harthong

1. Cet article répond à un autre, écrit par Abraham Robinson, et dont le titre était *Formalism 64* [1]. On présente habituellement le formalisme et l'intuitionnisme comme des ennemis irréductibles, le formalisme comme le vainqueur, l'intuitionnisme comme le vaincu. Nous pensons que ce débat, déjà ancien, est complètement faussé par bien des malentendus et beaucoup de mauvaise foi, et surtout par l'extrême confusion dans laquelle ont baigné toutes ces discussions. Pour nous, l'essentiel du travail dont nous rendons compte ici aura consisté à clarifier les termes de ce débat. Ainsi, il nous a paru remarquable que Robinson, dans l'article cité, ait de certains problèmes une approche très voisine de la nôtre, alors qu'il se présente comme formaliste; nous serions tentés d'en déduire que toutes ces étiquettes ne signifient pas grand chose et la vraie question est de savoir ce qui, *derrière les étiquettes*, a motivé cette guerre idéologique.

Quoi que vous puissiez penser de cette expression certes un peu brutale, elle exprime néanmoins une des difficultés du débat; car le mot "formalisme", qui a été traité à toutes les sauces, est maintenant trop ambigu pour être employé seul, sans épithète. Aussi sommes nous amenés, et même contraints, à distinguer la simple méthode formaliste, qui est une pratique, et l'idéologie formaliste; en effet, s'il y a une idéologie intuitionniste et une idéologie formaliste qui s'affrontent, l'intuitionnisme bien compris (le nôtre par exemple), ne peut rien trouver à redire à l'emploi, *également bien compris*, de la méthode formaliste. Le but de cet article est donc justement d'expliquer ce que sont "l'intuitionnisme bien compris" et "le formalisme bien compris". Nous ferons aussi volontiers la distinction entre le formalisme historique, c'est à dire les positions exprimées après mûre réflexion par les créateurs du formalisme tels que Hilbert ou Fraenkel, et la vulgate formaliste d'aujourd'hui. Nous vous prévenons tout de suite que nous n'avons aucun souci de fidélité doctrinale à aucune école constituée, et notre position résulte surtout d'une certaine lecture (que vous pourrez juger toute personnelle, nous n'y voyons aucun inconvénient) des textes classiques de l'intuitionnisme, notamment de Brouwer. Ainsi, comme Robinson qui se demandait en quoi peut consister le formalisme de 1964, nous nous demandons ce que pourrait être l'intuitionnisme de 1984. Il nous est apparu que, loin d'être une doctrine depuis longtemps dépassée, comme le veut un préjugé répandu, l'intuitionnisme est plus actuel que jamais; au fond, c'est simplement la position philosophique de ceux qui ne croient pas qu'on puisse une fois pour toutes enfermer la mathématique dans un dogme figé, que par exemple l'invention de l'ordinateur, qui est un phénomène technologique et historique, peut modifier la mathématique comme l'usage (par Galilée) de la lunette a transformé la mécanique.

2. Voici donc — autant annoncer la couleur tout de suite — nos principales thèses : nous considérons

a) que la mathématique formelle (la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, qu'on nous a toujours présentée, lorsque nous étions étudiants et naïfs, comme le fondement absolu et éternel de la mathématique) n'est qu'une théorie scientifique éventuellement sujette à la réfutation (nous dirons plus loin comment),

une simple interprétation d'une réalité qui lui est extérieure, et non la réalité mathématique elle-même;

b) que ce qu'il y a de scientifique dans la mathématique, c'est l'articulation entre la théorie (quelle qu'elle soit) et cette réalité, et non le caractère formel et abstrait de la théorie qui n'est qu'un instrument;

c) que cette articulation entre la théorie et la réalité repose sur la méthode expérimentale dans les sciences de la nature, mais sur la méthode constructive dans la mathématique;

d) que, l'idéologie formaliste ayant nié cette réalité extérieure à la théorie en prétendant que la seule réalité mathématique est la théorie formelle elle-même, sa domination écrasante pendant un demi-siècle a eu pour conséquence de prendre cette théorie beaucoup trop au sérieux, d'en oublier toute la relativité historique et sémantique, d'en faire un dogme pesant et tyrannique, une langue de bois qui interdit toute expression personnelle, qui change le travail du mathématicien en publications standardisées et insipides, et les chercheurs en robots.

Le lecteur habitué aux classiques de l'intuitionnisme ne reconnaîtra peut-être pas dans ce qui précède ses thèmes favoris. Nous pourrions lui répondre que c'est justement pour cela que nous avons intitulé cet article *Intuitionnisme 84*; mais cela effacerait le plus intéressant de cette histoire : en effet, nous entendons prouver ici-même que tout cela figure déjà chez Brouwer, implicitement, mais irréfutablement.

3. A vrai dire, les idées de Brouwer, telles qu'il les a exprimées, se cristallisent autour du principe du tiers exclu; à notre avis, il faut avant tout, si on veut pénétrer la pensée de Brouwer, chercher le sens que ce principe avait pour lui. Si au contraire, comme certaines traditions l'ont fait par la suite, on donne un sens étranger au principe du tiers exclu, et qu'on traduit la pensée de Brouwer avec ce faux sens, on obtient des idées qui sont très faciles à tourner en dérision, mais ce procédé n'est guère honnête. Nous montrerons que les critiques qu'il a faites à l'encontre de ce principe correspondent bel et bien aux thèses a), b), c) que nous avons présentées ci-dessus (tout ce que nous avons ajouté, ce sont des conséquences inéluctables que Brouwer n'a pas tirées explicitement). A cause de ce malentendu, de cette incompréhension, on a retenu de Brouwer le refus de toute logique bivalente, un refus non motivé et qui par conséquent paraît gratuit, comme le caprice d'un fou. Or Brouwer n'a jamais interdit que l'on construise des *théories* à partir d'une logique bivalente, il a seulement dit que cette logique bivalente n'est pas déjà inscrite dans la *réalité*, qu'elle est une création de l'esprit humain, qui aime la simplicité, et qu'à ce titre les mathématiciens peuvent l'introduire dans leurs créations, mais non prétendre que la nature lui obéit. Voyons cela de plus près.

4. Le principe du tiers exclu est généralement énoncé sous la forme simple mais ambiguë que voici :

Pour toute proposition P , ou bien P est vraie, ou bien non P est vraie, et il n'y a pas d'autre possibilité.

Mais faute de s'être entendu sur le sens des mots *vrai* ou *faux*, cela peut s'interpréter n'importe comment. On trouve le même défaut dans la formulation équivalente et tout aussi classique :

Si une proposition P est contradictoire, (c'est à dire si ses conséquences logiques conduisent à une absurdité) alors non P est vraie.

Si maintenant nous exprimons ce même principe sous une forme plus soignée et plus précise, qui élimine toute l'ambiguïté, on obtient suivant les cas des énoncés justes ou absurdes, mais sans la moindre discussion possible. L'intuitionnisme (mais certainement aussi le formalisme *bien compris*) ne consiste donc pas à refuser le principe du tiers exclu, mais à en exiger un énoncé sans présupposé implicite ou inavoué. Voici une version que Brouwer aurait admise sans hésitation :

Si à l'intérieur d'une théorie formelle basée sur une logique bivalente, une proposition P est contradictoire, alors non P est une proposition vraie de cette théorie.

Toutefois, en perdant son ambiguïté, cet énoncé est devenu une simple tautologie, puisque dans une théorie formelle le vrai et le faux sont de pure convention, et que la logique bivalente consiste justement à convenir du vrai et du faux de manière à satisfaire cet énoncé. Le problème apparaît lorsqu'on ne veut pas (ou ne peut pas) se contenter d'une vérité de pure convention, et qu'on veut lui conférer une pertinence, une quelconque adéquation à une réalité extérieure. N'oublions pas que l'idée qui est à la base du formalisme est de réduire la déduction à un procédé mécanique et aveugle qui fait totalement abstraction du sens. C'était à l'origine une ruse de Hilbert pour échapper aux objections contre les transfinis de Cantor, dont il s'était épris, mais que par la suite on a feint de prendre au sérieux. Pour Hilbert, cette idée (qui est géniale, nous tenons à le proclamer) devait permettre de récupérer une théorie douteuse, celle de Cantor, pour rendre compte de toutes sortes de choses fort utiles, comme les nombres, les fonctions, etc. Pour un formaliste vraiment conséquent, qui ne triche pas avec les principes affichés, rien n'empêcherait que l'on choisisse, à la place des axiomes de Peano, un autre système où $2 + 2 = 5$, du moment que ce nouveau système n'est pas contradictoire. Or, on ne le fait pas; on trouverait même scandaleux de s'amuser ainsi avec l'argent des contribuables, et ce qu'on demande à une théorie formelle, c'est de "coller" à quelque chose qui lui est extérieur, mais dont les formalistes évitent systématiquement de parler. C'est cette chose extérieure qui fournit le critère de validité, et qui préside au bon choix de ce qui devrait être vrai ou faux dans une théorie pertinente. Sur cette chose extérieure les mathématiciens n'ont guère de pouvoir, en particulier ils ne peuvent lui imposer de se soumettre à une logique bivalente; cette *réalité*, pour l'appeler par son nom, est ce qu'elle est, et lorsque les mathématiciens (par exemple Zermelo et Fraenkel) construisent une théorie formelle, ils la choisissent en sorte qu'elle coïncide le mieux possible avec cette réalité. La critique de Brouwer à l'encontre du formalisme consiste alors essentiellement en ceci : les formalistes ont tort de croire que, une fois la théorie formelle construite (par exemple la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel) elle devient ipso facto la réalité mathématique, en supplantant l'autre

qu'on s'empresse d'oublier. Cinquante ans après les critiques de Brouwer, nous ajouterons que les formalistes ont réalisé au sein de la communauté mathématique ce que George Orwell avait décrit dans son roman *1984* (encore une justification pour notre titre) et qu'heureusement aucun régime politique n'a encore réussi aussi parfaitement : faire croire à l'écrasante majorité du peuple que la réalité est ce qu'on lui raconte et non ce qui se passe réellement. Le symptôme caractéristique de ce genre de situation est que dans la conscience collective, "la réalité est perçue comme de la métaphysique". Il existe un test infailible pour mettre en évidence les efforts permanents déployés par les mathématiciens d'aujourd'hui pour oublier cette *chose extérieure* qui avait présidé aux choix de Hilbert, Zermelo, Fraenkel : leur faire lire le début de cet article et constater leur agacement à propos du mot *réalité* que machiavéliquement nous avons répété avec tant d'insistance; s'il n'y avait pas anguille sous roche, ce mot serait tout à fait innocent, puisque nous ne l'avions pas encore défini.

5. Dès lors, tout le problème pour Brouwer revient à mettre au point une méthode sûre pour appréhender cette fameuse "réalité" extérieure au formalisme. Une méthode sûre, cela signifie au premier chef une méthode qui soit, de manière absolument certaine, susceptible de donner des résultats indépendants de tout pré-supposé théorique; quelque chose comme la méthode expérimentale mise au point dans d'autres secteurs par de grands ancêtres comme Galilée, Lavoisier, ou Claude Bernard. Cette méthode, c'est tout simplement la méthode constructive.

Entendons-nous bien : nous ne prétendons pas que Brouwer ait dit tout cela de manière explicite, ni qu'il ait vu les choses comme nous vous les présentons ici. Ce que nous disons, c'est que, lus en 1984, les textes de Brouwer même les plus sibyllins deviennent absolument clairs et logiques lorsqu'on les interprète ainsi (voir par exemple annexe 1).

La mathématique intuitionniste n'est donc pas une autre théorie mathématique à mettre en concurrence avec, disons, la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel (devenue entretemps dogme officiel). C'est une entreprise complémentaire, dont le but est d'établir des faits mathématiques indépendants de tout formalisme, afin de les comparer aux vérités établies par la théorie, et de contester éventuellement celle-ci si par exemple elle mène à trop de résultats purement idéaux (en principe, la mathématique intuitionniste a aussi un rôle plus immédiat : écarter d'office les théories formelles en contradiction avec la mathématique intuitionniste, mais les intuitionnistes n'ont nullement besoin de s'en préoccuper, puisque les formalistes, qui en secret sont bien plus intuitionnistes qu'ils ne veulent bien le dire, se sont toujours très bien débrouillés tous seuls à cet égard). Mieux qu'un discours général et abstrait, voici un exemple qui montre bien le rôle de garde-fou, en tous point comparable à l'expérimentation dans les sciences de la nature, que joue la mathématique intuitionniste : on sait depuis longtemps que sur "la droite" (c'est à dire sur $\mathbb{R}$) il n'y a pas d'ensemble à la fois non mesurable (pour la théorie de Lebesgue) et constructif. La théorie prévoit, en conséquence de l'axiome du choix, qu'il existe des ensembles non mesurables, mais ces ensembles font partie

des objets idéaux de la théorie, ils n'ont pas d'existence objective, c'est à dire qu'assurément il est à jamais impossible de les voir constructivement, et leur existence ou la forme qu'ils prennent dépend de la théorie formelle. Récemment il a été prouvé [7] qu'une autre théorie formelle était possible, tout aussi acceptable que l'actuelle car relativement consistante, mais dans laquelle les ensembles non mesurables n'existent pas. Ce serait donc une théorie qui, dans le cas précis des ensembles mesurables, "collerait" mieux à la réalité. Bien sûr, on ne peut exclure a priori qu'elle colle moins bien ailleurs, mais elle fait peur pour une autre raison : elle priverait les mathématiciens des facilités de l'axiome du choix. Il n'est pas question ici de prendre parti sur ce point. Nous voulions seulement en venir à ceci : susciter un tel débat est un acte typiquement intuitionniste, d'ailleurs tout à fait compatible avec le formalisme bien compris; un acte qui ne peut qu'enrichir la mathématique, mais qui n'a pas de sens pour quiconque croit dur comme fer que les ensembles non mesurables existent sous prétexte qu'un théorème le dit. En somme, ce débat revient à choisir entre une théorie plus juste (plus proche de la réalité constructive) mais moins facile, et une théorie postulant des choses en trop mais plus facile. L'expérience épistémologique acquise dans d'autres sciences que la mathématique (la physique, par exemple) montre que ce type de débat est tout à fait classique; voyez à ce sujet par exemple les problèmes de l'électrodynamique quantique.

En fin de compte, il apparaît que, en vertu de son rôle de garde-fou que nous venons de souligner, c'est la mathématique intuitionniste qui confère à la mathématique son statut scientifique (dans le sens de l'épistémologie classique); le refus de la conception intuitionniste équivaut à l'affirmation que la mathématique est un jeu gratuit; cette façon de voir est bien sûr respectable et nous ne désirons nullement envoyer ses partisans dans un camp de concentration : le problème, c'est que ce sont les partisans de cette *idéologie* eux-mêmes qui, après avoir proclamé bien haut leurs convictions il y a vingt ans, s'en mordent les doigts aujourd'hui en constatant le très mauvais effet de leurs vantardises sur l'image de marque de la mathématique auprès du reste de la communauté scientifique. Nul ne trouverait à redire si la conviction des formalistes purs et durs n'était qu'une conviction intime, proclamée peut-être, mais sans les abus de pouvoir susceptibles de provoquer les dégâts matériels que nous déplorons maintenant. Nous sommes bien forcés de constater aujourd'hui que la domination sans partage pendant quarante ans de l'idéologie que nous critiquons ici a fait de ce qu'on appelle très restrictivement la communauté mathématique une petite secte dont l'importance au sein de la communauté scientifique diminue à vue d'oeil; et il est vain d'objecter à ce propos que les autres sciences ne peuvent, elles, se passer de la mathématique : car les autres sciences ne s'en passent pas, elles se passent seulement de la petite secte. Il suffit de feuilleter des revues de physique mathématique, d'informatique, ou de mathématiques appliquées pour voir que ce n'est pas la *mathématique* qui meurt. L'héritage de Newton, Laplace, Euler, n'est bien sûr pas perdu.

Peut-être nous objectera-t-on (il faut tout prévoir) que la Science efficace n'est

pas tout dans la vie, ni dans la mathématique, et qu'on peut faire de très belles choses sans qu'obligatoirement elles satisfassent aux critères de pertinence ou d'adéquation à la réalité que nous avons laborieusement exposés ci-dessus; et aussi que l'épistémologie classique, avec ce qu'elle entend par "scientifique", n'est pas la Thora. A cela nous répondons : O.K., nous reconnaissons que l'esprit ludique vaut bien l'utilitarisme des technocrates (il a surtout l'avantage d'être infiniment moins dangereux), et nous serons parmi les premiers à tirer notre chapeau à l'artiste de génie qui prouverait un théorème totalement dépourvu du moindre contenu sémantique, mais si beau qu'il arracherait des larmes à Bourbaki. Le problème qui nous préoccupe n'est pas celui de l'utilitaire; les partisans de l'esprit ludique ont en général un humour dont les doctrinaires du jeu formaliste gratuit sont dépourvus; d'ailleurs la doctrine de ces derniers est totalement étrangère à l'esprit ludique et à l'amateurisme en général; il s'agirait plutôt d'une sorte de perversion du professionnalisme. Ce qui est en tous cas certain, c'est que c'est l'intuitionnisme, proclamé ou surtout clandestin (il est généralement de meilleure qualité sous cette seconde forme), qui non seulement donne à la mathématique le statut épistémologique de Science, mais aussi lui apporte le sens de la relativité qui manque toujours dans les dogmes systématiques.

6. Maintenant que le rôle joué dans la mathématique par la méthode constructive est clarifié (mais tout n'est pas encore dit), il serait bon de clarifier également les idées et les projets formulés par Hilbert et les formalistes historiques. Nous verrons que la clé du malentendu est le sens donné par chacun des protagonistes de ce drame à la vérité mathématique. Pour Hilbert, tout semble limpide :

"si les axiomes choisis arbitrairement ne se contredisent pas — dans toutes leurs conséquences — alors ils sont vrais, les objets définis par eux existent. Ceci est pour moi critère de vérité et d'existence." (Hilbert, lettre à Frege)

Ce qui rend Hilbert si assuré dans cette affirmation est l'expérience historique que constitue la découverte des géométries non-euclidiennes. Comme chacun sait, la mathématique a mis longtemps à accepter celles-ci, conservant longtemps le préjugé selon lequel la géométrie euclidienne était la seule vraiment réelle. Le raisonnement suivi par Hilbert est bien simple : une fois admis que la géométrie hyperbolique est tout aussi réelle que l'euclidienne, il n'y a plus aucune raison de dénier les mêmes droits à tout autre système logiquement consistant. C'est là un raisonnement typique de formaliste : il ne paraît juste que coupé de la pratique. Dans les présupposés de son raisonnement, Hilbert a omis les raisons réelles, pratiques, historiques, qui ont donné aux géométries non-euclidiennes tout leur sens. En effet, si le préjugé selon lequel l'espace hyperbolique n'existe pas, ou est moins réel que l'euclidien, a fini par tomber, ce n'est pas par la conviction qu'il est logiquement consistant (cette conviction, tout le monde l'avait), mais parce qu'il s'intégrait dans la culture mathématique; il correspondait à quelque chose de *représentable*, de compréhensible (par exemple, on pouvait en donner des modèles comme le demi-plan de Poincaré). Et si personne n'avait jamais trouvé aucune signification, aucun *contenu sémantique*, à la géométrie hyperbolique, si celle-ci

n'avait été qu'un langage formel intraduisible ou inintelligible, non seulement elle serait restée une simple curiosité peu connue, mais jamais Hilbert n'aurait pu affirmer ce qu'il a affirmé dans cette lettre à Frege avec autant de certitude. Le *contenu sémantique*, voilà le concept-clé de l'intuitionnisme, qui sous-tend toute la pensée de Brouwer. Mais nous demandons au lecteur de bien noter que, quoiqu'il mette l'accent ailleurs, et pour cause, Hilbert recourt à ce concept, et cela dans l'exposé même de la méthode formaliste : en effet, il compare celle-ci à la méthode algébrique (voir l'annexe 2). Il explique qu'une formule algébrique quelconque, comme par exemple $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ peut se concevoir de deux manières. Ou bien elle exprime une propriété des nombres : en remplaçant x et y par deux nombres quelconques, les deux membres de l'égalité seront identiques (ce sera le même nombre). Ou bien, on fait abstraction de ce sens, et on obtient la formule en appliquant mécaniquement et aveuglément les règles formelles du calcul algébrique (on "développe" $(x + y)^2$). Dans la première conception, la formule n'est qu'un langage qui exprime une propriété d'observation, une *vérité scientifique* sur des objets, les nombres; cette vérité est alors le *contenu sémantique* de la formule. Dans la deuxième conception, la formule n'est plus un langage, mais un objet, et on exprimera dans un *autre* langage des propriétés de cet objet, telles que par exemple les règles formelles du calcul algébrique. Diophante d'Alexandrie ou François Viète ne sont jamais sortis de la première, mais il est naturel, et même sain, que la seconde prédomine une fois que le calcul algébrique est à ce point entré dans les mœurs qu'il en devient une routine qu'on accomplit avec le plus parfait automatisme. Il ne viendrait à l'esprit d'aucun algébriste de prétendre que le contenu sémantique d'une formule n'existe pas (le principal avantage de la méthode algébrique est même qu'il peut y en avoir plusieurs), mais il est vrai aussi qu'à force de pratiquer le calcul formel on peut oublier non seulement que ce contenu existe, mais surtout que c'est son observation qui apporte la connaissance de la vérité et qui est le véritable fondement des règles du calcul algébrique. Oublier le contenu sémantique d'une théorie formelle aussitôt celle-ci construite, alors que celui-là a tant servi à sa genèse est donc non seulement une attitude hypocrite et illogique, mais peut mener à des excès assez détestables. Bien entendu vous n'aurez aucun mal à trouver bien pire dans le domaine des excès, mais ce ne serait qu'une argutie pour faire diversion.

7. Pourtant, ce qui a fait naître les controverses dont nous parlons ici, ce sont les difficultés logiques liées à l'infini (c'est d'ailleurs pour cette raison que l'article de Hilbert que nous citons s'intitule "sur l'infini"), en particulier à la théorie de Cantor. Le problème est que les cardinaux transfinis n'ont justement pas de contenu sémantique (voyez à ce sujet les remarques pénétrantes de Poincaré à propos de Cantor : "La logique de l'infini", dans *Dernières pensées*, notamment pages 132 à 139 de l'édition Flammarion; les extraits les plus significatifs sont donnés dans l'annexe 3). Si on développe toutes les conséquences d'une axiomatique non euclidienne, on obtient toutes sortes de théorèmes relatifs au plan ou à l'espace non euclidiens, mais tous ces théorèmes sont directement interprétables dans un

modèle tel que le demi-plan de Poincaré, car tous les concepts de base (point, droite, ...) y ont leur objet. Il en va différemment pour une théorie formelle qui prétend intégrer un concept sans objet (sans contenu sémantique) tel que la puissance du continu. N'oublions pas qu'au départ, pour Hilbert, il y avait le problème suivant : la théorie de Cantor inclut des concepts sans objet (1), mais pourtant elle rend merveilleusement compte de ce que les mathématiciens rêvent de théoriser depuis vingt-cinq siècles : le continu. Y renoncer eût fait trop mal, mais il fallait trouver d'urgence une casuistique pour faire accepter la métaphysique qu'elle contenait aux vilains rationalistes du siècle. D'où la ruse que voici :

“De même que $i = \sqrt{-1}$ a été introduit pour obtenir une formulation aussi simple que possible des lois de l'algèbre, de même nous devons ajouter aux propositions finitaires des propositions idéales, afin de pouvoir conserver les règles formelles simples de la logique aristotélicienne usuelle.”

Cette phrase est toujours extraite de *Ueber das Unendliche*; nous la reproduisons ici toute seule pour ne pas disperser le fil de notre argumentation, mais nous avons mis dans l'annexe (2) une traduction du contexte tout entier; nous vous invitons à lire tout à l'heure ce texte lumineux.

L'idée était donc la suivante : ou bien on prend la réalité mathématique des nombres, des fonctions, etc. telle qu'elle est; des nombres, des fonctions, etc., qui existent vraiment, qu'on peut définir explicitement et finitairement, ceux qu'on peut calculer, tabuler (au moins en principe), c'est à dire ceux qui sont donnés par un algorithme constructif; mais sur cette réalité, la seule vraiment objective, c'est à dire indépendante de la théorie, nous n'avons aucun pouvoir, nous ne pouvons que l'observer (soit directement, avec un ordinateur par exemple, soit par des raisonnements strictement constructifs); il n'y a en elle aucun ordre logique préalable à celui que l'esprit humain peut y mettre. Ou bien on laisse cette réalité provisoirement de côté, et on construit *de toutes pièces* un discours basé sur une logique agréable pour l'esprit (par exemple la logique bivalente que Hilbert qualifiait d'aristotélicienne — ce qui est impropre mais peu importe) et pouvant comporter des concepts même sans objet dans cette réalité mathématique, mais que Hilbert aimait bien, comme les cardinaux transfinis : on est alors obligé, afin que cet édifice intellectuel ne soit pas purement gratuit, de le construire de manière à en tirer des propositions vérifiables dans la réalité (on ne retiendra pas par exemple un système dans lequel $2 + 2 = 5$).

Or, ce que Hilbert ne dit pas, c'est que cette situation, où une réalité brute ne peut être qu'observée, tandis que notre esprit construit des édifices logiques qui se vérifient ou se réfutent, existe dans toutes les sciences, et on avait déjà coutume, bien avant Hilbert, d'appeler *objet* (Gegenstand) la réalité brute, le plus souvent

(1) Signalons que Cantor lui-même n'était pas du tout de cet avis. Pour lui, l'existence des cardinaux transfinis était aussi sûre et objective que l'existence des pyramides d'Égypte; les hommes ne pouvaient pas les concevoir car leurs sens étaient trop rudimentaires, mais Dieu, lui, les voyait. Il n'a pas été suivi dans cette métaphysique, sauf par l'intermédiaire de la caution proposée par Hilbert.

inaccessible dans son essence, et *théorie* l'édifice logique construit par l'esprit. Mais il est vrai que dans les autres sciences on est moins orgueilleux que chez les mathématiciens, on n'y a pas honte d'être soumis à l'épreuve de la réalité, et on ne cherche donc pas avec tant d'énergie à se persuader que la réalité extérieure n'existe pas, que la théorie est la réalité, et que c'est l'homme qui l'a créée. Sur ce point, et paradoxalement, Cantor avait peut-être l'esprit plus scientifique que Hilbert ou Dedekind. (Vous pourrez d'ailleurs trouver à ce sujet un texte célèbre de Dedekind dans l'annexe 4.)

Il y a donc chez Hilbert une certaine contradiction entre les deux citations que nous avons présentées ici. D'une part (dans sa lettre à Frege) Hilbert affirme sans ambiguïté qu'un objet existe dès lors qu'on en a donné une définition non contradictoire; et d'autre part, (dans *Ueber das Unendliche*) il distingue, parmi les propositions établies selon la méthode axiomatique, les propositions finitaires, qui ont un contenu sémantique, et les propositions idéales, qui n'en ont pas; par là même, Hilbert admet que ce qui n'existe qu'en vertu d'une proposition idéale, existe moins que ce qui est finitairement et constructivement établi. Bien sûr cette contradiction ne démolit nullement les idées de Hilbert; elle montre tout au plus qu'il y avait un certain décalage entre ses désirs et les réalités : en quelque sorte, la lettre à Frege est un cri du coeur, tandis que *Ueber das Unendliche* est l'oeuvre du cerveau. A notre avis, on ne peut sortir de cette contradiction qu'en suivant Brouwer, c'est à dire en reconnaissant honnêtement que toute mathématique formelle est forcément une théorie, distincte de son objet.

8. C'est donc bien ce fameux concept de *contenu sémantique* qui est au centre du débat; il revient d'ailleurs fréquemment aussi bien sous la plume de Brouwer que sous celle de Hilbert. *Contenu sémantique* est notre traduction du mot allemand *Inhalt*, qui signifie normalement *contenu* sans autre spécification; mais dans le présent contexte, *contenu* serait bien trop vague; de même, nous avons traduit *inhaltlich* par la périphrase *relatif au contenu sémantique*, ou, sous la forme adverbe, par *sémantiquement*.

Conformément à ce que nous avons expliqué longuement, le contenu sémantique d'une proposition ou d'une théorie mathématique, c'est son rapport à une réalité extérieure (et antérieure) à toute théorie, formalisée ou pas. Nous ne discuterons pas ici de la nature de cette réalité extérieure car cela ne nous semble pas le plus important; elle est bien sûr liée à notre perception du monde qui nous entoure. Brouwer a essayé, lui, d'en discuter, et ce qu'il a écrit à ce sujet paraît aujourd'hui bien vieillot (ce qui ne prouve pas que c'est faux). Peut-être y a-t-il là une des causes du mépris qui entoure son oeuvre, mais même si Brouwer a été maladroit ou superficiel dans son analyse de la *nature* de la réalité mathématique extérieure, il n'en demeure pas moins que son analyse des *rapports* que les théories et les pratiques mathématiques entretiennent avec cette réalité est, elle, extrêmement profonde, actuelle, et, nous allons le voir, féconde.

Reconnaissons que des discussions philosophiques comme celle-ci ne sont pas faciles

à mener, principalement à cause de l'extrême confusion qui entoure ces questions ; il y aurait certes beaucoup moins de confusion si tout cela était fréquemment débattu ; au lieu de cela, on n'en parle jamais, sauf dans quelques cercles où d'ailleurs les querelles d'école prennent souvent le pas sur une véritable réflexion, et le résultat, c'est que si à brûle-pourpoint vous interrogez un mathématicien de base, il y a toutes les chances pour que, pris au dépourvu, il ait juste le temps, pour faire bonne figure, de se raccrocher à quelque préjugé ou quelque cliché vaguement répandu. La correspondance des mathématiciens du début du siècle, Borel, Hadamard, Lebesgue, Zermelo, et tant d'autres montre qu'il fut une époque où l'on discutait volontiers des fondements des mathématiques. De nos jours, de telles activités contemplatives sont plutôt mal vues ; toute interrogation se voit aussitôt recouverte pudiquement d'un voile épais essentiellement cousu d'une phraséologie technique ultra-formalisée. Aujourd'hui un scientifique, en particulier un mathématicien, n'a plus rien d'un humaniste : c'est un fonctionnaire chargé d'exécuter une tâche extrêmement parcellaire. Dans ces conditions nouvelles dominant des idéologies appelées *positivisme logique* ou *idéologie de l'expert* (2), selon lesquelles il n'y a plus de problème philosophique ou politique : tous les choix peuvent être décidés par le calcul, et en particulier le problème des fondements des mathématiques doit être décidé uniquement par du calcul logique formel ; ces idées, que nous jugeons fort malsaines, reposent sur le présupposé grossièrement faux que l'activité du mathématicien est *identique* à la déduction entièrement codifiée que postule toujours la logique mathématique ; au contraire selon l'intuitionnisme la logique mathématique est une théorie et l'activité mathématique humaine est une réalité qui n'a aucune raison de coïncider avec le modèle d'une machine de Turing pratiquant la déduction mécanique chère à Peano. Dans une conception intuitionniste la question suivante (par exemple) a un sens, et même un sens très profond :

“quel est le contenu sémantique du théorème d'incomplétude de Gödel ou du théorème de Löwenheim ?”

Insistons sur le point suivant : la conception intuitionniste (aussi bien la nôtre que celle de Brouwer) ne nie en aucune façon la valeur de la logique mathématique ; dire que c'est une théorie n'est pas dévalorisant. Mais ce que nous mettons en avant contrairement aux formalistes, c'est que ce qui fait la richesse d'une science est la confrontation entre la théorie et l'expérience ; dans le cas de la mathématique (conformément à nos thèses exposées au début) c'est la confrontation entre la mathématique formelle et la mathématique constructive qui serait la véritable source de progrès et d'enrichissement pour la mathématique en tant que science. La clé de l'intuitionnisme est donc la prise en compte de l'écart irréductible entre un modèle théorique quel qu'il soit et “la réalité”, entre un concept de la théorie et son référent objectal ou contenu sémantique. Par exemple, puisque nous parlons de la logique mathématique, l'intuitionnisme tient pour essentiel le fait que l'activité des mathématiciens n'est pas identique à celle des machines de

(2) Nous empruntons cette expression à Claude Lobry, voir [6].

Turing qui pratiqueraient la déduction automatique (c'est sans doute là qu'il faut voir l'origine du terme "intuitionnisme"). Mais l'affirmation de cette distinction n'est pas une profession de foi en une idéologie : il n'est pas difficile de prouver, même dans les canons de la rigueur formaliste, que les théorèmes démontrés par les mathématiciens, si on les traduisait dans le langage formel postulé par Peano ou Hilbert (ce n'est pas possible matériellement, mais nous faisons ici une supposition) formeraient une partie incroyablement rare de l'ensemble de tous les "théorèmes" au sens formaliste de ce mot : "proposition du langage formel pouvant être obtenue en appliquant mécaniquement les critères déductifs aux axiomes de la théorie"; il est bien clair que presque tous les "théorèmes" au sens formel seraient totalement dépourvus du moindre sens et ne pourraient être mis en correspondance avec aucune représentation de la culture mathématique. Or tout mathématicien cherche à démontrer des théorèmes "véritables", c'est à dire correspondant à une représentation forgée par les deux mille ans de culture mathématique; ceci est un fait dont tout le monde conviendra aisément; le tort du formaliste n'est pas de nier ce fait, ni de le négliger dans la théorie (la logique mathématique), mais d'éviter la question même; cette attitude est comparable à celle d'un physicien qui, à force de négliger le frottement dans le mouvement des corps, finirait non pas vraiment par croire que le frottement n'existe pas, mais par croire que la thermodynamique est une idéologie et les thermodynamiciens (que dans notre métaphore nous supposons peu nombreux) des illuminés. La question du contenu sémantique du théorème d'incomplétude de Gödel et du théorème de Löwenheim (3), nous espérons vous en avoir convaincus, est donc loin d'être creuse!

9. Avant d'aborder le coeur de notre sujet, dans la section suivante, nous avons encore un point à discuter : quelle est au juste la raison de la domination écrasante du formalisme, alors que si peu de mathématiciens ont foi en lui? Nous avons déjà suggéré plus haut un lien entre le formalisme et le positivisme logique, lui-même étroitement lié à l'idéologie de l'expert. Ce lien n'est pas difficile à établir historiquement : le courant philosophique appelé positivisme logique (incarné par "l'école de Vienne") s'est réclamé ouvertement du formalisme mathématique et la parenté est de toute façon évidente; moins évidente est la parenté avec ce que nous appelons l'idéologie de l'expert. L'idéologie de l'expert est l'idéologie qui vise à justifier le système de valeurs suivant :

- a) valeurs négatives : la philosophie, la religion, l'humanisme, l'idéologie, et généralement tout ce qui relève du spirituel; la gratuité (sauf s'il s'agit de cadeaux publicitaires); la culture (sauf comme produit sur le marché de l'édition);

(3) Nous citons ces deux théorèmes, non parce qu'ils jouent un rôle particulier relativement à notre argumentation (qui s'appliquerait indifféremment à n'importe quel autre théorème), mais parce que ce sont les deux théorèmes les plus profonds de la logique mathématique et à juste titre les plus célèbres. Signalons aussi en passant que le théorème de Löwenheim est le point de départ de l'Analyse non standard, et le théorème d'incomplétude (bien compris) lui est étroitement lié. La suite de notre discussion reprendra assez substantiellement, quoique incomplètement, la question du contenu sémantique de ces deux théorèmes.

b) valeurs positives : les décisions techniques (celles qui sont prises par des experts compétents en fonction des impératifs purement techniques, contrairement aux décisions “politiques” prises par des idéologues), la compétence, l’objectivité, la compétitivité.

Quel rapport entre ce système de valeurs et le formalisme? Aucun ou presque, bien sûr, si on en juge d’après les intentions des pères du formalisme; mais les intentions des prophètes sont une chose, les actes des prêtres une toute autre. Et si on y réfléchit vraiment bien, on se rend compte que les *experts* ont une bonne raison de préférer la forme d’esprit qui prédispose au formalisme plutôt que celle qui prédispose à l’intuitionnisme : la première se prête particulièrement bien au jugement purement technique, qui peut se décider complètement par application d’un algorithme bien défini; tandis que la seconde recherche le jugement sur le *sens* et exige donc une pensée proprement philosophique, c’est à dire justement le genre de chose que l’expert vomit.

Avouons que nous ne croyons guère aux pseudo-causes sur lesquelles nous avons ironisé plus haut (l’orgueil des mathématiciens, etc.). La vraie raison à notre avis du triomphe du formalisme (pardonne-nous, David, de te faire de la peine, mais nous sommes bien obligés de vivre avec notre temps) est tout simplement sa commodité juridique, qui en fait un paradis pour les experts. Les canons du style Bourbaki constituent une sorte de code civil en miniature pour mathématiciens, qui paraît absurde ou ridicule si on le juge comme l’auraient fait les persans de Montesquieu, mais qui, si on tient compte de la nature humaine, est peut-être le seul système capable d’entraîner un consensus. Il y a beaucoup d’esprits ingénus qui trouvent grotesque l’acharnement avec lequel le Droit protège la propriété privée, et qui ne comprennent pas pourquoi la somme de toutes les lois et jurisprudences doit occuper un volume aussi fantastique, et prévoir des centaines de milliers de cas tous plus mesquins les uns que les autres; c’est malheureusement le seul moyen d’éviter que les citoyens ne s’entretuent continuellement pour le pré du voisin ou le passage des vaches. En mathématique c’est pareil : dans une société où la science est professionnalisée et peut fournir des sinécures, comment peut-on distinguer le chercheur honnête du petit escroc, si ce n’est par la mise en place d’un véritable code civil permettant de décider même dans les cas les plus mesquins de ce qui est licite et de ce qui ne l’est pas? Il y a même une expression idiomatique bien connue chez les mathématiciens : “avoir le droit de...” qui est tout à fait significative. Ainsi, suivant les cas, on a le droit ou pas le droit de dériver une fonction, d’appliquer tel théorème, de développer en série. On mesurera mieux tout ce que cette conception juridique peut avoir de sclérosant en songeant que l’essentiel de la *création* mathématique consiste justement à inventer des formes nouvelles de calcul qui autorisent soudain ce qui jusque là était interdit. Une certaine clairvoyance est donc nécessaire, que semble-t-il seul l’intuitionnisme peut apporter (du moins tant qu’il ne sera pas à son tour devenu un dogme prétentieux et dominant). Ainsi, de même que la monarchie de père en fils aurait eu pour seule justification d’éviter les luttes fratricides que le choix du meilleur roi eût inévitablement provoqué, de même la rigidité du *formalisme* trouverait pour seule

justification d'éviter les luttes fratricides entre les différents réseaux de clientèle que tout jugement relatif au *contenu* des travaux mathématiques ne manquerait pas de provoquer. Comme tout magistrat peut le vivre quotidiennement, il est bien plus facile d'obtenir un consensus sur la forme que sur le fond. Pour juger de la forme il suffit d'un professionnel ayant reçu une formation adéquate; pour le reste, il n'y a aucune recette, vous ne pouvez que juger "en votre âme et conscience". Mais qu'arrivera-t-il après plusieurs générations éduquées à n'opérer que des jugements techniques, et que de ce fait on aura systématiquement préservées de tout jugement philosophique, y compris en philosophie?

10. Maintenant, revenons-en à Brouwer et au sens véritable de sa critique du principe du tiers exclu. Au numéro 4, nous avons montré qu'il fallait distinguer deux sens possibles de ce principe : ou bien l'expression d'une volonté (on souhaite travailler avec une logique bivalente), ou bien un constat de fait (ce qu'on peut déduire de ce principe est un *fait* mathématique). Au premier sens, nul ne peut trouver à redire, et au second, tout le monde s'accordera soit pour en reconnaître la fausseté, soit du moins pour reconnaître que les *faits* dont il est question sont d'une nature très différente des *faits* constructifs : leur objectivité est bien moindre puisque leur existence dépend du choix de la théorie. S'il y a eu — ou s'il y a encore — problème, ou désaccord, c'est uniquement à cause d'une confusion entre ces différents sens. Cela, c'est ce que *nous* avons dit. Or, voici ce que dit Brouwer :

"Le principe du tiers exclu est équivalent au postulat selon lequel tout problème mathématique est résoluble."

"La justification sémantique de la mathématique formelle par la preuve de sa non contradiction repose sur un cercle vicieux, parce que cette justification présuppose la justesse sémantique du postulat suivant : un théorème est sémantiquement vrai dès lors qu'il est non contradictoire. Autrement dit, cela présuppose le principe du tiers exclu."

(Le lecteur qui croit que nous avons forcé la traduction pour faire dire à Brouwer plus que ce qu'il aurait vraiment dit pourra trouver dans l'annexe 1 le texte original de la main de Brouwer, en allemand.)

Ainsi, le principe du tiers exclu dont il est question dans ces phrases doit être compris dans le second sens, le sens sémantique (ainsi d'ailleurs que tous les autres termes). Notre discussion sera sans doute plus claire si nous examinons un exemple précis, mais significatif, tel que le "théorème" de Fermat (4). Pour Brouwer, le problème soulevé par cette conjecture peut être résolu (constructivement) de deux manières, exclusives l'une de l'autre : ou bien on en trouve une démonstration constructive, ou bien on parvient à construire explicitement un contre-exemple. Dans le premier cas, on aura prouvé constructivement que le théorème de Fermat

(4) En fait, n'importe quelle conjecture de l'arithmétique convient pour cette discussion. Le choix du théorème de Fermat ne se justifie que par sa célébrité, ou par hommage à Brouwer, dont c'était visiblement l'exemple favori.

est vrai ; dans le second cas on aura prouvé constructivement qu'il est faux. Mais les nombres entiers "naïfs", ceux qui existent constructivement et indépendamment du choix de la théorie (autrement dit, ceux qui constituent le contenu sémantique de toute arithmétique) pourraient fort bien avoir la propriété suivante : le théorème de Fermat serait vrai, c'est à dire qu'on ne pourra jamais trouver, aussi loin qu'on explore, quatre entiers vérifiant la fatidique égalité, et qu'il soit pourtant impossible d'en fournir une démonstration. De façon plus précise, dans cette hypothèse il se passerait ceci : il n'y aurait pas une démonstration unique valable pour des entiers arbitraires, mais des démonstrations différentes valables chacune pour des séries non exhaustives d'entiers, c'est à dire qu'il resterait toujours des cas non démontrés, et plus on voudrait couvrir de cas, plus les démonstrations deviendraient complexes et inaccessibles (une telle possibilité résulte évidemment du fait qu'il y a une *infinité* d'entiers : c'est une propriété de la "logique de l'infini") ; une démonstration complète serait en quelque sorte infiniment longue. Dans une telle éventualité, le théorème de Fermat serait sémantiquement vrai, mais nous ne pourrions jamais le prouver. Tout au plus pourrions-nous, au fur et à mesure que nos ordinateurs deviendraient plus puissants, constater que le théorème de Fermat se confirme sur un domaine de plus en plus vaste. Le problème de Fermat serait alors intrinsèquement et essentiellement insoluble, il serait à jamais impossible de connaître la clé du mystère, quelle qu'elle soit. Notez bien que ces remarques pénétrantes de Brouwer sont antérieures au théorème d'incomplétude de Gödel : pour l'intuitionniste le théorème d'incomplétude n'est pas paradoxal ou inattendu, il est "intuitivement évident". A la lumière de cette discussion aujourd'hui classique, vous pouvez relire la première des deux phrases citées ci-dessus ; elle vous donnera le sens que le principe du tiers exclu avait pour Brouwer et que nous pouvons dès lors énoncer ainsi :

Pour toute proposition mathématique P , ou bien il existe une démonstration constructive de P , ou bien il existe une démonstration constructive de $\text{non}P$, et il n'y a pas de troisième possibilité, à savoir qu'il n'existe de démonstration constructive ni pour P , ni pour $\text{non}P$.

Tout le monde, y compris les formalistes les plus obstinés, sera unanime pour reconnaître la fausseté d'une telle affirmation. Bien entendu, ce qui fonde l'intuitionnisme, ce n'est pas de reconnaître la fausseté de cet énoncé (ce serait enfoncer une porte ouverte), mais de reconnaître l'existence d'une vérité sémantique au-delà de toute théorie. L'insistance de Brouwer à propos du tiers exclu provient uniquement du fait que, historiquement, le débat s'était cristallisé là-dessus. Tous les désaccords, ainsi que la confusion du débat, avaient pour cause que, obstinément, les formalistes refusaient de distinguer entre la vérité sémantique et la vérité théorique (comportement à rapprocher de la contradiction que nous avons relevée au numéro 7 entre les deux citations de Hilbert). Un prétexte souvent avancé pour justifier ce refus : "cette distinction, c'est de la métaphysique" (là on voit pointer l'idéologie de l'expert).

11. La seconde phrase citée de Brouwer nous parle des rapports entre une théorie

formelle et son objet, c'est à dire de son contenu sémantique. Commentons-la comme l'autre, à partir du même exemple. Tout revient encore une fois à la distance qui sépare la théorie de son objet. Faisons à nouveau la supposition de tout à l'heure : que le théorème de Fermat se vérifie sur tous les cas explicites, quoiqu'il n'en existe pas de démonstration constructive. Il pourra alors arriver plusieurs choses aux arithméticiens formalistes : ou bien ils n'arrivent à démontrer, ni le fameux théorème, ni sa négation (en ce cas, il n'y a rien à dire); ou bien, ils parviennent à démontrer le théorème; ou bien, dernière possibilité, ils parviennent à prouver sa négation. Il est bien entendu dans cette supposition qu'il s'agit de démonstrations *formelles*, c'est à dire conformes aux règles en vigueur chez les mathématiciens formalistes (5). Le cas intéressant à discuter est évidemment celui où les démonstrations formelles sont non constructives, par exemple celles qui utilisent l'axiome du choix.

Notre supposition signifie donc que *sémantiquement*, c'est à dire "dans la réalité", le théorème de Fermat serait vrai; mais ce fait supposé n'exclurait pas que le théorème de Fermat puisse être faux dans la théorie formelle, c'est à dire qu'il existerait une démonstration formelle de la négation du théorème (alors que dans nos hypothèses il n'existait pas de démonstration constructive de cette négation). Or, dire que le théorème de Fermat est faux revient dans la théorie formelle à dire qu'il existe quatre entiers x, y, z , et n ($n > 2$) tels que $x^n + y^n = z^n$. Si donc on peut démontrer formellement mais non constructivement l'existence de ces quatre entiers, c'est que ces quatre entiers constituent un *objet idéal* de la théorie : on a démontré qu'ils existent, mais il est impossible de les désigner explicitement. Par exemple il est impossible d'écrire un programme qui les calcule. On peut interpréter cela épistémologiquement en disant que si on rencontrait une telle situation, ce serait une *réfutation* (6) de la théorie, en ce sens qu'on aurait mis en évidence un fait mathématique (l'impossibilité de trouver ces quatre entiers) qui contredirait une "prévision" de la théorie. Bien sûr une telle situation ne s'est pas présentée d'une manière historiquement pertinente et il est peu probable que cela arrive un jour car les conjectures de l'arithmétique (susceptibles d'être sémantiquement vraies mais formellement fausses) ne sont finalement que des curiosités logiques qui n'ont guère d'influence sur la technologie et la science en général. Mais on pourrait en dire autant de l'hypothèse du continu ou de l'axiome du choix. En fait, s'il est difficile de rencontrer de telles conjectures de l'arithmétique sous une forme pertinente, il est par contre possible de prouver par des arguments "à la Gödel" qu'il doit en exister. Car le problème que nous sommes en train de discuter est le problème de l'incomplétude : quelle que soit la théorie axiomatique que vous

(5) Ce que nous appelons *démonstrations formelles* sont les démonstrations du type pratiqué communément par les mathématiciens formalistes. Le mot est ambigu, il pourrait aussi désigner des démonstrations *formalisées*, c'est à dire effectuées mécaniquement par des machines de Turing : mais de telles démonstrations sont un concept de la logique mathématique et non une réalité; or ici nous voulons parler de ce que feraient les arithméticiens formalistes dans le cas considéré, non de ce que feraient les machines de Turing.

(6) Prière de ne pas comprendre ce mot dans un sens péjoratif : ici, nous faisons de l'épistémologie, non de l'idéologie.

prendrez, pourvu qu'elle contienne les entiers (c'est à dire l'infini), vous aurez dans cette théorie des énoncés (peut-être le théorème de Fermat) sémantiquement vrais, mais **non déductibles des axiomes de base**. Une conjecture de l'arithmétique est de la forme $\forall n, P(n)$ et sa négation de la forme $\exists n, \text{non}P(n)$. L'incomplétude est une propriété qui résulte du fait que le champ des quantificateurs (ici les entiers) est infini. Vous pouvez constater vous-même après cette sorte de lecture de Brouwer que nous faisons devant vous, le lien étroit entre l'incomplétude et le théorème de Löwenheim : si $\forall n, P(n)$ est une conjecture de l'arithmétique sémantiquement vraie et que $\exists n, \text{non}P(n)$ est formellement vrai, il est bien clair que l'entier ω prévu par la théorie formelle, et qui rend formellement vrai $\text{non}P(\omega)$, est un entier non standard. Ici vous aurez peut-être envie de faire une objection : le théorème de Fermat serait vrai dans la réalité, c'est entendu; mais Dieu seul le saurait. Cette objection nous conduit exactement au coeur de notre sujet car, dans le cas hypothétique que nous discutons ici, plus rien ne vient occulter le noyau dur de la pensée brouwérienne. Certes, on ne peut pas prouver dans l'absolu que la théorie est réfutée; mais

1. des situations analogues se présentent fréquemment aussi dans les sciences de la nature, mais dans ces disciplines où l'expérience est reine on ne fait pas grand cas de ces inadéquations entre la théorie et la réalité (on est bien trop conscient de leur caractère inévitable, normal, et naturel, contrairement à la mathématique, cas très spécial, de telle sorte qu'il est rarissime qu'une inadéquation entraîne une révolution scientifique, c'est à dire un changement de paradigme; n'importe quelle théorie de la physique vit constamment avec des inadéquations qui ne gênent personne car elles n'ont pas une importance stratégique);
2. on se heurterait à la difficulté suivante : la théorie dirait que le contre-exemple du théorème de Fermat (c'est à dire les quatre entiers x, y, z , et $n > 2$ tels que $x^n + y^n = z^n$) existe, alors que, aussi loin que nos ordinateurs explorent les nombres, sa trace serait indécélable;
3. la métamathématique formelle, enrichie de considérations intuitionnistes, pourrait apporter une preuve (qui ne serait pas une démonstration au sens actuellement en vigueur, mais qui apporterait le même degré de certitude) de la "fausseté" de la théorie.

On peut donc avoir toutes les raisons de penser qu'une conjecture de l'arithmétique donnée est sémantiquement vraie bien qu'on ne puisse pas la démontrer, sans que soit exclue pour autant la possibilité d'une démonstration (au sens usuel, formaliste) de la fausseté de cette même conjecture. Autrement dit : dans une théorie formelle non contradictoire il ne peut y avoir à la fois démonstration d'une proposition et de sa négation, mais il est parfaitement possible **sans contradiction** qu'une conjecture de la forme $\forall n, P(n)$ soit sémantiquement vraie et que pourtant $\exists n, \text{non}P(n)$ soit un théorème de la théorie. Voilà ce que Brouwer voulait dire en écrivant que la justification *sémantique* de la mathématique formelle ne peut pas être obtenue par la preuve de sa non contradiction.

12. En supposant que le théorème de Fermat soit sémantiquement vrai sans qu'on puisse le démontrer, nous avons évidemment choisi l'hypothèse la plus perverse, celle d'un tiers justement non exclu : on ne peut démontrer constructivement ni sa vérité, ni sa fausseté.

La discussion serait sans doute plus complète si nous envisagions aussi le cas complémentaire, qui pose moins de problèmes : le cas où le théorème de Fermat serait sémantiquement faux. En ce cas, il existerait sémantiquement, c'est à dire concrètement, constructivement, explicitement, quatre entiers x, y, z , et $n > 2$ tels que $x^n + y^n = z^n$; que ces entiers existent constructivement, cela veut évidemment dire que chacun est explicitement défini par un algorithme constructif, pouvant être traduit en un programme en PASCAL ou en BASIC (7). Dans ce cas le contre-exemple n'est pas un objet idéal, alors que dans le cas discuté au numéro 11 (le tiers cas), la théorie prévoyait l'existence d'un contre-exemple, mais non constructible, non sémantique, c'est à dire idéal. Dans le présent cas on peut démontrer finitairement $\exists n, \text{non}P(n)$, car il suffit de démontrer $P(n_0)$, n_0 étant le contre-exemple nommément désigné (8). Les deux situations ne sont pas symétriques, puisque pour prouver que la conjecture est sémantiquement vraie on devait, dans le tiers cas, procéder par exhaustion sur une *infinité* de nombres, ce qui est impossible; alors que si le contre-exemple existe constructivement, il suffit de faire la vérification sur ce seul contre-exemple. Cette dissymétrie est un caractère typique de la "logique de l'infini" et constitue la raison profonde des théorèmes de Gödel et Löwenheim. Albert Einstein évoquait exactement le même problème en disant un jour : "aucune expérience ne prouvera jamais définitivement que mon équation est juste; une seule suffira à prouver qu'elle est fausse". On sent très bien cette dissymétrie même dans la mathématique formaliste, car cette fois, contrairement au tiers cas, la théorie formelle ne peut plus, sous peine de contradiction, donner un résultat différent de la vérité sémantique. Si la mathématique formelle se ressent ainsi de cette dissymétrie, c'est évidemment parce que, par construction, elle tient pour vrai ce qui est établi constructivement. En effet, ses pères fondateurs, qui furent des hommes sages et avisés, avaient bien compris qu'une théorie formelle n'est intéressante que si elle est conforme à la réalité constatable. La seule chose qui manqua à leur sagesse fut de prévoir qu'en léguant à la postérité un dogme même parfait, mais soigneusement nettoyé du souvenir de sa fabrication, dont ils avaient honte, leur oeuvre allait courir le risque de sombrer dans le psittacisme et la stérilité.

(7) Signalons ici qu'il **n'y a pas de meilleure définition** du mot constructif que celle-ci : un algorithme constructif est un algorithme pouvant être traduit en programme. Les ordinateurs n'existaient pas du temps de Brouwer, et cela explique peut-être pourquoi il a eu du mal à expliquer ce qu'il entendait par "constructif"; mais aujourd'hui ce mot a un sens absolument univoque.

(8) Du moins en principe, car si n_0 est trop fantastiquement grand la preuve de $P(n_0)$ est humainement inaccessible; nous profitons de cette note pour faire remarquer ceci : si au lieu de se contenter de distinguer entre ce qui est *en principe* constructivement démontrable et ce qui ne l'est pas, on tient compte de toute une gradation dans la complexité des démonstrations, on est conduit à une discussion plus riche, mais aussi plus difficile, que celle de l'intuitionnisme classique; cela aussi est une réalité qui peut être prise en compte.

13. Quelle attitude les mathématiciens pourraient-ils adopter s'ils étaient confrontés à la première des deux situations envisagées ci-dessus? Notons bien qu'elle est à rapprocher de celle que nous avons déjà discutée au numéro 5 (au sujet des ensembles non mesurables). On saurait qu'aucune démonstration constructive ne sera jamais possible, ni du théorème de Fermat, ni de sa négation, et nous avons vu au numéro 11 que cela signifiait que le théorème de Fermat serait sémantiquement vrai (de façon plus précise : le théorème de Fermat se vérifierait toujours sur tous les entiers explicitement définis par un algorithme constructif; autrement dit il se vérifierait toujours dans tous les cas que nous pourrions jamais rencontrer dans les siècles des siècles). Dans ces conditions, pour l'*idéologie* formaliste, il n'y a aucun problème : si par exemple un mathématicien démontre formellement que le théorème de Fermat est faux, alors le contre-exemple existe (voyez ce que Hilbert écrivait dans sa lettre à Frege). On n'affirmera jamais que ce contre-exemple pourrait un jour se rencontrer sur l'écran d'un ordinateur; on se contentera de ne pas s'intéresser à cette question ou, si on y est acculé par un intuitionniste militant, on usera du sophisme "aucun objet mathématique n'existe, celui-là pas plus qu'un autre". Si (autre possibilité) les logiciens démontrent par la métamathématique formelle que le théorème de Fermat est indécidable, il n'y a pas de problème non plus : il suffira de choisir, selon des critères arbitraires, si on ajoute le théorème de Fermat aux autres axiomes de l'arithmétique ou si au contraire on ajoute sa négation. En pratique, les choses se passeront probablement ainsi : quelques mathématiciens particulièrement couronnés décideront en fonction de leurs goûts quelle devra être la vérité pour les générations futures, et à partir de cet instant le contre-exemple existera ou n'existera pas. Sans aucun doute, c'est ici que nous mettons le doigt sur la vraie nature de la divergence entre Brouwer et Hilbert. Pour le premier, il existe en mathématique, comme dans les autres sciences, une vérité objective (9); pour le second, elle n'existe pas ou du moins il décrète que la mathématique ne doit pas s'y intéresser.

14. Pour l'intuitionniste, donc, le but de l'arithmétique est d'en savoir plus sur les nombres naïfs, en s'aidant de théories, tandis que pour le formaliste, le but est d'en savoir plus sur une théorie particulière léguée une fois pour toutes. Et aussi : pour l'intuitionniste, la rigueur consiste à appréhender la réalité arithmétique de la façon la plus objective possible, c'est à dire en séparant rigoureusement ce qui dépend de la théorie de ce qui n'en dépend pas (selon le bon vieil esprit scientifique, la théorie ne doit servir à préjuger *que de ce qu'on s'attend à observer*), tandis que pour le formaliste la rigueur consiste uniquement dans la rigidité des règles logiques. Ces deux visions qui s'opposent ainsi chez les mathématiciens de notre siècle peuvent se retrouver un peu partout dans l'histoire, comme s'il s'agissait de caractères

(9) Nous ne voulons pas entrer dans une polémique métaphysique qui nous intéresse assez peu; prenons une définition minimale de l'objectivité : "ce qui est indépendant de la théorie". Même si on n'approuve guère les discussions assez fumeuses autour de "la réalité en mécanique quantique", on peut constater que les anti-réalistes (d'ailleurs extrêmement rares) ne doutent pas un instant que les faits expérimentaux qui selon eux démontrent l'inexistence de la réalité ne sont pas un effet de la théorie (la mécanique quantique) qui disparaîtrait avec une autre, mais un fait réel.

humains éternels; par exemple, le débat qui eut lieu entre Galilée et la scolastique est en tous points semblable : pour Galilée, comme pour les intuitionnistes, la vérité était ce qu'on observe; pour les philosophes scolastiques, comme pour les formalistes d'aujourd'hui, la vérité était ce qu'on peut déduire de la Bible par des règles logiques formalisées. Rappelons que l'une des principales critiques que les scolastiques firent à l'encontre de l'esprit scientifique naissant fut la suivante : Galilée, pour chercher la vérité, fait tout dépendre de l'observation, c'est à dire de l'usage des sens; or ceux-ci ne sont pas fiables, car ce qu'ils nous montrent n'est qu'illusion, alors qu'au contraire, ce qu'on déduit des saintes écritures par la voie de syllogismes parfaits apporte une certitude absolue.

Terminons cette section par une remarque importante. Nous avons dit et redit que la vérité, c'est ce qui est *sémantiquement* vrai, et que sur cela, les mathématiciens n'ont aucun pouvoir : ils peuvent choisir, comme axiome à ajouter à ceux de Peano, une conjecture de l'arithmétique *sémantiquement* fausse; mais cela n'a aucun effet sur la possibilité de calculer effectivement l'entier qui fait fonction de contre-exemple. Cela ne veut pas dire que les mathématiciens n'ont aucune liberté dans le choix des axiomes d'une théorie. Pour illustrer cela, imaginons une conjecture $\forall n, P(n)$ dans le tiers cas, et que la mathématique formelle actuellement en vigueur fournisse une démonstration de la négation $\exists n, \text{non} P(n)$ de la conjecture. Comme nous avons dit précédemment, cela voudrait donc dire que la théorie est "fausse" ou "réfutée". Mais le fait qu'une théorie soit fausse n'est pas une raison suffisante pour la rejeter, et cela pour au moins trois raisons (valables dans toutes les sciences et pas seulement dans la mathématique) :

1. la théorie peut être fausse uniquement sur un point peu important et juste par ailleurs (dans les sciences de la nature ceci est la situation *normale*);

2. pour changer une théorie, il ne suffit pas d'avoir trouvé une inadéquation même stratégique, il faut avoir sous la main une théorie de rechange (il suffit pour se convaincre de cela de voir ce qu'ont dit les physiciens entre la date de l'expérience de Michelson-Morley, 1881, et la date de la Relativité Restreinte, 1905 (10); Lorentz et Poincaré, entre autres, ont dit beaucoup de choses passionnantes et, du moins nous l'espérons, il n'y a pas de raison que les mathématiciens d'aujourd'hui aient moins d'imagination);

3. comme nous l'avons déjà dit au numéro 5 à propos des ensembles non mesurables, on peut préférer garder une théorie un peu fausse, mais relativement facile, plutôt que de recourir à une autre moins fausse, mais aussi plus difficile (privée par exemple des commodités de l'infini); c'est d'ailleurs un argument avancé par Hilbert dans le texte de l'annexe 2.

(10) Dans cet exemple l'inadéquation était que la vitesse de la lumière ne changeait pas selon la vitesse de l'observateur, alors que la théorie en vigueur prévoyait le contraire; mais on peut constater, en étudiant un peu comment les physiciens de l'époque encaissaient cela, que cette inadéquation ne paraissait pas stratégique à ce moment là; c'est la Relativité qui a fait paraître cela stratégique.

Naturellement il y a une quatrième raison possible de ne rien changer à une théorie qui viendrait d'être réfutée par la voie que nous avons décrite; cette quatrième raison, suscitée par l'*idéologie* formaliste, serait de nier la valeur de la réfutation sous le prétexte que ce que dit un théorème est par nature plus vrai que ce qui est observable (en oubliant habilement que si le théorème est *démontré*, les axiomes sont *choisis* : la victime de cette escroquerie, généralement jeune, est savamment mise en condition d'oublier l'origine des axiomes par la longueur et la difficulté des démonstrations desdits théorèmes). Ceci est très conservateur et par conséquent très vilain. Mais il ne faut pas dramatiser. Depuis toujours, notamment en théorie mathématique des nombres où ce problème est particulièrement fréquent, les mathématiciens ont pris garde de distinguer les résultats obtenus par la méthode constructive de ceux obtenus par l'axiome du choix ou autres procédés essentiellement formels, ce qui montre que l'intuitionnisme latent est bien plus répandu que ne le prétend la propagande officielle.

En disant que c'est la confrontation avec une réalité objective qui rend la science vivante, nous pouvons toutefois rencontrer l'objection suivante : rien ne prouve que la seule réalité susceptible de nourrir la mathématique soit précisément la réalité constructive des nombres. La société humaine est riche de bien des activités pouvant jouer ce rôle. Nous n'avons rien à répondre à cette objection, si ce n'est que nous sommes d'accord. Mais si le lecteur qui a songé à cette objection avait en vue le changement radical que l'apparition de l'ordinateur apporte avec la possibilité d'une véritable *expérimentation numérique*, nous pouvons lui répondre que justement l'informatique ne travaille qu'avec la réalité constructive, et que son développement ne peut que renforcer la thèse épistémologique que nous soutenons ici.

15. Nous pensons avoir suffisamment montré l'importance qu'avait à nos yeux cette dialectique de la théorie et de la réalité; nous prétendons que ce constat, extrêmement banal dans les sciences de la nature, s'applique également à la mathématique. Mais pour que cet exposé soit satisfaisant, il faudrait analyser aussi ce que cette dialectique a de spécifique dans le domaine mathématique. Jusqu'à présent nous avons surtout insisté sur ce qui rapprochait la mathématique des autres sciences, juste pour le plaisir d'une sorte d'unification épistémologique, mais peu de ce qui fait son originalité. C'est pourquoi nous allons en parler dans cette section et les deux suivantes. En même temps nous pourrions illustrer notre conception en discutant l'exemple le plus simple possible, celui des nombres entiers naturels, de façon plus approfondie, notamment en poussant plus avant la discussion à propos des conjectures de l'arithmétique.

L'arithmétique formelle ou arithmétique de Peano est une théorie particulièrement simple du point de vue conceptuel. Son *concept* de base est l'ensemble $\mathbb{N}$, et ce concept est décrit et entièrement défini par les axiomes de Peano. Son *objet* est la suite, jamais achevée, des nombres entiers concrets qui peuvent être obtenus (au moins en principe) comme résultat d'un algorithme constructif ou d'un programme. Précisons tout de suite pour le lecteur très empiriste que ces

nombre vont très au-delà de la cardinalité des ensembles matériellement réalisables : on peut écrire en trois lignes un programme qui calcule un nombre entier bien supérieur à 10^{100} , qui est lui-même déjà supérieur au nombre de toutes les particules élémentaires qui composent l'univers. Nous appellerons *entiers naïfs* ces entiers concrets ; nous avons déjà parlé de ces nombres aux numéros 10 à 13 : ce sont ceux qui existent réellement, c'est à dire indépendamment de la théorie qu'on prend pour les décrire, et qu'on a une chance de rencontrer un jour sur l'écran d'un ordinateur, si on fait abstraction de toutes les limitations inhérentes à la condition humaine.

Parmi ces entiers naïfs, certains sont immédiats, connus de tous, et très simples : 0, 1, 2, 3, par exemple ; d'autres, tels que 10^{100} , sont plus compliqués et il faut pour les désigner quelques phrases d'explications (ce qu'on appelle un algorithme) ; il n'y a aucune limite supérieure à la complexité des entiers naïfs, et on peut dire que, en gros, plus un entier naïf est grand, plus il est compliqué (c'est à dire plus l'algorithme qui est nécessaire pour le définir est long). Mais une chose est sûre : les algorithmes qui servent à définir les nombres naïfs sont toujours traduisibles dans le langage de l'arithmétique de Peano, et d'ailleurs celle-ci a été agencée exprès pour avoir, entre autres, cette propriété. Donc chaque entier naïf a son reflet, sous forme de concept, dans la théorie. (Notre lecteur trouvera peut-être que la distinction que nous faisons ici entre les entiers-objets et les entiers-concepts est une sophistication de trop, puisque — pour une fois — la correspondance entre l'objet et le concept frise l'identité ; disons que cette précaution servira à nous protéger contre les attaques des philosophes, dont certains ne le cèdent en rien aux mathématiciens formalistes pour couper les cheveux en quatre.)

16. Revenons encore à notre discussion à propos du théorème de Fermat ou de n'importe quelle conjecture de la forme $\forall n, P(n)$. Nous avons dit que rien ne permet d'exclure que la mathématique formelle prévoie l'existence d'un contre-exemple, même si ce contre-exemple n'existe pas en réalité ; cela pourrait arriver sans que cette mathématique formelle soit pour autant contradictoire. Ainsi donc, étant donné le prédicat $P(n)$, il y a toujours *a priori* les trois possibilités suivantes : ou bien il y a une démonstration constructive (finitaire, c'est à dire non infiniment longue), déjà connue ou non, que $P(n)$ est vrai pour tout entier n ; ou bien il existe une démonstration constructive du contraire, c'est à dire qu'on dispose d'un programme calculant un entier n_0 et d'une démonstration constructive du fait que $\text{non}P(n_0)$ soit vrai (l'entier n_0 est donc naïf), ou bien, tiers cas non exclu, on pourrait constater (soit directement, soit par une démonstration constructive spécifique) la vérité de $P(n)$ pour chaque entier naïf particulier, mais cette vérification par exhaustion deviendrait de plus en plus difficile et malaisée, au fur et à mesure que l'entier naïf n serait plus grand et donc aussi plus complexe (11), de sorte qu'une vérification globale ne pourrait être finitaire. Dans le tiers

(11) La complexité d'un entier naïf est la longueur du plus court programme qui le calcule, mesurée (par exemple) en bits. Cette longueur dépend quelque peu du langage de programmation, mais pas essentiellement ; et on peut de toute façon choisir un langage de référence.

cas on ne peut pas *démontrer* $\forall n, P(n)$, mais on est assuré que pour tout entier *naïf* n , $P(n)$ sera vrai : nous exprimons cela sous forme condensée par la phrase : “ $\forall n, P(n)$ est sémantiquement vrai quoique non démontrable”.

Que peut-on dire avec le tiers cas? Plusieurs attitudes sont possibles :

a) croire que le tiers cas n'existe pas, c'est à dire croire qu'il est exclu pour toutes les conjectures de l'arithmétique possibles et imaginables; mais ceci est équivoque : en effet, on peut

a1) croire *vraiment* et s'engager, prendre un risque parce qu'on en est convaincu (attitude rarissime qui *semble* avoir été celle de Cantor, mais ce n'est pas sûr et il n'est plus là pour faire de telles confidences); c'est un authentique acte de foi;

a2) croire par ignorance, parce qu'on n'a jamais songé à distinguer la vérité dans Z.F.C. et la vérité sémantique (attitude de la grande majorité des mathématiciens de base, parce que l'éducation formaliste a censuré ces questions “métaphysiques”)

a3) étant donné qu'on peut démontrer l'incomplétude par la logique formelle, on peut considérer que l'existence du tiers cas est établie; mais elle ne l'est que formellement, c'est à dire que la proposition indécidable du type $\forall n, P(n)$ construite “à la Gödel” n'est pas *sémantique*, elle ne peut pas être interprétée comme ayant un sens dans la culture mathématique (elle n'existe que si on présuppose que la mathématique est l'activité idéale de machines de Turing travaillant hors du temps : nous y reviendrons à la section 18); croire que le tiers cas est exclu peut donc encore consister à croire que *le tiers cas ne peut pas se produire pour les conjectures ayant une pertinence historique* (mais cela renvoie à a1).

b) penser qu'à moins d'un miracle comme l'harmonie préétablie invoquée parfois par Hilbert, le tiers cas existe certainement, peut-être même pour des conjectures connues comme celle de Fermat.

La position a) est équivalente à celle-ci : croire que l'arithmétique formelle (= l'ensemble de toutes les propositions déductibles des axiomes de Peano) coïncide exactement avec la réalité des entiers naïfs (= l'ensemble des propriétés de ces entiers, ou propositions sémantiquement vraies), c'est à dire en fin de compte nier l'incomplétude sémantique. Vous pouvez maintenant relire le troisième constat de Brouwer (annexe 1) à la lumière de ce commentaire.

Et quelles conséquences tirer de la position b)? Puisqu'on admet qu'il doit y avoir une inadéquation entre la mathématique formelle et la réalité arithmétique (c'est à dire qu'il doit y avoir une conjecture $\forall n, P(n)$ sémantiquement vraie, mais formellement fausse), c'est donc que la théorie, la mathématique formelle, affirme l'existence d'un entier ω pour lequel $P(\omega)$ est faux, alors que $P(n)$ est vrai pour tous les naïfs (voir numéro 11). Conclusion : le postulat “les entiers naïfs remplissent $\mathbb{N}$ ” ou “la mathématique formelle n'introduit pas d'objet idéal” est

équivalent au postulat “tout ce qui est sémantiquement vrai est déductible des axiomes de Peano”. On peut aussi formuler cette conclusion ainsi : le constat “les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ” est équivalent au troisième constat de Brouwer (annexe 1), à condition évidemment d’avoir bien compris ce dernier. Nous espérons que notre commentaire y aura aidé.

17. L’inadéquation entre la théorie arithmétique et la réalité arithmétique se traduit donc par la présence au sein de la théorie d’entiers idéaux, c’est à dire d’entiers “introuvables” (ontologiquement) dans la réalité. Si on veut rapprocher la théorie de la réalité, la rendre plus adéquate (12), la solution est de rajouter la conjecture responsable de l’inadéquation comme axiome supplémentaire aux axiomes de Peano, mais alors il faut supprimer ailleurs l’axiome non strictement arithmétique (par exemple l’axiome du choix) qui a permis de démontrer formellement la négation de la conjecture. Si on isole l’arithmétique de Peano du reste de la mathématique formelle (de Z.F.C. par exemple) la conjecture apparaîtra comme indécidable : l’existence d’entiers idéaux ne sera pas un théorème de l’arithmétique, à moins que pour des raisons quelconques on n’ajoute la *négation* de la conjecture aux axiomes de Peano. Mais on peut aussi “diminuer” l’incomplétude en ajoutant $\forall n, P(n)$ aux axiomes de Peano, ce qui nous met dans la même situation que ci-dessus, sauf que nous n’avons pas le souci d’une mathématique formelle englobant l’arithmétique (13). En fait on ne diminue rien du tout, bien sûr, en vertu de l’équation célèbre $\infty - 1 = \infty$ puisque ajouter la conjecture $\forall n, P(n)$ aux axiomes de Peano ne fait que nous ramener au problème de l’incomplétude avec huit axiomes au lieu des sept de Peano. En outre, le théorème d’incomplétude nous dit que formellement l’incomplétude demeure quel que soit le nombre des axiomes ajoutés : exprimé dans un autre langage, le théorème d’incomplétude affirme que la théorie formelle ne peut pas être rendue complète *finitairement*.

En quelque sorte l’arithmétique de Peano est une théorie très pauvre puisqu’il y a beaucoup de propriétés des entiers naïfs qui ne sont pas prévues par cette théorie ; mais il se trouve que cette pauvreté est peu visible car les propriétés en question sont *en dehors de notre champ de vision* (le théorème de Fermat est peut-être une de ces propriétés, ou la conjecture de Goldbach, ou celle de Syracuse ; allez donc savoir !). En adjoignant aux axiomes de Peano un nombre quelconque (mais fini) d’axiomes puisés dans une liste inépuisable de conjectures du tiers cas, on enrichirait progressivement l’arithmétique en “diminuant” son incomplétude. On peut dire cela autrement : la *réalité arithmétique* (=les propriétés sémantiquement vraies des entiers naïfs) est inépuisable par rapport au programme formaliste lancé par Hilbert. Si par contre on enrichit la théorie arithmétique non en lui adjoignant des conjectures indécidables comme axiomes supplémentaires, mais en l’englobant

(12) Ce qui n’est pas nécessairement souhaitable, voir numéro 14.

(13) En quelque sorte, nous distinguons ici l’inadéquation (quand on peut démontrer par une mathématique formelle englobant l’arithmétique de Peano que $\exists \omega, \text{ non } P(\omega)$ est vrai quoique sémantiquement faux) et la simple incomplétude (quand on isole l’arithmétique de Peano et que $\forall n, P(n)$ aussi bien que $\exists \omega, \text{ non } P(\omega)$ sont indécidables).

dans une théorie plus vaste, alors on rencontre le problème de l'inadéquation; mais on créerait aussi de l'inadéquation (de façon quelque peu plus artificielle cependant) en ajoutant comme axiome supplémentaire non pas une conjecture du tiers cas, mais sa négation (nous avons vu que cela était possible sans entraîner de contradiction). Chaque conjecture du tiers cas *ainsi niée* ferait apparaître dans la théorie un nouveau contingent d'entiers idéaux, dont l'existence ne serait postulée par la théorie formelle que pour rendre fausses, parce qu'on l'aurait souhaité ainsi, des conjectures qui sont sémantiquement vraies.

Bien sûr chaque axiome supplémentaire modifie le *concept* $\mathbb{N}$ (l'*objet* qu'est la suite jamais achevée des entiers naïfs ne change évidemment pas) : en le rapprochant de l'objet si l'axiome ajouté est une conjecture du tiers cas $\forall n, P(n)$; en posant l'existence d'entiers idéaux si l'axiome ajouté est la négation $\exists \omega, \text{ non } P(\omega)$ d'une telle conjecture. Pour chaque famille ainsi donnée d'axiomes supplémentaires on aura un $\mathbb{N}$ différent, mais ces $\mathbb{N}$ ne différeront que par les conséquences des axiomes supplémentaires. En revanche les propriétés déductibles des axiomes de Peano seront, elles, communes à tous ces $\mathbb{N}$. Ainsi on voit très clairement apparaître *comme conséquence de l'incomplétude* une multiplicité d'ensembles $\mathbb{N}$ obéissant tous aux axiomes de Peano, mais différant entre eux par le fait que telle ou telle conjecture de l'arithmétique y est vraie ou pas. Le lecteur reconnaîtra bien sûr la propriété de *non catégoricité* des axiomes de Peano, prédite par le théorème de Löwenheim-Skolem.

Ainsi, d'un point de vue intuitionniste, l'incomplétude et la non catégoricité des axiomes de Peano semblent bien naturelles, si ce n'est évidentes, et étroitement liées. On comparera avec l'opacité des versions formalistes.

18. A vrai dire, les versions formalistes ne sont opaques que si on ignore que le formalisme n'est qu'une théorie; en quelque sorte si on prend les théorèmes formels d'incomplétude et de non catégoricité *à la lettre*. Pour mieux discuter du mécanisme de cette opacification, nous allons présenter ici une démonstration de l'incomplétude, qui est inhabituelle (quoique légitime), mais qui a l'avantage d'être simple et claire; nous aurions pu avoir la même discussion à partir de la démonstration de Gödel, mais il nous aurait fallu auparavant exposer celle-ci, ce qui eût été trop long. Bien sûr cette démonstration est formaliste; il ne peut en être autrement. La voici.

Rappelons que la complexité $l(n)$ d'un nombre entier n est la longueur (comptée en bits) du plus court programme qui le calcule. Pour la plupart des nombres $l(n)$ est le logarithme en base 2 de n (= le nombre de chiffres binaires), mais pour quelques nombres, très rares, $l(n)$ est plus petit.

Considérons un prédicat $P(n)$; celui-ci peut toujours être interprété comme une fonction à valeurs dans $\{-1; +1\}$, égale à $+1$ si $P(n)$ est vrai et à -1 si $P(n)$ est faux. On peut dénombrer les entiers de complexité inférieure à un entier donné N : les programmes étant codés selon un code binaire, le nombre total de programmes de longueur inférieure à N est assurément inférieur à 2^N , car on peut remplir

N bits de 2^N manières différentes, dont quelques unes seulement respecteront la syntaxe d'un programme exécutable. Donc en particulier il y aura moins de 2^N entiers de complexité inférieure à N . Sur l'ensemble de tous les entiers de 0 à $\omega - 1$, il y aura donc $\alpha \leq 2^N$ entiers de complexité inférieure à N et par conséquent il y en aura $\omega - \alpha \geq \omega - 2^N$ de complexité supérieure à N .

Considérons maintenant les fonctions $P(n)$ sur l'ensemble $\{0, \dots, \omega - 1\}$, égales à $+1$ pour tous les n de complexité inférieure à N , et à -1 pour au moins un n de complexité supérieure à N . Leur nombre total est $2^{\omega - \alpha} - 1$, qui est supérieur à $2^{\omega - 2^N - 1}$. Pour $\omega > 2^N$ il y en a beaucoup ! Alors prenons $N = 10^{1000}$. Un entier n_0 de complexité supérieure à 10^{1000} est impossible à définir. Nous regrettons beaucoup que Poincaré ne soit plus parmi nous ; il nous dirait si un tel n_0 est un pur néant ou pas (voir annexe 3). Ecrire une définition (prédicative, c'est à dire un programme) de cet entier est en effet impossible, radicalement : Poincaré dit : "même s'il faut cent générations pour l'écrire, il existe" ; mais cent générations, cela permet d'atteindre une complexité de l'ordre de 10^{12} , mettons 10^{20} en admettant des progrès fantastiques dans la technologie des ordinateurs et le génie logiciel ; nous sommes fort loin de l'horizon des 10^{1000} . Un tel entier est-il naïf, est-il sémantique, est-il réel ? Brouwer aurait répondu sans hésiter : OUI. Nous répondrons : NON, parce que cela nous arrange bien pour le moment (mais rassurez-vous, nous avons un doute).

Il existe donc des prédicats $P(n)$ vrais pour tous les entiers que nous rencontrerons jamais, et faux pour des entiers totalement inaccessibles ; si n_0 est un tel entier, il est hors de question que nous puissions démontrer $\text{non}P(n_0)$, ne serait-ce que parce qu'une telle démonstration exigerait la mention explicite de n_0 ; mais il est impossible également de démontrer $\forall n, P(n)$, car s'il y avait une telle démonstration, $P(n_0)$ serait vrai. Nous sommes donc bel et bien dans *le tiers cas*, et n_0 serait un entier idéal.

Cette démonstration est-elle rigoureuse ?

On peut la critiquer sur deux aspects. **a)** Elle fait intervenir un élément non purement logique : les limites humaines ; comme l'aurait dit Cantor, en mathématique la vérité est indépendante de l'observateur ; ce qui est vrai doit être vrai même pour Dieu. **b)** On a démontré l'existence d'un prédicat P dans le tiers cas ; mais la démonstration ne dit rien de ce P ; rien ne prouve que la complexité de P est assez petite pour que P "existe" ; si la complexité de P est aussi de l'ordre de 10^{1000} , la conjecture $\forall n, P(n)$ n'est pas plus sémantique que n_0 .

La critique **a)** est inessentielle : d'abord, comme nous l'avons annoncé avant de présenter cette démonstration, on peut avoir la même discussion à propos des démonstrations "à la Gödel" ou "à la Cantor" qui elles, échappent à la critique **a)**. Ensuite, on peut en modifiant à peine la démonstration ci-dessus (il suffit de remplacer *entier inaccessible* par *entier non-standard*) la rendre "rigoureuse" selon les canons formalistes les plus orthodoxes ; mais bien sûr on

ne démontrera pas que le prédicat P est *standard*, et pour cause. Par contre la critique **b)** est incontournable. D'ailleurs elle n'est que l'illustration, sur un cas particulier que nous avons voulu pédagogique et qui est, il est vrai, quelque peu simpliste, de la critique générale de Brouwer contre le formalisme. En ce sens notre illustration est une bonne caricature : elle montre ce qu'il y a de faux dans le formalisme en exagérant le degré de la fausseté, mais non sa nature. Elle nous fait voir, en grossissant à peine, la distance entre la logique (théorie formelle) et l'arithmétique sémantique (intuitionniste). Mais le théorème d'incomplétude de la logique formaliste (dont la valeur scientifique est bien sûr de tout premier ordre) est tout aussi faux : il affirme l'existence d'une proposition indémontrable ainsi que sa négation, mais ne dit **rien**, et pour cause, de son contenu sémantique.

En négligeant la critique inessentielle **a)**, la démonstration ci-dessus est formellement rigoureuse; son argument — le dénombrement — est sans faille. Mais cette rigueur fond comme la neige au soleil dès lors qu'on tient compte du contenu sémantique du prédicat P . Et ce qui fait qu'une proposition arithmétique a un contenu sémantique, un sens si vous préférez, c'est que la mathématique est une *culture*, qu'elle parle de choses qu'on se représente mentalement, même si elles sont abstraites ou idéales. La logique, ou plus généralement la mathématique, peut être parfaitement rigoureuse lorsqu'elle parle de langages formalisés simples et idéaux (car il faut idéaliser pour raisonner); elle ne peut plus l'être quand elle veut parler de l'arithmétique sémantique (die inhaltliche Arithmetik, comme disaient Brouwer et Hilbert). Elle ne peut donc apporter qu'une connaissance *approchée*. Très précieuse, comme d'ailleurs toutes les connaissances approchées. La mystification apparaît, lorsque pour éviter la honte d'une science approchée et conserver l'apparence de la rigueur, on dénie toute pertinence à la réalité sémantique. En faisant cela, le formalisme a formé des générations d'experts qui ne conçoivent plus la mathématique comme une culture.

19. Conclusion. Dans les pages que vous venez de lire, nous avons voulu vous montrer la logique de l'infini en adoptant un point de vue peu habituel; ou plus exactement, un point de vue *oublié*. Car nous sommes convaincus qu'il n'y a rien ci-dessus qui n'ait déjà été dit au début de ce siècle, sous une forme peut-être différente (la lecture des annexes devrait vous le prouver).

Mais ce que par-dessus tout nous avons voulu dire, c'est que cette façon oubliée de voir la logique de l'infini est plus qu'une façon parmi d'autres de la présenter : c'est par l'intuitionnisme qu'on comprend la vraie nature de cette logique, car l'intuitionnisme consiste à la voir de l'extérieur. Lorsqu'au contraire on aborde la logique de l'infini par le formalisme on ne voit plus sa vraie nature; celle-ci est masquée par des détails purement anecdotiques que la théorie formelle met en avant pour des raisons techniques et non fondamentales. Par exemple, dans la démonstration de la section 18, le nombre $N = 10^{1000}$ est anecdotique. Autre exemple : nous avons vu à la section 17 pourquoi une infinité de concepts $\mathbb{N}$ tous différents peuvent répondre aux axiomes de Peano; c'est parce que ces derniers ne résument qu'une faible partie des propriétés des entiers naïfs. Dans la présentation

formaliste habituelle, ce fait est exprimé sous la forme du théorème de Skolem, dont la démonstration fait appel à la notion d'ultraproduit, c'est à dire à l'axiome du choix. Cette présentation formaliste fait croire ainsi que la propriété dite de non-catégoricité est une conséquence de l'axiome du choix, alors que cette propriété existe indépendamment de cet axiome : le fait que les axiomes de Peano soient loin d'épuiser la vérité sur les entiers naïfs n'a rien à voir avec l'axiome du choix. Tout au plus on peut dire : "l'axiome du choix est juste parce que ses conséquences logiques – telles que cette non-catégoricité – sont justes"; le jour où l'une de ses conséquences sera fausse, il faudra l'abandonner! Le rôle joué par l'ultraproduit est purement anecdotique, il provient de la théorie choisie et non de la nature des choses; il n'est qu'une astuce théorique imaginée par Skolem pour formaliser la non-catégoricité, qui est une propriété objective des axiomes de Peano.

Il y a une sorte de perversion par le formalisme, qui fait apparaître comme cause fondamentale ce qui n'est qu'une contingence technique. Une situation épistémologiquement comparable est celle de l'ancien système de Ptolémée, qui permettait de calculer, avec exactitude pour l'époque, les trajectoires apparentes des planètes, mais en postulant des sphères rigides en rotation. Ces sphères étaient anecdotiques comme les artifices du formalisme : en effet, lorsqu'on a commencé à utiliser le système de Copernic, on ne voyait (ou on faisait semblant pour ne pas avoir d'ennuis) dans ce dernier qu'un autre artifice, aussi anecdotique que le premier mais techniquement plus simple. La conception contemporaine du système solaire est au contraire réaliste (ce que les sondes spatiales nous font voir est une réalité), comme l'est l'intuitionnisme face à la réalité arithmétique.

On peut objecter à cela que la réalité ultime du système solaire reste toujours énigmatique (ou transcendente pour parler comme Kant), les sondes spatiales ne montrant que des apparences. Certes! Mais nous n'avons jamais dit que la réalité ultime des nombres naïfs était moins énigmatique.

Annexe 1

Die Richtigkeitsdifferenzen zwischen der formalistischen Neubegründung und dem intuitionistischen Neubau der Mathematik werden beseitigt sein, und die Wahl zwischen beiden Beschäftigungen sich auf eine Geschmacksangelegenheit reduzieren, sobald die folgenden in erster Linie auf den Formalismus bezüglichen, aber in der intuitionistischen Literatur zuerst formulierten Einsichten allgemein durchgedrungen sein werden. (...)

Erste Einsicht. Die Einteilung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des “mathematischen Formelbestandes” (formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, dass für die letztere Theorie die intuitionistische Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.

Zweite Einsicht. Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens dass die Erforschung des Berechtigungsgrundes und der Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens dass dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfasst.

Dritte Einsicht. Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.

Vierte Einsicht. Die Erkenntnis dass die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen *circulus vitiosus* enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, dass aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d.h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.

Ce texte peut être trouvé dans [2], page 410.

Voici notre traduction :

Les différences de validité entre la refonte formaliste et la reconstruction intuitionniste de la mathématique seront aplanies, et le choix entre ces deux activités se réduira à une simple question de goût, dès lors que tout le monde aura pris conscience des quatre constatations ci-dessous, qui concernent au premier chef le formalisme, mais furent formulées d’abord dans la littérature intuitionniste. (...)

Première constatation. La distinction entre

- a) les efforts des formalistes pour une construction du “corpus des formules mathématiques” (conception formaliste de la mathématique);
- b) une théorie intuitive (sémantique) des lois de cette reconstruction;

et la conviction que la mathématique intuitionniste des entiers naturels est indispensable à la théorie intuitive mentionnée plus haut.

Deuxième constatation. Le rejet de l’usage irréfléchi du principe du tiers exclu ainsi que la reconnaissance du fait que

premièrement l’étude du domaine de légitimité et de validité du principe du tiers exclu représente un objectif essentiel pour la recherche sur les fondements de la mathématique et

deuxièmement ce domaine de validité n’englobe dans la mathématique intuitive (sémantique) que les systèmes finis.

Troisième constatation. L’identification du principe du tiers exclu avec le principe de la possibilité de résolution de tout problème mathématique.

Quatrième constatation. La reconnaissance de ce fait : la justification (sémantique) de la mathématique formalisée par la preuve de sa non contradiction renferme un cercle vicieux, car

cette justification repose sur la validité (sémantique) de l’assertion suivante : “le fait qu’une affirmation n’entraîne pas de contradiction implique la validité de cette affirmation”; c’est à dire que cette justification repose sur la validité (sémantique) du principe du tiers exclu.

Annexe 2

Quoi qu’il en soit, nous constatons ceci : si nous nous cantonnons dans le domaine finitaire [i.e. des propositions, termes, et formules exprimables en un nombre fini de mots], comme nous y sommes bien obligés, nous pouvons nous heurter à des problèmes de logique difficiles à dénouer, et ces problèmes deviennent bien vite inextricables quand les “quel que soit” et les “il existe” apparaissent combinés, et dans des formules emboîtées. En tous cas, les lois logiques que les hommes ont toujours utilisées depuis qu’ils pensent, et qu’Aristote a enseignées, ne sont plus valables. On pourrait à première vue s’en sortir en établissant les lois de la logique qui régissent le domaine finitaire, mais par là nous ne serions pas aidés, puisque justement nous ne voulons pas abandonner l’usage des lois simples de la logique aristotélicienne. De plus, nul, quand bien même il parlerait avec la langue des anges, ne pourrait empêcher les hommes de nier des jugements universels, de particulariser, d’appliquer le principe du tiers exclu. Alors, que faire?

Souvenons-nous *que nous sommes mathématiciens* et qu'en tant que tels nous nous sommes trouvés souvent déjà dans une telle situation délicate, et comment, alors, la méthode géniale des éléments idéaux nous a sauvés. (...) De même que $i = \sqrt{-1}$ a été introduit pour obtenir une formulation aussi simple que possible des lois de l'algèbre, par exemple celle sur l'existence et le nombre des racines d'un polynôme; de même que l'introduction de facteurs idéaux est apparue afin de conserver pour les nombres algébriques les lois simples de la division, comme par exemple l'introduction d'un diviseur commun idéal pour 2 et $1 + \sqrt{-5}$, alors qu'il est impossible d'en trouver un réel, de même nous devons cette fois *ajouter aux propositions finitaires des propositions idéales*, afin de pouvoir conserver les règles formelles simples de la logique aristotélicienne usuelle. Et c'est un fait curieux, que les formes de raisonnement condamnées avec tant de passion par Kronecker sont exactement le pendant de ce que ce même Kronecker admire avec tant d'enthousiasme dans cette arithmétique qui nous préoccupe ici et qu'il célébrait comme le plus grand exploit de la mathématique.

Et maintenant, comment réussir avec nos "propositions idéales"? Il est remarquable, et c'est en tout cas une circonstance heureuse et favorable, qu'il nous suffise pour les atteindre de poursuivre, de façon naturelle et conséquente, le développement que la science des fondements de la mathématique a eu jusqu'ici. En fait nous savons bien que déjà la mathématique la plus élémentaire va au-delà du simple point de vue de la théorie naïve des nombres. La méthode du calcul algébrique, à l'aide des symboles formels que sont les lettres, est en effet autonome par rapport au sens numérique des expressions algébriques (*). Selon ce dernier, les formules ne servent jamais qu'à la simple communication; les lettres représentaient des chiffres, et par une équation on exprime l'identité de deux nombres. Au contraire dans l'algèbre, nous considérons les expressions algébriques en elles-mêmes, comme des structures autonomes, et les théorèmes relatifs au contenu numérique sont formalisés par elles. A la place de propositions sur les chiffres apparaissent des formules qui de leur côté deviennent maintenant des objets concrets aisément observables; et à la place de démonstrations numériques nous déduisons une formule à partir d'une autre selon des règles définies".

David HILBERT
Ueber das Unendliche
 Mathematische Annalen
 vol. 95, 1926, pages 161 - 190

(*) Cette note pour signaler au lecteur que notre traduction de cette phrase ne respecte pas du tout la construction allemande, car c'était le seul moyen de ne pas en trahir le sens. Voici la phrase allemande : "...ist nämlich in der inhaltlich-anschaulichen Zahlentheorie, wie wir sie bisher auffaßten, nicht mit inbegriffen", c'est à dire littéralement : "...n'est en effet pas du ressort de la théorie sémantique-naïve des nombres, comme nous l'avons conçue jusqu'à présent". Comme on le voit, la difficulté ne provient pas de la langue française, mais du fait que les mots employés par Hilbert, même en allemand, ne seraient plus compris aujourd'hui comme ils pouvaient l'être alors. Vous remarquerez le mot *inhaltlich* (sémantique), qui signifie ici "relatif à la valeur numérique sous-jacente". L'algèbre consiste à passer des lois du calcul numérique à un calcul purement formel; on passe donc d'un calcul "sémantique" à un calcul formel.

Après ce passage, Hilbert explique comment, aux propositions écrites dans un langage formalisé, mais ayant un sens concret, c'est à dire un contenu sémantique, on peut ajouter des propositions qui n'en ont aucun (qui par exemple expriment des propriétés de cardinaux transfinis) de façon à engendrer un corpus de propositions dans lequel on peut pratiquer la déduction aveugle par application de règles définies.

Annexe 3

Qu'on me permette de reprendre un exemple cité par M. Russell. C'était contre moi d'ailleurs qu'il l'invoquait. (...)

Quel est le plus petit nombre entier qui ne peut pas être défini par une phrase de moins de cent mots français? Et d'abord ce nombre existe-t-il?

Oui, car avec cent mots français, on ne peut construire qu'un nombre fini de phrases, puisque le nombre des mots du dictionnaire français est limité. Parmi ces phrases, il y en aura qui n'auront aucun sens ou qui ne définiront aucun nombre entier. Mais chacune d'elles pourra définir *au plus* un seul nombre entier. Le nombre des entiers susceptibles d'être définis de la sorte est donc limité; par conséquent il y a certainement des entiers qui ne peuvent l'être; et parmi ces entiers, il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres.

Non, car si cet entier existait, son existence impliquerait contradiction, puisqu'il se trouverait défini par une phrase de moins de cent mots français, à savoir par la phrase même qui affirme qu'il ne peut pas l'être.

Ce raisonnement repose sur une classification des nombres entiers en deux catégories, ceux qui peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français et ceux qui ne peuvent pas l'être. En posant la question, nous proclamons implicitement que cette classification est immuable et que nous ne commençons à raisonner qu'après l'avoir établie définitivement. Mais cela n'est pas possible. La classification ne pourra être définitive que lorsque nous aurons passé en revue toutes les phrases de moins de cent mots, que nous aurons rejeté celles qui n'ont pas de sens, et que nous aurons fixé définitivement le sens de celles qui en ont un. Mais parmi ces phrases, il y en a qui ne peuvent avoir de sens qu'après que la classification est arrêtée, ce sont celles où il est question de cette classification elle-même. En résumé la classification des nombres ne peut être arrêtée qu'*après* que le triage des phrases est achevé, et ce triage ne peut être achevé qu'*après* que la classification est arrêtée, de sorte que ni la classification, ni le triage ne pourront *jamais* être terminés.

Ces difficultés se rencontreront beaucoup plus souvent encore quand il s'agira de collections infinies. (...)

De là une distinction entre deux espèces de classifications, applicables aux éléments des collections infinies; les classifications *prédicatives*, qui ne peuvent être bouleversées par l'introduction de nouveaux éléments; les classifications *non prédicatives* que l'introduction des éléments nouveaux oblige à remanier sans cesse.

Est-il possible de raisonner sur des objets qui ne peuvent pas être définis en un nombre fini de mots? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose que des paroles vides? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables? Quant à moi, je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.

Tous les objets que nous aurons jamais à envisager, ou bien seront définis en un nombre fini de mots, ou bien ne seront qu'imparfaitement déterminés et demeureront indiscernables d'une foule d'autres objets; et nous ne pourrions raisonner congruement à leur endroit, que quand nous les aurons distingués de ces autres objets avec lesquels ils demeurent confondus, c'est à dire quand nous serons arrivés à les définir en un nombre fini de mots.

(...)

Les phrases d'un nombre fini de mots pourront toujours être numérotées, puisqu'on peut par exemple les classer par ordre alphabétique. Si tous les objets pensables doivent être définis par de semblables phrases, on pourra aussi leur donner un numéro. Il n'y aurait donc pas plus d'objets pensables que de nombres entiers; et si l'on considère l'espace, par exemple, si l'on en exclut les points qui ne peuvent être définis en un nombre fini de mots et qui sont de purs néants, il n'y restera pas plus de points qu'il n'y a de nombres entiers. Et Cantor a démontré le contraire.

Ce n'est là qu'un trompe-l'oeil; représenter les points de l'espace par la phrase qui sert à les définir; classer ces phrases et les points correspondants d'après les lettres qui forment ces phrases, c'est construire une classification qui n'est pas prédicative, qui entraîne tous les inconvénients, tous les paralogismes, toutes les antinomies dont j'ai parlé au début de ce chapitre. Qu'a voulu dire Cantor et qu'a-t-il réellement démontré? On ne peut trouver, entre les nombres entiers et les points de l'espace définissables en un nombre fini de mots, une loi de correspondance satisfaisant aux conditions suivantes : 1° Cette loi peut s'énoncer en un nombre fini de mots. 2° Étant donné un entier quelconque, on peut trouver le point de l'espace correspondant, et ce point sera entièrement défini sans ambiguïté; la définition de ce point qui se compose de deux parties, la définition de l'entier et l'énoncé de la loi de correspondance, se réduira à un nombre fini de mots, puisque notre entier peut se définir et notre loi s'énoncer en un nombre fini de mots. 3° Étant donné un point *P* de l'espace que je suppose défini en un nombre fini de mots (*sans m'interdire de faire figurer dans cette définition des allusions à la loi de correspondance elle-même*, ce qui est essentiel dans la démonstration de Cantor) il y aura un entier qui sera déterminé sans ambiguïté par l'énoncé de la loi de correspondance et par

la définition du point P . 4° La loi de correspondance doit être prédicative, c'est à dire que si elle fait correspondre un point P à un entier, elle ne devra pas cesser de faire correspondre ce point P à ce même entier, quand on aura introduit de nouveaux points de l'espace. Voilà ce que Cantor a démontré et cela reste toujours vrai; on voit quel est le sens compliqué enfermé dans cette brève proposition : le nombre cardinal des points de l'espace est plus grand que celui des entiers.

Et alors que devons-nous en conclure? Tout théorème de mathématiques doit pouvoir être vérifié. Quand j'énonce ce théorème, j'affirme que toutes les vérifications que j'en tenterai réussiront; et même si l'une de ces vérifications exige un travail qui excéderait les forces d'un homme, j'affirme que, si plusieurs générations, cent, s'il le faut, jugent à propos de s'atteler à cette vérification, elle réussira encore. Le théorème n'a pas d'autre sens, et cela est encore vrai si dans son énoncé on parle de nombres infinis; mais comme les vérifications ne peuvent porter que sur des nombres finis, il s'ensuit que tout théorème sur les nombres infinis ou surtout sur ce qu'on appelle ensembles infinis, ou cardinaux transfinis, ou ordinaux transfinis, etc., etc., ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis. S'il en est autrement, ce théorème ne sera pas vérifiable, et s'il n'est pas vérifiable, il n'aura pas de sens.

Et il s'ensuit qu'il ne saurait y avoir d'axiome évident concernant les nombres infinis; toute propriété des nombres infinis n'est que la traduction d'une propriété des nombres finis; c'est cette dernière qui pourra être évidente, tandis qu'il faudra démontrer la première en la comparant à la dernière et en montrant que la traduction est exacte.

Henri POINCARÉ
La logique de l'infini
dans *Dernières pensées*
Ernest Flammarion, éditeur
1920
pages 101 - 139

Annexe 4

Dans son ouvrage *Die Zahlen, was sind sie und was sollen sie?*, Dedekind présente sa conception de l'arithmétique, que nous allons résumer avant de donner un extrait significatif.

Le livre commence ainsi : "Dans la suite, j'entends par "chose" tout objet de notre pensée. Pour pouvoir parler commodément des choses, on les désigne par

des signes, par exemple des lettres”. Peu après, Dedekind définit les “systèmes” où chacun reconnaîtra ce qu’on appelle aujourd’hui des *ensembles* : “il arrive très souvent que des choses différentes $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ soient pour un motif quelconque réunies sous un point de vue commun, mises ensemble dans la pensée, et on dit alors qu’elles forment un système $\underline{S}$; on nomme les choses $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$, les éléments du système $\underline{S}$ ”. Il est inutile de vous citer sa définition d’une application, puisqu’elle est en tous points identique à celle que vous avez apprise à l’école. De même ce qu’il appelle *application semblable* est simplement ce que nous avons appris sous le nom d’application injective. Nous retrouvons encore du connu dans la définition suivante : “un système $\underline{S}$ est dit infini quand il est semblable à une de ses parties propres; dans le cas opposé, $\underline{S}$ est dit système fini.” La théorie devient intéressante à partir de maintenant : Dedekind démontre le

“THÉORÈME : il existe des systèmes infinis”

Pour Dedekind en effet, ceci est un théorème et non un axiome comme pour la seconde génération des formalistes. Voici sa démonstration : “le domaine de mes pensées, c’est à dire l’ensemble $\underline{S}$ de toutes les choses qui peuvent être objets de ma pensée, est infini. Car si $\underline{s}$ désigne un élément de $\underline{S}$, la pensée $\underline{s}'$, que $\underline{s}$ peut être objet de ma pensée, est elle-même un élément de $\underline{S}$. Si l’on considère le même élément comme l’image $\phi(\underline{s})$ de l’élément $\underline{s}$ l’application ϕ de $\underline{S}$ ainsi définie a la propriété que l’image $\underline{S}'$ est une partie propre de $\underline{S}$; et en particulier, $\underline{S}'$ est une partie propre de $\underline{S}$, car il y a dans $\underline{S}$ des éléments (par exemple mon moi) qui sont distincts de toute pensée $\underline{s}'$ de ce genre et pour cette raison ne sont pas contenus dans $\underline{S}'$. Enfin, il est clair que si $\underline{a}, \underline{b}$ sont des éléments différents de $\underline{S}$, leurs images $\underline{a}', \underline{b}'$ sont aussi différentes, donc que l’application est une application semblable. Par conséquent, $\underline{S}$ est infini, C.Q.F.D.”

Par ailleurs, Dedekind appelle chaîne (relative à une application ϕ une partie $\underline{K}$ de $\underline{S}$ telle que $\phi(\underline{K})$ soit contenu dans $\underline{K}$, et chaîne d’un élément $\underline{s}$ la plus petite chaîne qui contient $\underline{s}$. Ce qui lui permet (entre autres) de poser la définition que voici : “un système $\underline{N}$ est dit *simplement infini*, quand il existe une application semblable ϕ de $\underline{N}$ dans lui-même telle que $\underline{N}$ apparaisse comme chaîne d’un élément qui n’est pas contenu dans $\phi(\underline{N})$ ”. On dit alors que ϕ ordonne $\underline{N}$.

Enfin :

“Si en considérant un système $\underline{N}$ simplement infini, ordonné par une application ϕ , on fait totalement abstraction de la constitution particulière des éléments, que l’on ne retient que ce qui les différencie et que l’on saisit seulement les relations qu’établit entre eux l’application ϕ qui définit l’ordre, on nommera ces éléments nombres naturels ou nombres ordinaux ou même absolument nombres.” L’élément de base dont $\underline{N}$ est la chaîne est nommé 1 et est dit le nombre de base de la série. Dedekind ajoute immédiatement : “eu égard à cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut définir avec raison les nombres comme une création libre de l’esprit humain.”

Bibliographie

- [1] **Formalism 64**, par Abraham Robinson, *Proceedings of the international congress for logic, methodology and philosophy of science. Jerusalem, 1964*, North Holland Publ. Co., pp. 228-246. Reproduit dans *Selected Papers of A. Robinson*, vol. 2, pp. 505-523.
- [2] **Collected works of L.E.J. Brouwer**, Ed. by Heyting vol. 1 and 2. *North Holland Publ. Co., 1975*.
- [3] **Über das Unendliche**, par David Hilbert, *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, pp. 161-190.
- [4] **Dernières pensées**, par Henri Poincaré, *Ernest Flammarion éd.*, Paris, 1920.
- [5] **Die Zahlen, was sind und was sollen sie?**, par Dedekind.
- [6] **Les nouveaux Tartuffe**, par Claude Lobry, dans *Actes de l'école d'été "Analyse non-standard et représentation du réel"*, Oran - les Andalouses 8-12 septembre 1984, Marc Diener et Claude Lobry éd. Publ. par le C.N.R.S., Paris et Office des Publ. Univ., Alger.
- [7] **A model of Set-theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable.**, par R. Solovay, *Annals of Maths.*, 2, series vol. 92 (1970), pp. 1-56.

REEB : MÉMOIRES INFORMATIQUES

J.P. REVEILLÈS

U.F.R de Mathématiques et d'Informatique, Strasbourg

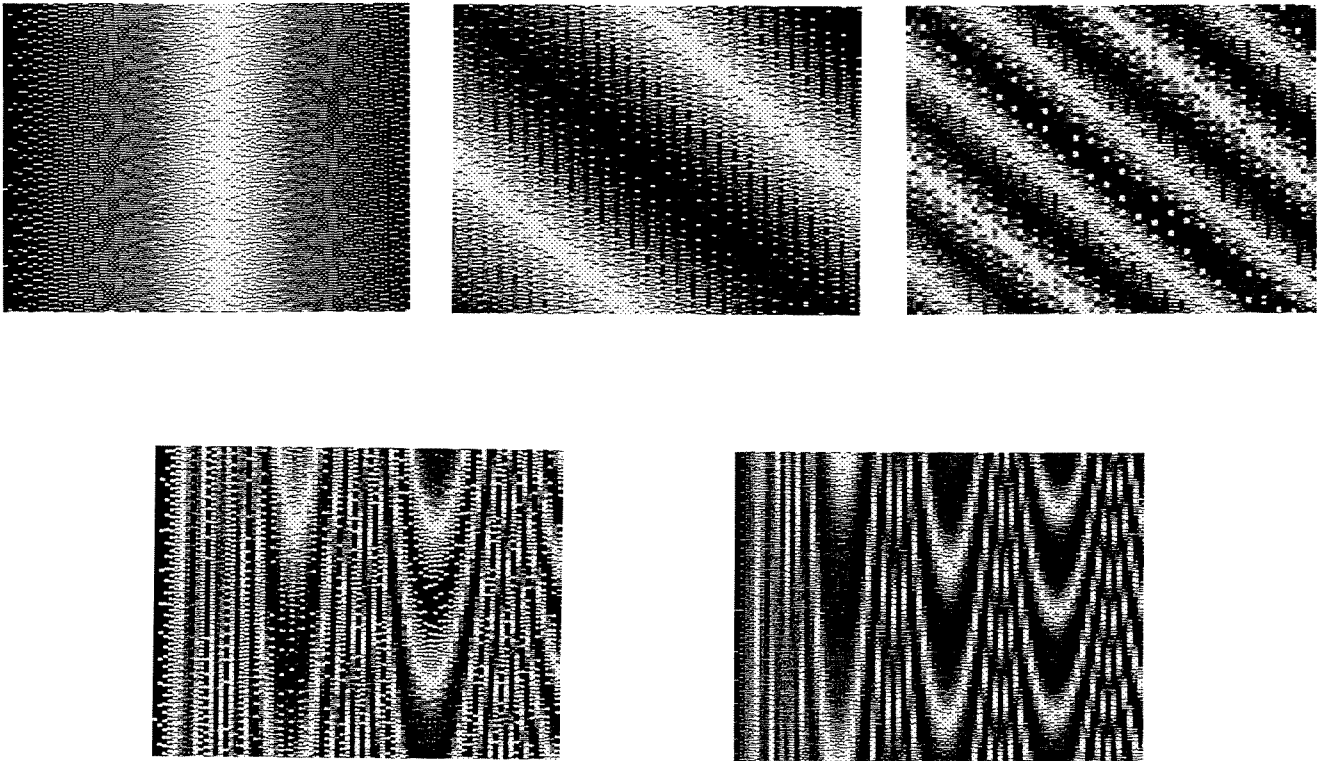
Les premières préoccupations non-standard dont G. Reeb m'ait parlé se classaient en deux rubriques : l'usage de réels non-standard, qui permettent de remplacer les limites par des valeurs infiniment voisines, et le théorème de Nelson d'existence d'un ensemble fini contenant tous les éléments standards. Alors que le premier thème continuait d'inspirer de nombreux travaux, il percevait dans le deuxième une potentialité sans commune mesure avec l'usage que l'on en faisait.

Nos discussions sur ce point avaient abouti au constat suivant : le théorème de Nelson décrit un processus de discrétisation parfait qui devrait intéresser l'informatique. Mais il y a loin de la coupe aux lèvres et il savait bien que de nombreux efforts devraient être consentis pour relier ce résultat très abstrait aux exigences des ordinateurs. Le bien fondé de cette idée fut assez vite confirmé par un résultat de Jacques Harthong permettant de considérer que « $\mathbb{R}$ n'est que $\mathbb{Z}$ vu de loin ». Ce fut la première étape d'une relation non-standard opératoire entre le discret et le continu. Elle donnait corps au théorème de Nelson et fut décisive pour l'intérêt que Reeb porta ultérieurement à l'informatique.

Dans l'équipe ANS, la conviction que le continu pouvait se traiter en ne recourant qu'aux nombres entiers s'était fermement établie. Il restait à mesurer jusqu'à quel point ce principe s'appliquait aux ordinateurs. Le problème n'est pas si simple qu'il y paraît, car la relation admise entre les nombres dits réels et les machines passe par leur représentation *flottante*, qui voile de nombreuses questions fondamentales.

Le premier test que Reeb entreprit de conduire fut de simuler le moiré. Beaucoup savent à quel point le travail de Harthong sur le moiré enthousiasma Georges et se le remémoreront, les lunettes à califourchon sur le crâne, en train d'examiner à contre-jour les franges produites par deux grilles superposées. Il n'est donc pas étonnant qu'il ait cherché à reproduire, sur un écran discret, ce qu'il appelait *les lois de Harthong* du moiré. Certains lecteurs seront peut-être surpris en apprenant que c'est sur un MO5 — micro-ordinateur scolaire — qu'il a conduit ses premières expériences.

Cette machine était dotée d'une gestion vidéo qui ne convenait pas du tout à ce qu'il souhaitait réaliser. Je me souviens fort bien de la quantité d'énergie et des



Quelques moirés de discrétisations de polynômes quadratiques et cubiques.

ruses qu'il a déployées pour réussir à contourner les limitations de cette machine rustique pour arriver à ses fins. Il avait réussi à écrire un programme qui tenait en 25 octets ! Comme aucun langage assembleur n'était fourni avec cette machine, il avait élaboré peu à peu, à la main, la liste des codes hexadécimaux des instructions. Il chargeait ces octets par des *pokes* à partir du Basic comme tous les *hackers* de cette époque.

Le résultat était extraordinaire. Il avait réussi, en triturant la RAM vidéo, à constituer deux très longues bandes striées (environ 2m selon lui), qui glissaient automatiquement l'une sur l'autre en recouvrant tout l'écran. Il n'y avait plus qu'à attendre l'apparition des lois de Harthong. Et, bien sûr, elles étaient au rendez-vous, bien que fût sous une forme très surprenante, qui le faisait s'exclamer : « C'est incroyable de voir comment l'arithmétique s'y prend pour singer le continu ! »

Cette discrétisation à la fois ingénieuse et brutale du phénomène de moiré avait encore le défaut — à ses yeux — de ne pas bien rendre compte de ces lois « aux petits angles ». Nous comprîmes ce point beaucoup plus tard en utilisant des machines plus dociles et des discrétisations plus fines.

```

uses : turbo3, graph3, crt ;
const SegEcr = $B800 ; OfsEcr1 = 0 ;
      OfsEcr2 = 8192 ; OfsDernTr = 7999 ;
      Nbcr = 80 ; res = 100 ; noir = 255 ;
var TraitFinal : byte ;
    i, j : integer ;
    x : real ;
begin
  Hires ; {Haute résolution graphique}
  {Une fonction discrétisée dans la première bande}
  for i := 0 to OfsDernTr do begin
    x := i ;
    Mem[SegEcr : OfsEcr1 + (i div res) + Nbcr * (i mod res)]
      := (trunc((x * x)/80000) mod 2) * noir
  end ;
  {Un deuxième exemplaire de la bande est entrelacé avec la première}
  for i := 0 to OfsDernTr
    do Mem[SegEcr : OfsEcr2 + i] := Mem[SegEcr : OfsEcr1 + i] ;
  repeat {Rotation de la première bande}
    TraitFinal := Mem[SegEcr : OfsDernTr] ;
    for j := Nbcr - 1 downto 0 do begin
      for i := res - 1 downto 1
        do Mem[SegEcr : j + Nbcr * i]
          := Mem[SegEcr : j + Nbcr * (i - 1)] ;

      if j > 0
      then Mem[SegEcr : j] := Mem[SegEcr : +OfsDernTr - Nbcr + j]
      else Mem[SegEcr : j] := TraitFinal ;
    end ;
    delay(1000) ;
  until KeyPressed ;
end .

```

Simulation reebienne du moiré.

Les 25 octets reebiens sont certainement perdus, mais j'ai retrouvé sur l'une de mes disquettes de l'époque une version analogue à la sienne.

J'avais dû traduire en Pascal classique sa construction de deux bandes glissant l'une sur l'autre pour faire des comparaisons avec ses 25 octets. La superposition est en fait une juxtaposition, qui tire partie de la technologie des écrans entrelacés, où les octets pairs et impairs sont contenus dans des blocs mémoire séparés. Grâce à cette astuce, il suffit de faire tourner l'une des deux bandes à côté de l'autre pour

```

const unite = 100000 ;
var i, y, dy, reste : integer ;
begin { Calcul de 100.000 valeurs de l'exponentielle entre 0 et 1 }
    y := unite ; dy := 0 ; reste := 0 ;
    for i := 0 to unite do begin
        y := y + dy ;
        dy := (y + reste) mod unite ;
        reste := (y + reste) div unite ;
    end ;
    write (y/unite : 10 : 5) ;
end .

```

L'algorithme de Reeb de tracé de la fonction exponentielle.

simuler le moiré. Il va sans dire que l'exécution est alors très rapide. L'instruction de temporisation `delay(1000)` a été rajoutée pour qu'une machine actuelle redonne la vitesse d'affichage originale; les incantations du type `uses` placées au début du programme permettent son exécution avec une version récente du compilateur.

Le phénomène de moiré se traduit par l'apparition de franges qui vont en se resserrant de plus en plus quand on accentue le décalage. Malheureusement, la juxtaposition atténue l'effet de moiré et avec la version jointe, il est préférable, de regarder le phénomène se dérouler sur l'écran, la reproduction sur papier de ces images n'étant pas bonne. (Celles qui sont reproduites ont été réalisées grâce à une variante plus élaborée qui utilise une vraie superposition et un écran à haute résolution.)

Peu à peu, la compréhension des modélisations finies du corps des réels au moyen de nombres entiers s'affermir. Reeb entreprit alors de traiter l'intégration numérique des équations différentielles par ce biais. Bien que la correspondance entre un écran d'ordinateur et un morceau de $\mathbb{Z}^2$ saute aux yeux, cette analogie n'avait jamais été exploitée comme moyen effectif de calcul depuis l'apparition des ordinateurs.

Un matin, nous le vîmes arriver en brandissant triomphalement une disquette. Je crois qu'il utilisait depuis peu le micro-ordinateur que l'équipe (étendue aux Diener) lui avait offert, ce qui simplifiait la communication : un chargement de fichier, un retour-chariot et nous avions sous les yeux un tracé ultra-rapide de courbe exponentielle; c'est le sentiment que j'ai gardé de cette expérience.

Devant notre surprise, il entama un discours d'épicier, parlant de valeurs trop grandes, d'économies, de gestion de restes. Il avait inséré un bout de multiprécision à l'intérieur du schéma d'intégration numérique d'Euler, alors que l'usage la place à l'extérieur des algorithmes pour des raisons d'indépendance.

Ce traitement inattendu du tracé de l'exponentielle eut une grande influence sur l'équipe ANS strasbourgeoise. Avec A. Troesch et E. Urlacher, nous étudiâmes et généralisâmes sans mal ce principe élémentaire, qui — nous le comprîmes peu à peu — rejoignait les méthodes dites de *virgule fixe*, en usage dans le calcul numérique avant l'apparition des ordinateurs et aujourd'hui dans les unités graphiques. Une version du programme de tracé de l'exponentielle est donnée ci-dessus.

Ces expérimentations montraient que les algorithmes de ce type, intéressants par leur rapidité et leur simplicité, n'apparaissaient nulle part dans la littérature numérique connue. Nous soupçonnions que ces méthodes étaient connues dans les laboratoires des constructeurs de composants ou des développeurs de logiciels très spécialisés (par exemple en graphique).

Une confirmation de l'originalité de l'idée de Georges vint pourtant assez vite. Comme clients IBM, nous eûmes le droit de tester une de leurs premières machines RISC qui avait la réputation de calculer très rapidement en nombres entiers.

L'expérience à conduire sautait aux yeux : faire exécuter les algorithmes en nombres entiers pour l'exponentielle, les lignes trigonométriques, etc. (que nous avions retravaillés et optimisés) pour les comparer aux calculs flottants réalisés par cette machine.

Il apparut immédiatement que cet ordinateur de pointe se trainait lamentablement dans ses calculs en nombres réels : les procédures étaient entre 100 et 200 fois plus lentes que les algorithmes en nombres entiers ! La bibliothèque numérique du compilateur ne connaissait visiblement pas ces méthodes.

Cette rencontre espérée, d'un domaine très particulier de l'informatique, à partir d'une quête purement mathématique renforçait dans l'esprit de Georges sa conviction de l'intérêt de l'emploi de l'analyse non standard dans le traitement du continu sur ordinateur. Il s'est très souvent exprimé sur ce point. Sous l'influence du moiré, ces préoccupations se sont peu à peu centrées autour de la discrétisation des lois de la géométrie euclidienne et nous avons pris conscience de l'immense quantité de travail cachée derrière cette question apparemment anodine.

La simulation du moiré «aux petits angles» (ou pour de petits décalages) est assez délicate et nous avait initialement troublés ; de même pour la construction sur écran de réseaux de finesse arbitraires. Longtemps après, nous avons compris que ces questions se résolvent assez bien à l'aide de droites discrètes lorsque les traits ne sont pas parallèles aux axes. En revanche, la simulation est difficile s'il y a parallélisme. Comme un moiré nécessite un exemplaire du réseau légèrement tourné, la discrétisation fait apparaître une juxtaposition de longs paliers qui détruisent le moiré attendu.

Ce problème n'est pas encore bien réglé aujourd'hui. C'était l'une des dernières préoccupations que Reeb mentionnait. Il cherchait à représenter des réseaux réguliers de *finesse non entière*, parallèles aux axes de coordonnées. Il est difficile,

avec des pixels, de simuler un réseau de largeur 1,03 pixels par exemple. Là encore, Georges avait déployé sa ténacité coutumière pour aboutir à une notion de droite *bruitée* par une loi arithmétique qui mériterait certainement d'être formalisée et étudiée de près.

Quelques considérations sur les grands entiers, l'avaient mis sur une autre piste originale, qui consiste à *injecter* des parties de l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[x]$ dans $\mathbb{Z}$ pour tenter de remplacer le calcul formel par du calcul sur les entiers. Le lecteur pourra se convaincre facilement de cette idée en développant sur machine $(1 + 10^{25})^{37}$ pour constater que le résultat se découpe en tranches donnant les coefficients du binôme $\binom{37}{p}$. L'idée consiste donc à remplacer les polynômes par des entiers lacunaires dont les tranches de chiffres de mêmes longueurs contiennent les coefficients. Il avait entrepris, avec E. Urlacher, une exploration de cette piste.

Aujourd'hui, le moiré est toujours un sujet d'étude, tant théorique que pratique. Dans certains cas (télévision et traitement d'image par exemple), on veut le supprimer, ce qui nécessite une connaissance approfondie du phénomène. Les simulations de Reeb pourraient alors servir.

Reeb qualifiait le moiré de *machine à dériver*. Pour ma part, les discussions que j'ai eues avec lui sur ce sujet ont contribué à dégager quelques notions discrètes intéressantes : rotations, droites, transformations planes. On notera que ces recherches ont finalement convergé avec les travaux de géométrie dite digitale entrepris indépendamment par A. Rosenfeld depuis vingt cinq ans.

Don Knuth m'avait dit, à propos du calcul en nombres entiers : «that's a very good idea». Actuellement, ce calcul intervient directement dans divers domaines tels que l'algorithmique graphique, le traitement des erreurs, l'arithmétique des ordinateurs, la géométrie fractale, les codes de fonctions, etc. Ce calcul intègre les méthodes originales qui sont le témoignage de l'esprit pionnier de Georges Reeb.

LA SAGA DU BON MAÎTRE REEB

Robert LUTZ

Professeur à l'Université de Haute-Alsace

Imaginez un bistrot populaire du vieux Strasbourg, fin juin de l'année 1966. Deux hommes sont attablés face à face; entre eux deux grandes bières fraîches... Le plus jeune, vingt deux ans bien tassés, courte barbe noire, regarde avec un vif intérêt les signes bizarres que son compagnon aligne en de hauts jambages sur l'envers d'une vieille enveloppe toute froissée. Celui-ci est deux fois plus âgé que l'autre, et, vu la tranquille assurance qui émane de sa robuste personne, au moins trois fois plus sage... et quatre fois plus subtil! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer ce profil de faux naïf au long nez impérial, ce front immense plissé par l'effort de réflexion et comiquement surmonté d'une paire de lunettes, l'œil perçant vrillé de temps en temps sur l'interlocuteur... Ses joues se gonflent à intervalles réguliers et il souffle bruyamment en laissant fuser l'air par les coins de ses lèvres au dessin expressif. Sur le papier on peut lire les mots classe, *Élie Cartan, complètement intégrable, Haefliger, analytique, Pfaff, sphère de dimension 5* et sur une longue ligne la suite de caractères grecs

$$wdw = 0, w[dw]^2 = 0, \dots, w[dw]^{s-1} = 0, w[dw]^s \neq 0$$

quelque part... Le jeune homme ne comprend manifestement pas ce que son aîné cherche à lui expliquer. Timidement il demande s'il ne faudrait pas "mettre des chapeaux". L'autre souffle en haussant les épaules... Est-ce que Grassmann avait besoin de chapeaux? Le jeune n'insiste pas, de peur que l'Ancien ne le prenne pour un formaliste sans imagination... Puis, rajustant ses lunettes, celui-ci se lance d'une voix lente, avec de nombreux silences, beaucoup de parenthèses ouvertes et exactement autant de parenthèses refermées, dans un discours fortement argumenté d'où il ressort que *tant que l'on continuera à se f... de la g... des étudiants on ne fera que des c...* Un observateur non averti aurait pu penser à une conspiration entre deux gauchistes d'avant l'heure venus ourdir en cet estaminet l'un de ces mini-complots qui allaient enrichir deux ans plus tard la fièvre soixante-huitarde... Il se serait seulement trompé de révolution! Car cet homme massif, à l'allure de *Hoffrat* échappé incognito de quelque cour impériale, était effectivement un dangereux révolutionnaire... Son idéologie pouvait assez bien se résumer en deux slogans qu'il répétait à qui voulait l'entendre: "*Toute personne que tu rencontres est a priori quelqu'un de très bien*" (il disait un *gentleman*, mais cela s'appliquait aussi aux dames...). "*Les mathématiques sont trop belles pour qu'on en fasse tristement.*"

On ne s'étonnera pas qu'avec des principes aussi corrosifs il ait pu recruter aisément dans les bas-fonds universitaires une bande de joyeux drôles qu'il appela trajectoriens, afin qu'ils n'oublient jamais qu'à *l'origine il y avait la Mécanique* ... La scène de tout à l'heure montre le Maître en train de proposer à l'un de ses premiers disciples un sujet de joyeuse méditation tel qu'il la concevait. Par la suite, celui-ci comprit qu'il s'agissait simplement de trouver sur la sphère de dimension cinq une équation de Pfaff, si possible analytique, de classe (au sens de Monsieur Élie Cartan) au plus trois en chaque point.

Quelques vingt années plus tôt le Maître lui-même avait découvert une équation de Pfaff de classe un sur la sphère de dimension trois, mais l'on ne savait rien en dimension cinq, si ce n'est que, selon un théorème d'André Haefliger, il ne pouvait en exister d'analytique qui soit de classe un partout. La question de la classe maximale trois analytique était donc une très bonne question... A partir de ce moment le Maître appliqua à ce disciple, comme aux autres, la méthode raffinée de terrorisme intellectuel qui s'accordait parfaitement avec les principes contrenature de sa doctrine. Il se fit partout-dense dans les couloirs, matin et après-midi, avec une probabilité de présence particulièrement forte près des portes de sortie; dès qu'il voyait l'un des trajectoriens, il lui demandait sur un ton chargé d'une insatiable curiosité : "Quoi de neuf?" Tout content, on jetait en pâture quelques miettes de leur attrapée lors du travail acharné (mais joyeux, bien entendu!) de la veille. On rasait les murs dès la seconde apparition, on évitait la troisième en restant cloîtré, mais il y avait la quatrième...

On pouvait espérer un peu de répit les jours bénis où l'on rencontrait le Maître sur les marches de l'entrée, visiblement pressé de se rendre à quelque besogne qui le requerrait d'urgence... Un bref "salut-quoi-de-neuf?" Et déjà, il s'élançait... pour atterrir un mètre plus loin, un doigt sur le front et un "j'allais oublier..." initiant une discussion assez longue pour que la besogne urgente ne le soit plus...

Car le Maître était avant tout homme de parole (je n'évoque pas ici le concept moderne de *communication*, c'est-à-dire la transmission de messages aussi vides que l'on veut). Son verbe était ample sur le fond et sur la forme, son débit lent, son propos prenait de la hauteur en situant toujours le fait particulier par rapport à un contexte général. Quelquefois il était indigné, jamais contre les hommes, mais seulement contre l'aveuglement dont témoignaient leurs actions. Mais souvent c'est le rire joyeux qui triomphait à l'évocation de quelque situation cocasse...

Il était né un jour de brume, le 12 Novembre 1920, tout près de l'écluse qui, pour les bateliers, partage en deux la bonne ville de Saverne. Son père était tonnelier, et il en était très fier. L'astucieuse géométrie du tonneau, stratifié en multiples bandes, avec ses deux points singuliers, a certainement influencé ses visions topologiques (n'a-t-il pas démontré qu'une surface compacte sur laquelle vit une fonction à deux points singuliers est topologiquement homéomorphe à un tonneau?). L'amour des idées simples et fécondes — celles qui font "marcher" les choses — trouva sans doute une inspiration de choix dans cette ambiance

artisanale sur fond de batellerie. Également son respect fondamental pour les gens de métier: le professionnel sait ce qu'il a à faire; il faut le laisser travailler... D'être né dans ce coin très particulier de l'Alsace où l'Ami Fritz d'Erckmann-Chatrian venait compter fleurette à la jeune Suzel lui inspirait d'ailleurs une fierté non moins grande que le travail de son père.

De fait il avait bien des traits communs avec Fritz Kobus: par exemple un goût prononcé pour les bonnes choses fournies par la terre d'Alsace lorsque des mains habiles savent pétrir la pâte, évidemment feuilletée, qui fonde ce délice absolu qu'est une tarte aux pommes de chez nous. Un certain romantisme aussi, autour de sa Trudel qui le lui a bien rendu... Et plus tard, le grand-père joyeux que l'on sentait si complice de l'univers enfantin.

De ses années de jeune homme émerge un Maître qu'il vénérât : Charles Ehresmann, le Topologue, celui des jets et des espaces fibrés. Il fut, avec le livre de Seifert-Threlfall, son initiateur à la topologie moderne. Et puis André Lichnerowicz, le Géomètre élégant d'esprit envers lequel il a toujours manifesté une timidité respectueuse...

Il y a aussi les pairs, à travers la France et le monde. Paulette Libermann, évidemment, élevée dans la même école topologique, René Thom, dont il fut un propagandiste constant, et tant d'autres que l'on ne peut citer sans épuiser $\mathbb{N}$.

Il y avait Oberwolfach, en Forêt Noire, ce futur haut-lieu des mathématiques où il avait passé un an, dormant pratiquement dans la bibliothèque du vieux manoir, et dont il faisait sien l'esprit avec grande ferveur.

Du côté de l'inspiration, il y avait les grands Anciens, les Painlevé, Poincaré, Darboux, Hopf, Denjoy... et bien sûr Elie Cartan. Voilà donc le Maître entouré de ses disciples. Cela se passe le mardi matin, à 10 heures. Le séminaire trajectorien tient ses assises. La tradition doit se perpétuer vingt cinq ans... Au pupitre, Claude Godbillon, avec son sérieux habituel teinté de quelques pointes d'humour, démontre le principe de Maupertuis dans le contexte de la mécanique hamiltonienne. Il en sortira l'un des premiers ouvrages de mécanique rédigé dans le style synthétique hérité de la clarification bourbakiste. Au premier rang, Jean Martinet, à moitié couché sur la table, la tête appuyée sur son bras replié, l'œil flamboyant, le front plissé, l'interrompt car il a un doute, vite dissipé: "mais oui! suis-je bête...". Dans le fond de la salle le Maître bavarde avec l'un ou l'autre. Lorsqu'on lui fait comprendre qu'il dérange, il met un doigt sur ses lèvres, sort une des vieilles enveloppes dont il semble avoir les poches pleines, et échange des messages écrits avec son partenaire du moment... Lorsque le séminaire accueille quelque conférencier venu de l'extérieur, le Maître, par politesse, se contente de somnoler. Puis, lorsque l'exposé est terminé, il pose naïvement la question qui concerne justement le point obscur de la théorie dont on vient de parler... Car il a retenu des leçons de statistique que lui a prodiguées son subtil compère Aimé Fuchs la notion clé de test : pour se rendre compte de la justesse d'une théorie, il est inutile de se mettre à la décortiquer dans le moindre détail. C'est bien trop fatigant, et le topologue

est paresseux de nature, puisqu'il cherche toujours à s'en tirer par des arguments aussi qualitatifs que possible. Un bon test vaut mieux qu'une lecture pointilleuse. Le test ne sert d'ailleurs pas à vérifier la théorie, mais seulement à voir si son auteur a suffisamment réfléchi à ses diverses conséquences pour que l'on puisse lui faire confiance pour le reste...

L'un des sujets qui a imprégné profondément l'atmosphère trajectorienne a été celui des formes différentielles, ces objets mystérieux dont les invariants, introduits par Élie Cartan, ont connu un succès bien moindre que l'œuvre de celui-ci sur les groupes de Lie. La notion de classe, avec les structures qui en font usage, structures complètement intégrables, structures de contact, a été fortement honorée par les trajectoriens. D'ailleurs le Maître considérait comme son plus beau théorème le fait que *les hypersurfaces compactes transverses à un système dynamique admettant un invariant intégral de classe maximale sur une variété de dimension impaire ont nécessairement un bord non vide*. (On dit maintenant que le *champ de Reeb d'une forme de contact n'admet pas de transversale compacte sans bord*.) La démonstration se fait en deux lignes grâce à la formule de Stokes. C'est justement pour cela que le résultat, fort attendu par les mécaniciens, est profond.

Bien entendu l'étude topologique des feuilletages et en particulier l'étude qualitative des trajectoires des systèmes dynamiques gardèrent longtemps la faveur du Maître. Parallèlement, la publication, en complicité avec Raymond Gérard, des œuvres complètes de Painlevé prit près de quatre années et inspira divers travaux de la mouvance trajectorienne.

Le début des années soixante-dix vit ainsi le bon Maître, jeune cinquantenaire, respecté et aimé de ses nombreux élèves, et même de certains de ses collègues, dont son ami Daniel Bernard, l'un des plus constants depuis le début. Bien sûr le succès de cette école hors de l'École faisait froncer plus d'un sourcil; par quel sortilège cet archi-provincial à l'air naïf pouvait-il faire éclore des thèses là où depuis des lustres il ne poussait pas grand-chose? Au début on se méfiait tant qu'un vérificateur fut désigné. Il vérifia, mais hélas trouva cela très bien. On ne vérifia donc plus jamais... La curiosité pressante du bon Maître ne faiblissait pas. Un jour de l'an 1970 les trajectoriens apprirent, avec un rien d'envie, qu'un jeune topologue américain nommé Blaine Lawson venait de démontrer, après vingt-cinq ans de suspense, que *la sphère de dimension cinq admettait un feuilletage de codimension un*. Il utilisait pour cela, à la place des deux tores pleins recollés le long du bord qui permettaient de feuilleter la sphère de dimension trois, les décompositions *en livre ouvert* associées par John Milnor à certaines hypersurfaces complexes. On salua immédiatement ce progrès en envoyant à Lawson un télégramme de félicitation!

Le Maître était ravi, mais comprit aussi que la théorie des feuilletages était désormais en de nombreuses mains expertes. Dans les années quarante cinq, l'idée de s'intéresser à de telles structures topologiques globales paraissait ridicule, alors que les questions locales étaient en plein épanouissement. Puis la source de celles-ci se fit plus rare... Les années soixante-dix virent hautement affirmée l'importance

des problèmes globaux, aussi bien en topologie qu'en géométrie différentielle. Le fils du tonnelier de Saverne y avait fortement contribué. Mais il n'avait pas très envie de courir derrière la tournure fortement technique que prenait une théorie initialement si sympathique. Il lui fallait autre chose. Comme tous les créateurs qui ont eu du succès, son propre maître Charles Ehresmann avait connu une crise analogue; puis il s'était lancé dans une vision extrêmement abstraite de la topologie et l'avait développée jusqu'à la rendre incommunicable: sa Théorie des Catégories l'a presque complètement isolé d'une communauté mathématique qui ne pouvait pas le suivre dans son rêve intérieur. Le bon Maître allait-il prendre un chemin analogue à celui de son aîné? Difficile à concevoir, tant il était ancré par toutes ses fibres dans la réalité des choses.

C'est alors, qu'un jour de 1973, en fouillant dans la bibliothèque, vieux plaisir toujours renouvelé, il sortit par hasard un livre du rayon "logique" (un sujet qui l'avait toujours intrigué). Imaginez la scène. Il est debout, vêtu de son vieux pardessus gris, son béret sous le bras, les lunettes sur le front, les yeux proches de l'ouvrage pour mieux en saisir la substance. Cela s'appelle "Non Standard Analysis" et c'est dû à la plume d'un certain Abraham Robinson. Il y a cinquante pages de "théorie des types" auxquelles on ne comprend rien et quelque chose avec des étoiles partout. Mais après on a des infiniments petits comme Gottfried Wilhelm Leibniz n'aurait jamais osé les rêver, et surtout on fait quelque chose avec.

Le Maître est bouleversé. Très vite il entrevoit la nouveauté et l'étendue de ce cadre dans lequel va pouvoir se développer la mathématique, en réalisant au passage quelques vieux rêves: les intégrales deviennent des sommes finies, les différentielles des différences, le continu se fait discret, les petits paramètres sont "vraiment" petits... Fabuleux! Tout le monde va se précipiter! Il faut crier la bonne nouvelle dans tous les couloirs... Il cria donc, s'y rendant encore plus partout dense que d'habitude. Il apostropha ainsi un grand nombre de collègues qui se découvraient brusquement des rendez-vous urgents. Ses propres élèves, devenus entre temps des gens importants qui n'avaient pas de temps à perdre, fuirent à reculons pour faire croire qu'ils avançaient... Tristes de voir le bon Maître s'enfermer dans quelque lubie de fin de carrière alors qu'en laissant sa notoriété s'épanouir toute seule il entrerait sans doute à l'Académie... Qui donc allait risquer sa réputation sur de ridicules histoires d'infiniment petits?

Il trouva cependant quelques oreilles attentives et même des ouvriers pour travailler avec lui dans la nouvelle vigne. Un premier test que fit le Maître fut une démonstration élémentaire d'un lemme de Thurston à propos des difféomorphismes du cercle. La chose servait à étudier des propriétés de stabilité des feuilletages. On restait donc dans des eaux connues. Mais on rétorqua qu'une preuve aussi simple pouvait se déduire du lemme de Nakayama que tout algébriste digne de ce nom récite tous les soirs avant de se coucher...

Le Maître eut alors une idée plus profonde : l'Analyse non standard devrait permettre d'étudier directement le comportement asymptotique des trajectoires d'un système dynamique dépendant d'un paramètre lorsque celui-ci tend vers zéro. En effet, tous les renseignements asymptotiques sont présents dans le comportement du système lorsque le paramètre est infiniment petit *fixé*. C'est cette possibilité d'étudier *un* système en observant ses trajectoires à des infiniment petits près — ce qui est plus maniable que n'importe quelle majoration explicite — grâce à des changements de variables adéquats, qui semblaient au Maître constituer un outil fantastique de découverte et de démonstration. La première victime fut l'équation de Van der Pol avec son cycle limite que Albert Troesch et son compère Émile Urlacher étudièrent littéralement à la loupe, en mettant en évidence la manière dont les phases lentes se raccordent aux phases rapides dans ce système de type charge-décharge qui modélise en particulier le fonctionnement des stimulateurs cardiaques.

Ce fut le début d'une véritable école de perturbations singulières, sujet peu à la mode en France mais très prisé aux Pays-Bas et aux États-Unis. Il y avait là un risque qui inquiétait beaucoup l'ami Claude, soucieux de la bonne réputation hexagonale des mathématiques strasbourgeoises. Mais les mauvaises herbes ont la vie dure, et les jeunes gens qui avaient emboîté le pas au Maître n'avaient rien à perdre, car ils ne possédaient rien. Il y avait là les futurs Diener, qui — faute de sous — n'étaient encore que Marc et Francine, et leur condisciple de 68 Jean-Louis Callot. Ils "choisirent" par la force des choses de s'expatrier à Oran où ils retrouvèrent Éric Benoit, un normalien aussi exotique que Strasbourgeois. Cela donna la superbe découverte des Canards, ces trajectoires paradoxales du point de vue mécanique qui accompagnent beaucoup de phénomènes de bifurcation dans les systèmes dynamiques. La bande des quatre s'étoffa de recrues locales et aussi de Imme Van den Berg, un jeune néerlandais placide mais épris de logique. Si bien qu'un jour le Maître prit pied sur le sol algérien, accueilli par Rachid Bebbouchi, le "cheikh" des mathématiques oranaises naissantes à cette époque bénie où tout était encore possible dans ce magnifique pays. Il en résulta un flux régulier de brillants jeunes gens qui contribuèrent à rendre prospère la seconde école fondée par le Maître et en sont devenus les têtes pensantes depuis qu'elle a essaimé géographiquement.

Revenons un instant vers les années 76. Il y a un séminaire hebdomadaire sur l'ANS à Strasbourg. Cela ressemble assez souvent à la bataille d'Hernani... Imaginez les premières séances. Près de quarante mathématiciens de toutes spécialités sont assis là, pour la plupart hostiles au sujet ou au mieux indifférents. Ils sont venus pour démolir, quelquefois pour se moquer, rarement, comme le regretté mathématicien italien Andreotti, pour s'informer. Au tableau, l'auteur de ces lignes, qui avait dès le début mis sa passion dans l'aventure en complicité profonde avec le Maître, s'efforce d'expliquer la chose le plus clairement possible. On l'interrompt à tout bout de champ. Il dit le mot "ensemble des parties" et quelqu'un demande ce que c'est... En bref, une ambiance d'Assemblée Nationale lors d'une bataille

d'amendements! Le Maître subit sans rien dire; il souffle juste un peu plus bruyamment que d'habitude. . . A la sortie, on le regarde avec ironie et quelquefois un rien de pitié. Pourquoi ne font-ils pas de bonnes mathématiques classiques comme tout le monde?

Un jour, vers 1977, le Maître décida qu'il fallait écrire un livre. La matière ne manquait pas. Entre les perturbations singulières vues d'un point de vue géométrico-infinitésimal, des histoires topologiques amusantes, la modélisation du Moiré par Jacques Harthong, le billard de Birkhoff vu par Callot, les canards, et quelques idées encore inexploitées, il y avait de quoi raconter sur des applications de l'ANS qui n'avaient rien à voir avec celles des successeurs de Robinson. Le Maître proposa donc la chose à son complice habituel, et ils se mirent au travail avec allégresse. Un mois plus tard, satisfait de voir l'opération en si bonne voie, il se trouva soudain trop vieux et surtout trop paresseux pour ce genre de travail de bénédictin. Le complice fut prié de se trouver un compagnon d'aventure.

C'est ainsi que quatre ans plus tard, en 1981, l'auteur de ces lignes et son ami Michel Goze, après beaucoup de travail et autant de joyeuses séances de discussion firent paraître chez Springer un ouvrage dit "le petit livre jaune" en raison de la couleur de sa couverture, où l'on expliquait dans un anglais "intéressant" les mille beautés de l'ANS appliquée à divers domaines des mathématiques. C'était un peu la première manifestation officielle de la nouvelle école dans le contexte international. Le livre contenait en particulier des applications encore toutes chaudes à des questions de déformations de structures algébriques. Elles se sont imposées en cours de rédaction et ont permis entre temps à Michel Goze et ses élèves de résoudre un grand nombre de problèmes de rigidité dans les structures d'algèbre de Lie ou associatives. D'ailleurs le maître avait pressenti que l'algèbre pourrait tirer bénéfice des infinitésimaux, à partir d'un test qui lui tenait à cœur : *si l'on perturbe infiniment peu les coefficients d'un polynôme donné, les racines du polynôme perturbé ont pour ombre (avec respect des multiplicités) les racines du polynôme donné.* La démonstration tient en deux lignes, alors que l'analogie classique nécessite une expression assez lourde et une preuve contournée.

Jusqu'en 1977, le langage non standard utilisé par tout le monde était celui du livre de Robinson, directement issu de la théorie des modèles. C'était assez lourd et de notation encombrante, mais donnait l'impression, rassurante pour un esprit platonicien, que l'on adjoignait de "vrais" objets à la pratique mathématique. De fait, la chose intéressante pour le praticien était plutôt le type de raisonnement et de concepts nouveaux que cela permettait. En 1977, le logicien-physicien-mathématicien Edward Nelson fit paraître sous le nom de "Internal Set Theory" une présentation purement axiomatique de l'ANS qui fut immédiatement adoptée en Alsace car elle correspondait exactement à l'esprit qui régnait dans l'entourage du Maître. Par la suite Edward Nelson devint un grand ami de l'école alsacienne et fut même fait Docteur Honoris Causa de l'Université Louis Pasteur avec le soutien très fort de l'école strasbourgeoise de Probabilités qui le tenait en haute estime pour ses travaux sur les processus stochastiques.

On peut se demander pourquoi l'ANS avait trouvé un tel écho dans l'esprit du Maître. Il y avait certes des raisons pratiques: la recherche de simplicité et de naturel dans les preuves était une constante de ses instincts intellectuels. Également la possibilité, dans les applications aux systèmes dynamiques, de marier l'observation géométrique avec les propriétés analytiques: faire de l'analyse avec des yeux de géomètre. Cela lui plaisait terriblement. Mais il y avait des raisons plus profondes. Le Maître était un formaliste sans illusions sur la capacité du formalisme à emprisonner le réel intuitif dans ses formules. Alors, tant qu'à formaliser, en particulier l'intuition d'infini potentiel, autant ne pas s'arrêter à mi-chemin et aller jusqu'au bout des possibilités de la formalisation. Là encore, un test fondamental lui tenait lieu de point d'ancrage. Après de nombreuses discussions et hésitations — il demandait souvent, le dimanche soir au téléphone : “Sommes-nous fous ou les autres sont-ils aveugles?” Il finit par concevoir sa célèbre question: “les entiers naïfs remplissent-ils l'ensemble $\mathbb{N}$?” Par entier naïf, il entendait ceux que l'on peut obtenir en ajoutant 1 autant de fois que l'on veut. Ces entiers ont une contre-partie dans le fondement constructiviste des mathématiques. En d'autres termes, a-t-on, comme tout le monde le croit et l'écrit,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad ?$$

Il est évident qu'il n'y a pas de réponse à l'intérieur du système formel ensembliste, car la *question* ne peut pas y être posée, puisque le concept “entier naïf” n'y est pas formalisable (il faudrait écrire une formule de longueur illimitée...). En revanche, l'affirmation informelle “il existe un entier non-naïf” est formalisable: on adjoit une constante w au langage et le schéma d'axiomes $w > n$, où n peut être remplacé par n'importe quel entier que l'on peut écrire explicitement. La nouvelle théorie est alors une extension conservatrice de l'ancienne et en son sein, on peut parler d'entiers infiniment grands, par exemple w , et donc aussi de réels infiniment petits ou grands. Cette extension rudimentaire de la théorie des ensembles usuelle était le test fondamental de vraisemblance pour la démarche qui, effectuée en grand, menait à l'ANS. Il s'agissait aux yeux du Maître du fruit naturel d'un débat, qui aurait du continuer plus sereinement au cours de ce siècle, entre les mathématiciens formalistes et intuitionnistes.

En tant que praticien, topologue de surcroît, le Maître souscrivait à un formalisme à visage humain, référence présente dans les coulisses mais qui n'empêche pas les acteurs de s'exprimer avec leur sensibilité informelle. En tant que philosophe et homme de haute subtilité logique, il poussait à tirer de la formalisation le maximum de bénéfices possible, en sachant que l'adéquation à la magnificence du réel ne serait jamais qu'un objectif inaccessible. C'est pourquoi il avait une grande admiration pour les travaux du logicien Kurt Gödel, qui avait mis un point final au rêve hilbertien de donner un fondement incontestable à l'arithmétique. Lorsque l'on évoque les aspects philosophiques de sa pensée, il faut rappeler qu'il avait fortement soutenu la création d'une entité officielle de réflexion sur l'épistémologie des mathématiques. Il participait activement au séminaire de son

ami Hervé Barreau et trouva en la personne de Jean-Michel Salanskis un analyste pertinent du contexte épistémologique dans lequel baigne l'ANS.

On pourrait croire que le Maître s'était ainsi réfugié dans la pensée pure... En fait, pendant plusieurs années, il s'est amusé à dialoguer avec un micro-ordinateur en s'efforçant de marier la modélisation infinitésimale, la théorie du moiré et la résolution graphique des équations différentielles. Il en est résulté une manière très personnelle de discrétiser ces équations en ne faisant que des calculs en nombres entiers, donc très rapides. L'exploitation de ces idées est loin d'être achevée...

Le Maître est parti un jour de novembre 1993, son esprit étant resté jusqu'au bout aussi lumineux que d'habitude. Il a suivi de quelques mois Jean-Louis Callot, l'une de ces intelligences brillantes qui lui était très proche par la curiosité intellectuelle et la manière de penser. Par l'affection aussi, car le Maître était entouré de l'affection de ses nombreux disciples. Il avait beaucoup souffert deux ans plus tôt de voir disparaître à quelques semaines d'intervalle ses premiers élèves Claude Godbillon et Jean Martinet. Ils n'avaient suivi que de loin l'aventure de L'ANS, mais la considération profonde et l'amitié qu'il avait pour eux n'a jamais faibli.

Pour terminer cette très partielle Saga du bon Maître Reeb, on ne saurait mieux résumer sa caractéristique intellectuelle principale que ne le fait Jacques Harthong avec sa pertinence habituelle : il s'était forgé sa propre *idée intérieure* des mathématiques. Il ne l'avait pas trouvée ailleurs mais élaborée peu à peu en réfléchissant beaucoup, en lisant les grands Anciens. Guidé par cette idée intérieure, il savait instinctivement distinguer l'essentiel du superficiel, reconnaître les vraies idées profondes et ne pas se soumettre aux idées toutes faites, fussent-elles communément admises. Sur le plan de sa philosophie de la vie, là aussi il avait beaucoup réfléchi, et beaucoup lu. La Bible, qu'il situait au cœur de son expérience humaine, tenait une grande place dans cette lecture. Il en retirait une joyeuse sérénité jointe à une simplicité de cœur éloignée de tout dogmatisme.

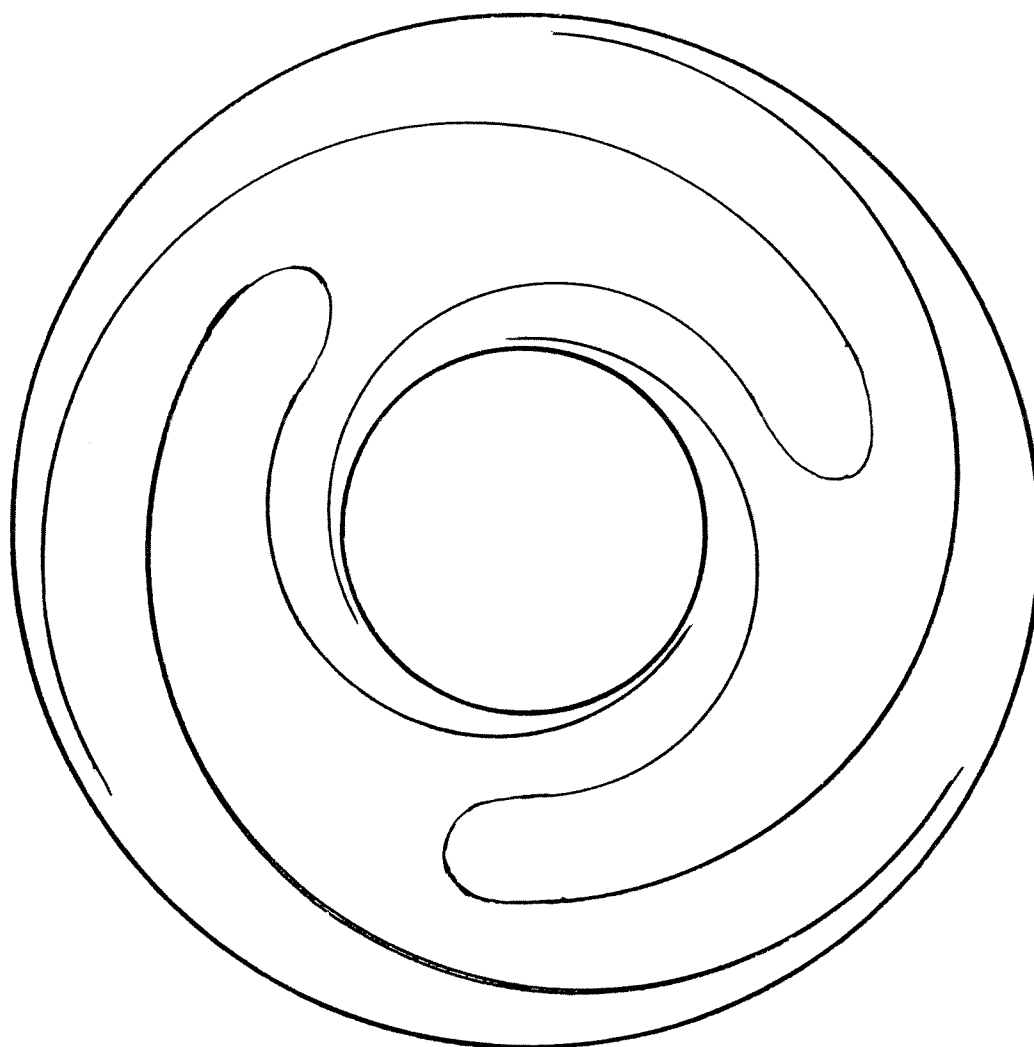
Georges Reeb était un homme libre qui aimait partager le plaisir de satisfaire son insatiable curiosité. J'ai eu le privilège, au fil de vingt huit ans d'amitié, de participer aux deux grandes aventures intellectuelles qu'il a marquées de sa forte personnalité. Ce fut une joie de l'esprit, certes, mais surtout le bonheur d'accompagner, avec d'autres, en affectueuse complicité, la démarche d'un être de lumière.

LES FEUILLETAGES DE REEB

Gilbert HECTOR

Professeur de Mathématiques à l'Université de Lyon I

Comment G. Reeb, à la suite de
son maître Ch. Ehresmann a
assis solidement les fondements
de la Théorie des Feuilletages.



G. Reeb aimait rappeler que lors de ses premiers exposés sur la Théorie des "*Feuilletages*" il y avait toujours parmi les auditeurs au moins un botaniste intrigué et attiré par cet intérêt inhabituel des mathématiciens pour sa science. Bien sûr, cet engouement des botanistes s'est étiolé entre temps ; par contre les "*Feuilletages*" eux ont envahi les champs mathématiques les plus divers : équations différentielles, théorie du contrôle, fonctions analytiques, géométrie symplectique, mécanique, théorie des opérateurs...

C'est sous la houlette de Ch. Ehresmann et sous l'influence des grands ancêtres : Poincaré, Painlevé, Briot et Bouquet... que G. Reeb s'est lancé dans l'étude des "*Structures feuilletées*" vers le milieu des années quarante. Mais c'est bien lui qui a "*assis*" la théorie, qui lui a "*donné corps*" grâce aux deux résultats essentiels de sa thèse (voir [R₃]):

- a) la construction d'un feuilletage de $\mathbb{S}^3$.
- b) les théorèmes de stabilité.

De tous les travaux de G. Reeb, celui qui est destiné à rester dans la mémoire des mathématiciens, celui qui témoigne le mieux de son génie inventif, c'est, sans conteste, la construction du premier feuilletage de codimension 1 de $\mathbb{S}^3$, le **Feuilletage de Reeb**. Nous en donnerons ici une approche descriptive avec le moins de préliminaires formels possibles (§I, p.94).

Dans un deuxième temps (§II, p.107), nous présenterons de manière un peu plus technique les théorèmes de stabilité et pour finir nous décrirons de manière très succincte quelques aspects actuels du développement de la Théorie des Feuilletages, témoignage de la fécondité de l'œuvre mathématique de G. Reeb.

En guise de conclusion, nous rappellerons un autre succès "*universel*" de Reeb : l'histoire du peigne.

I. Les Feuilletages de Reeb.

La première question qui se pose à propos d'une théorie nouvelle est celle de son "*extension*", c'est à dire du nombre et de la diversité des exemples. Les **Structures Feuilletées** sont "*supportées*" par des variétés (différentiables) ; or quitte à passer au revêtement universel, on pourra toujours se ramener aux variétés simplement connexes. On comprendra donc mieux l'importance des exemples de Reeb, si l'on se rappelle que :

a) d'après le théorème de Poincaré - Hopf, tout champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^2$ possède au moins une singularité et donc il n'existe pas de feuilletage de dimension un (ou codimension 1) sur $\mathbb{S}^2$. La sphère $\mathbb{S}^3$ de dimension 3 est alors la première variété compacte, connexe et simplement connexe "*candidate*" pour supporter un feuilletage de codimension 1 (voir §I.1 ci-dessous).

b) il aura fallu attendre les années 1971-72 pour savoir, avec les travaux de Lawson - Freedman - Durfee - Tamura que les sphères impaires $\mathbb{S}^5$, $\mathbb{S}^7$... possèdent des feuilletages de codimension un (les sphères de dimension paire sont exclues pour les mêmes raisons que $\mathbb{S}^2$).

I.1. Une définition rapide et pratique des structures feuilletées (ou feuilletages).

i) La famille des courbes intégrales d'une équation différentielle (sans singularité) sur une variété M de dimension n , est l'exemple type d'une **structure feuilletée** (ou **feuilletage**) de dimension 1. Les données essentielles d'une telle structure sont contenues dans le théorème d'existence et d'unicité des solutions locales. Ce théorème nous permet de construire pour tout $x \in M$,

a) un voisinage U difféomorphe à J^n (où $J =]0,1[$) dans lequel les solutions locales sont données, en coordonnées locales, par le système d'équation :

$$dx^2 = dx^3 = \dots = dx^n = 0$$

b) une unique intégrale maximale L_x passant par x ; c'est une sous-variété de dimension 1, immergée dans M (non plongée en général).

ii) Par analogie, si $n=p+q$, un **feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p ou codimension q** sur M sera la donnée d'une famille de sous-variétés L de dimension p , C^0 immergées dans M (et appelée les **feuilles de $\mathcal{F}$**) telle que :

b') par tout $x \in M$, il passe une feuille L_x et une seule.

a') pour tout x , il existe une carte locale $\phi : U \rightarrow J^p \times J^q$ telle que si on appelle **plaques de $\mathcal{F}$ dans U** , les composantes connexes des traces sur U des feuilles de $\mathcal{F}$, alors toute plaque de U a pour image par l'homéomorphisme ϕ une horizontale $J^p \times \{pt\}$ de $J^p \times J^q$. Un tel ouvert U sera appelé un **cube distingué** de $\mathcal{F}$.

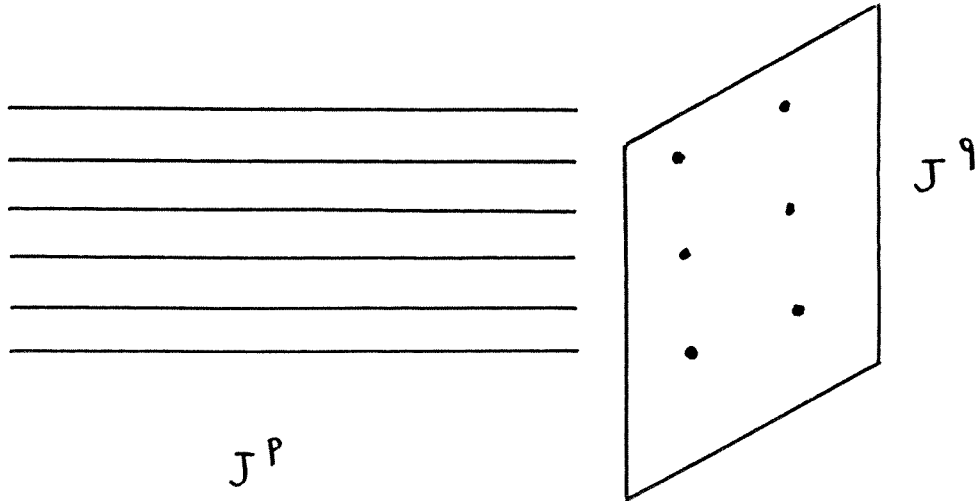


Fig1

Dans le cas où M est une surface ou une variété à bord, les cartes locales considérées seront du type $\phi : U \rightarrow J^p \times J^{q-1} \times [0,1)$. En particulier pour les feuilletages de codimension 1, elles seront du type $\phi : U \rightarrow J^{n-1} \times [0,1)$.

Remarque : dans la présentation générale ci-dessus, il n'y a pas d'exigence de différentiabilité ; les feuilletages ainsi définis seront dits **de classe C^0** . Nous nous limiterons à cet aspect dans la suite bien que tous les exemples de Reeb soient en fait de classe C^∞ .

1.2 Les composantes de Reeb de dimension 2.

i) Considérons dans le plan (xOz) l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2-1)dz + 2xdx = 0$$

Ses courbes intégrales sont aussi les courbes de niveau de la fonction

$$k(x,z) = (x^2-1)e^z.$$

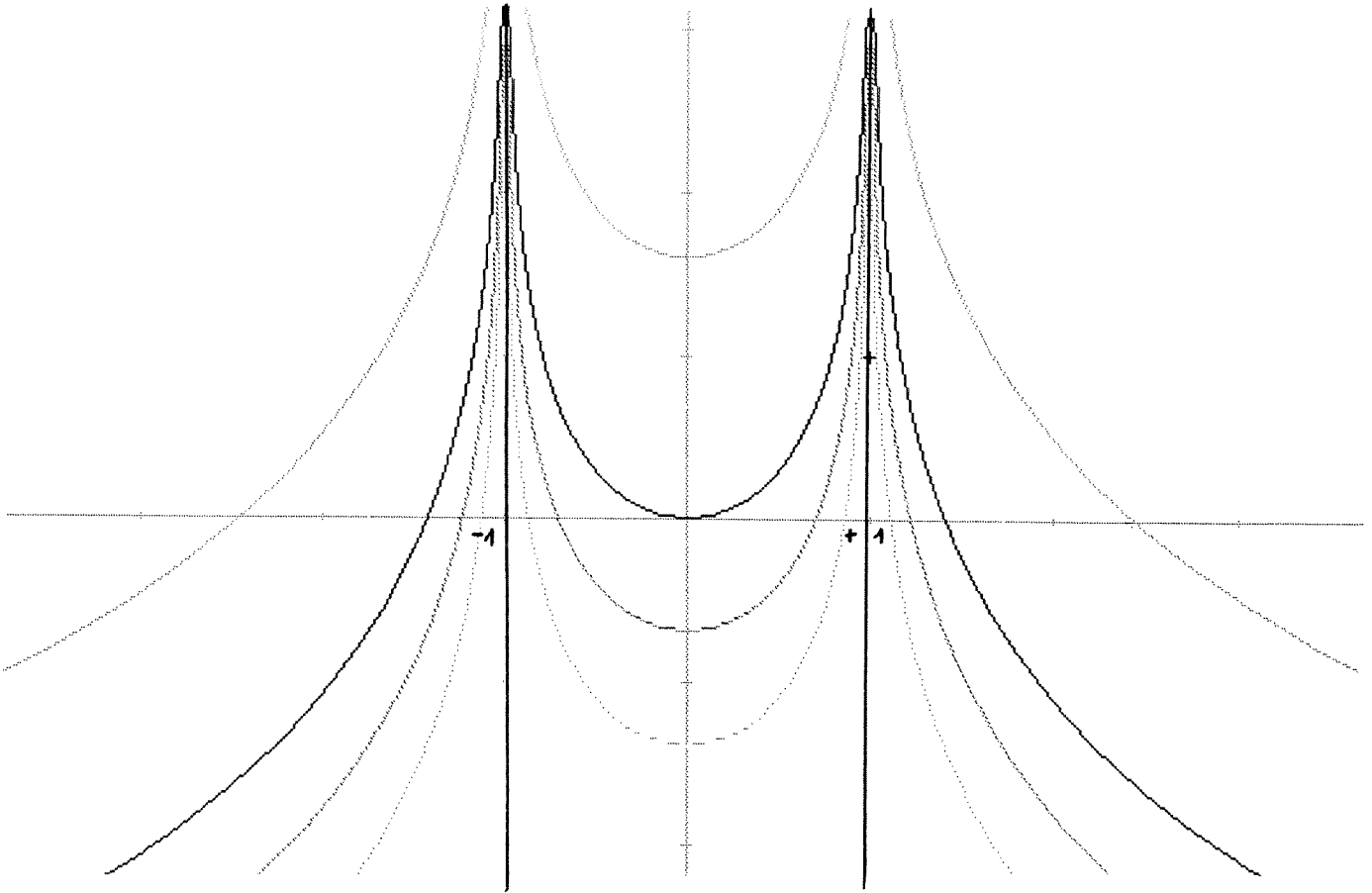


Fig2

Définition : la restriction de cette famille de courbes à la bande verticale $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ est une structure feuilletée de dimension 2 sur $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ appelée la **composante de Reeb non compacte de dimension 2**. Elle sera notée $\mathcal{R}^2$.

ii) Le quotient de $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ par la relation d'équivalence ρ :

$$(x,z)\rho(x,z+n) ; \forall n \in \mathbb{Z},$$

est la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$. Celle-ci peut-être obtenue également en identifiant de façon évidente les deux arêtes horizontales AB et DC du rectangle $[-1;+1] \times [0;1]$.

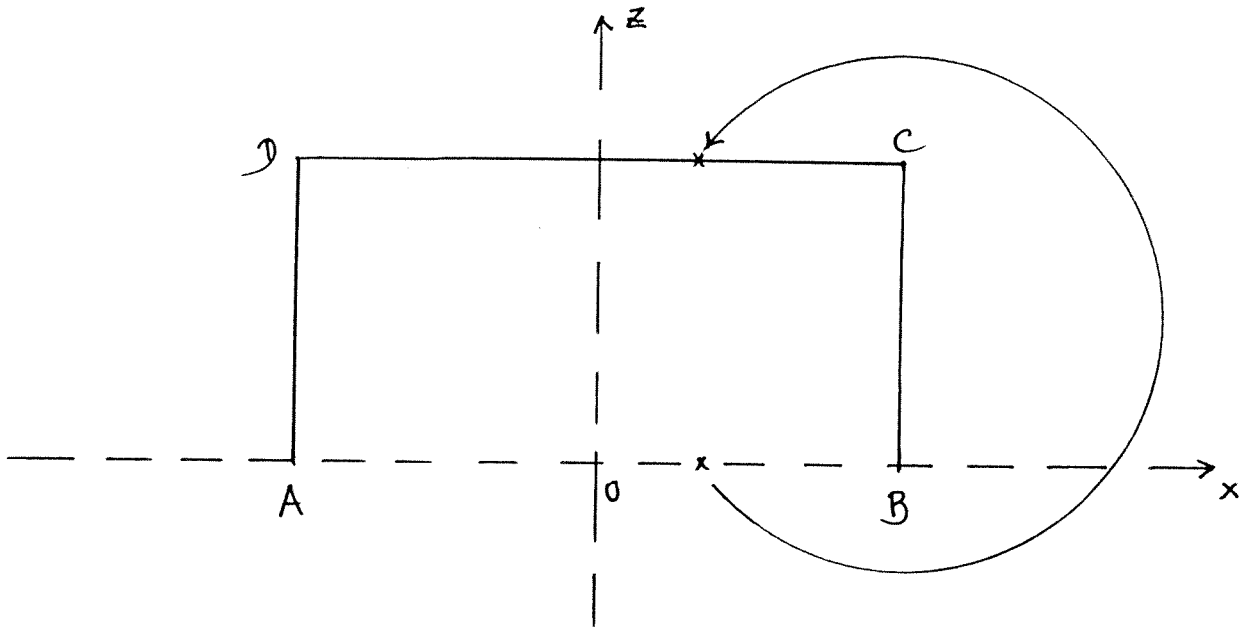


Fig3

Enfin, cette couronne est aussi le quotient de la bande $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ par les translations verticales entières.

Or la famille des courbes intégrales de (E) est globalement invariante par les translations verticales (bien sûr, seules les feuilles $x=\pm 1$ sont individuellement invariantes) et cette invariance suffit pour projeter le feuilletage $\mathcal{R}^2$ de $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ en un feuilletage sur la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$, qui aura l'aspect suivant (voir fig.4) :

Le "rayon" d'extrémité $A=D$ et $B=C$ tracé en pointillé sur la figure 4 rappelle que l'on peut aussi construire le feuilletage (famille de courbes) sur la couronne en suivant le procédé d'identification schématisé par la figure 3.

Définition : le feuilletage ainsi défini sur la couronne $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ s'appellera **la composante de Reeb compacte de dimension 2**. On le notera $\mathcal{R}_c^2$.

- Les feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ sont de deux types :
- les deux bords de la couronne sont des feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ compactes, homéomorphes à $\mathbb{S}^1$;
 - toutes les autres feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ sont non compactes, homéomorphes à $\mathbb{R}$ et chacun de leur bouts s'enroule sur l'une des feuilles compactes.

En conséquence, les feuilles de $\mathcal{R}_c^2$ ne peuvent pas être obtenues comme courbes de niveau d'une fonction continue sur $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$.

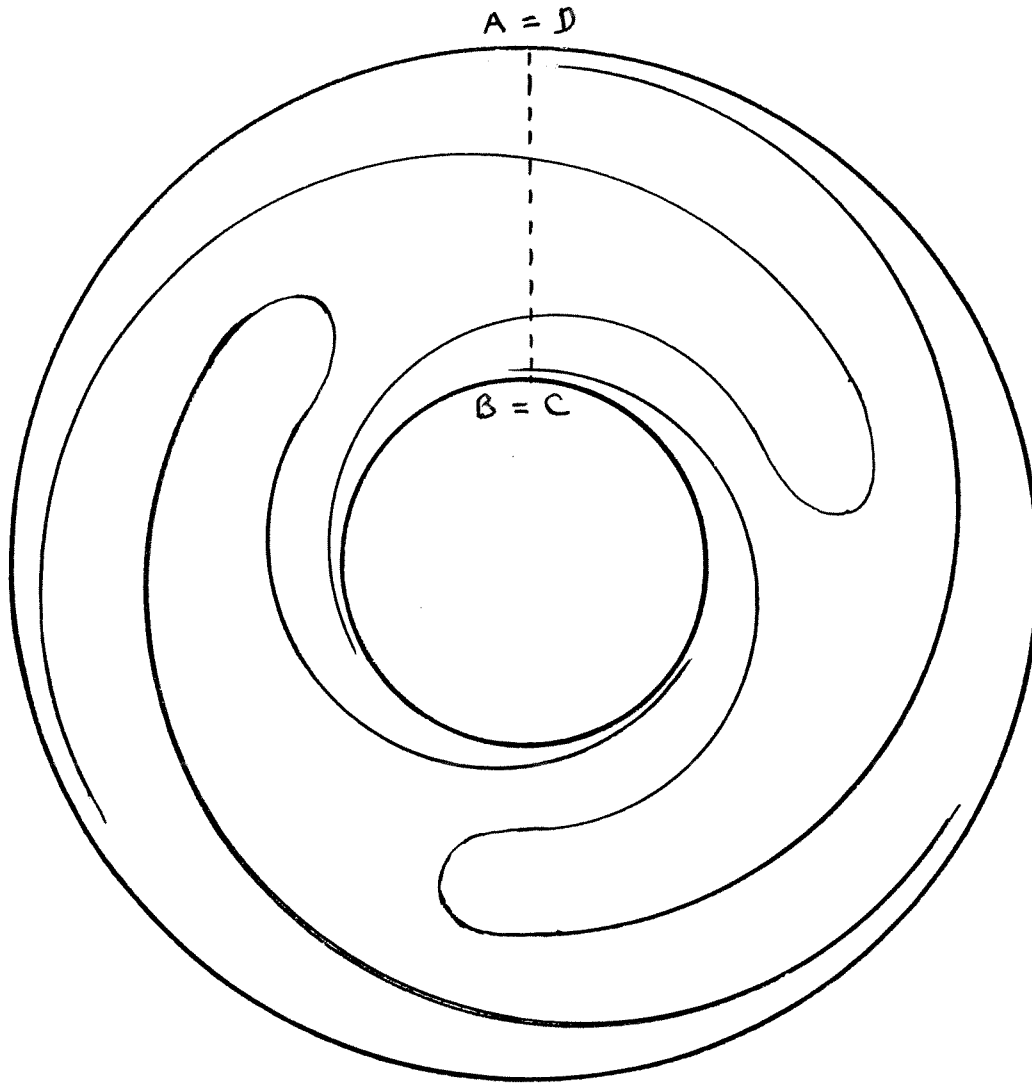


Fig4

I.3. Les composantes de Reeb de dimension 3.

En faisant tourner $\mathcal{R}^2$ [resp. $\mathcal{R}_c^2$] autour de l'axe Oz (respectivement de son image $\rightarrow$ dans la couronne), nous allons maintenant construire les deux **composantes de Reeb de dimension 3** qui seront notées $\mathcal{R}^3$ et $\mathcal{R}_c^3$.

i) la bande $[-1;+1] \times \mathbb{R}$ étant plongée de façon naturelle dans l'espace $(Oxyz)$, on le fait tourner autour de son axe de symétrie Oz ; elle engendre le **cylindre plein** $D^2 \times \mathbb{S}^1$ (où D^2 est le disque unité fermé du plan (xOy)).

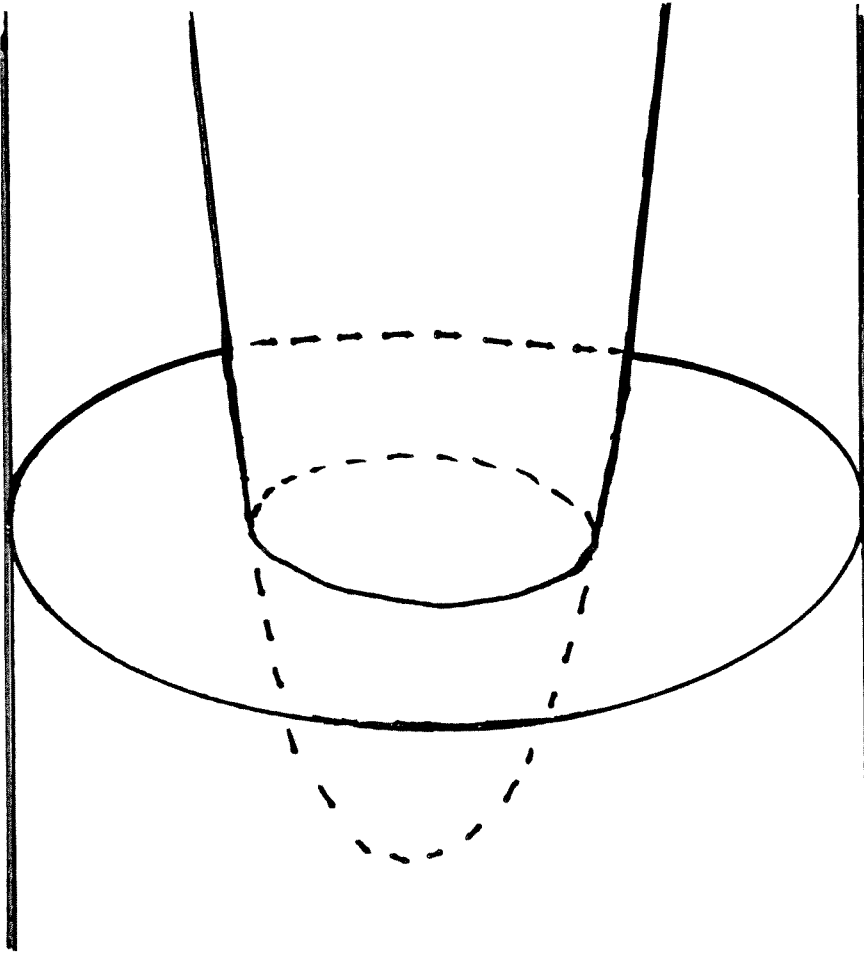


Fig5

- Par la rotation précédente, toute feuille de $\mathcal{R}^2$ engendre une surface de révolution.
- les deux verticales $x=\pm 1$ engendrent le même cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

- chacune des autres feuilles engendre une surface qui se projette homéomorphiquement sur la boule unité ouverte de (xOy) et qui est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

La famille de surfaces ainsi définie peut aussi être obtenue comme la famille des surfaces de niveau de la fonction

$$k(x,y,z) = (x^2+y^2-1)e^z$$

C'est un feuilletage de codimension 1.

Définition : muni de ce feuilletage, le cylindre plein $D^2 \times \mathbb{R}$ est appelé **composante de Reeb non compacte de dimension 3** (noté $\mathcal{R}^3$).

ii) Pour la construction de $\mathcal{R}_c^3$, on a le choix entre deux procédés. Le premier, analogue à I.2.ii consiste à quotienter $D^2 \times \mathbb{R}$ par les translations entières en z . On obtient ainsi le **Tore plein** $D^2 \times \mathbb{S}^1$ et comme le feuilletage $\mathcal{R}^3$ est invariant par les translations, il se projette en un feuilletage de codimension un sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$; ce sera $\mathcal{R}_c^3$.

Le second procédé, qui nous permettra de mieux visualiser $\mathcal{R}_c^3$ est analogue à I.3.i. Il consiste à "*faire tourner*" $[-1;+1] \times \mathbb{S}^1$ autour de son "*axe de symétrie*" ; le cercle $Z = \{0\} \times \mathbb{S}^1$ engendrant ainsi le tore plein. En outre chaque feuille de $\mathcal{R}_c^2$ engendre une surface de révolution (autour de Z). Il y en aura de deux types :

- les deux cercles de bord engendrent le tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- chacune des autres feuilles engendre une surface qui se projette homéomorphiquement (le long de $\mathbb{S}^1$) sur l'intérieur du disque $D^2 \times \{1\}$, $1 \in \mathbb{S}^1$. Ces surfaces sont homéomorphes au plan, elles ne sont pas fermées dans $D^2 \times \mathbb{S}^1$, leur adhérence contient le tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Cette famille de surfaces est un feuilletage de codimension 1 sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$ (voir fig.6).

Définition : muni du feuilletage ci-dessus, le tore plein $D^2 \times \mathbb{S}^1$ est la **composante de Reeb compacte de dimension 3**. Elle est notée $\mathcal{R}_c^3$.

Comme pour $\mathcal{R}_c^2$, on notera que les feuilles de $\mathcal{R}_c^3$ ne peuvent être obtenues comme surface de niveau d'une fonction continue sur le tore plein. C'est pour cette raison que la construction de ces "*composantes de Reeb*" exigent une bonne dose d'imagination!

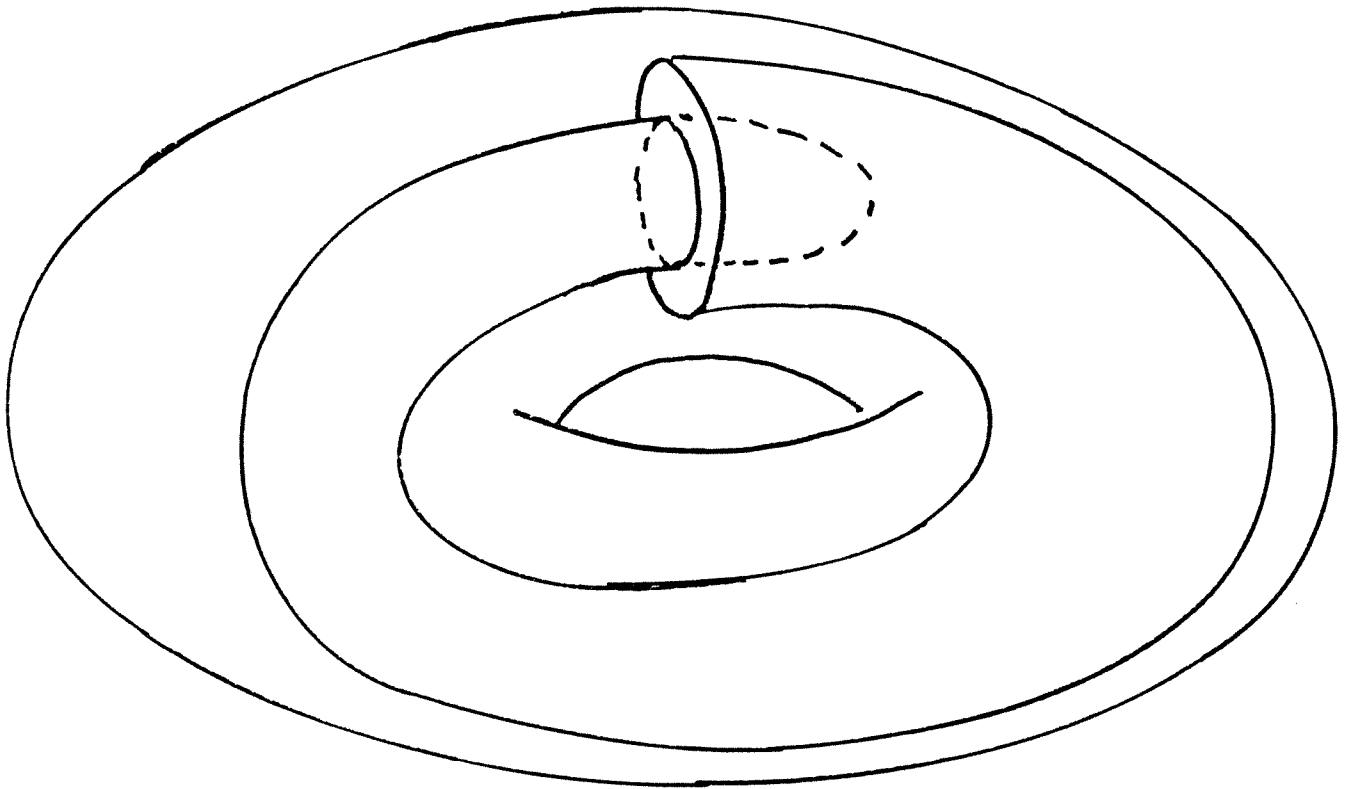


Fig6

I.4. Les feuilletages de Reeb sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Il y a un "*feuilletage de Reeb*" naturel sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$). Sa relative simplicité fera encore mieux ressortir par comparaison la beauté du feuilletage de $\mathbb{S}^3$

La sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la réunion des deux demi-sphères :

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}_+^2 \text{ d'équation } z \geq 0 \\ \text{et} \quad & \mathbb{S}_-^2 \text{ d'équation } z \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{S}_+^2$ et $\mathbb{S}_-^2$ sont toutes deux homéomorphes (par projection verticale) au disque D^2 ; donc on obtient $\mathbb{S}^2$ en recollant deux exemplaires de D^2 le long de leur bord.

De la même façon, en recollant le long de leur bord deux exemplaires de

$D^2 \times \mathbb{R}$	on obtient $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$D^2 \times \mathbb{S}^1$	on obtient $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Le bord de $D^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $D^2 \times \mathbb{S}^1$) étant une feuille de $\mathcal{R}^3$ (resp. $\mathcal{R}_c^3$), la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$) sera munie d'un feuilletage de codimension 1 obtenu par recollement de deux exemplaires de $\mathcal{R}^3$ (resp. $\mathcal{R}_c^3$).

C'est le **feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$)**. Il a pour feuilles un cylindre et des plans (resp. un tore et des plans).

Remarque : évidemment on peut de même recoller deux exemplaires de $\mathcal{R}^2$ (resp. $\mathcal{R}_c^2$). On obtiendra un feuilletage $\mathcal{H}$ du cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{H}_c$ du tore $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Le feuilletage $\mathcal{H}$ par exemple sera encore obtenu en identifiant les deux verticales $x=+1$ et $x=-1$ dans la figure 7.

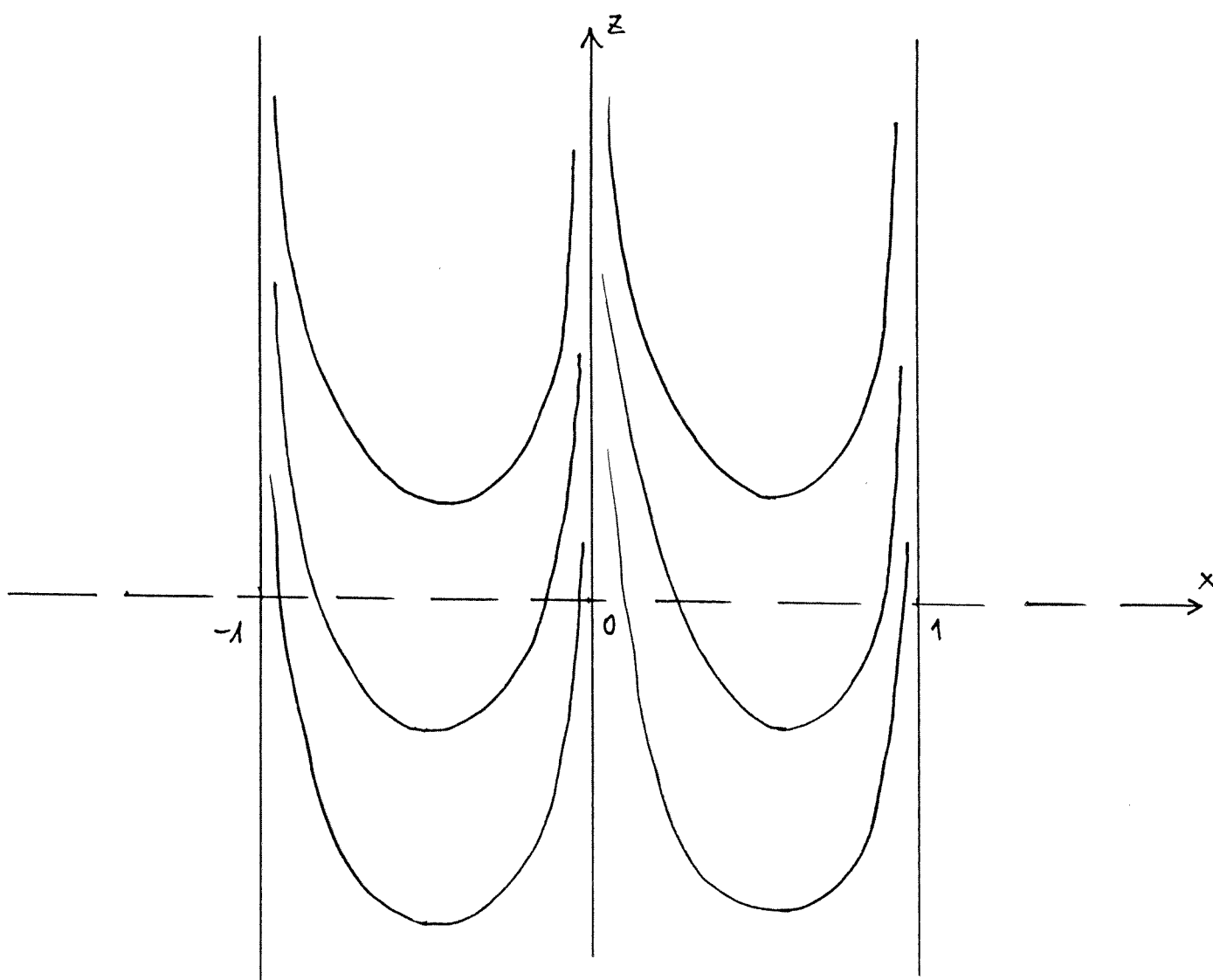


Fig7

I.5. Le feuilletage de Reeb sur $\mathbb{S}^3$.

Enfin nous en arrivons au feuilletage annoncé sur $\mathbb{S}^3$; nous en donnerons deux descriptions basées sur deux descriptions de $\mathbb{S}^3$.

i) Si on identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$, la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ peut être définie par

$$\mathbb{S}^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 / u \overline{u} + v \overline{v} = 1\}$$

Soit alors $\Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} \leq \frac{1}{2}\}$. Pour $(u,v) \in \Delta_1$ on a $v \overline{v} \geq \frac{1}{2}$ donc $v \neq 0$ et l'application continue

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \Delta_1 &\rightarrow D^2 \times \mathbb{S}^1 \\ (u,v) &\rightarrow \left(\sqrt{2} \cdot u, \frac{1}{\|v\|} v \right) \end{aligned}$$

est bijective donc un homéomorphisme par compacité de Δ_1 et $D^2 \times \mathbb{S}^1$; bref, Δ_1 est un tore plein.

De même on vérifie que

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} \geq \frac{1}{2}\} \text{ est un tore plein et} \\ \Delta_1 \cap \Delta_2 &= \{(u,v) \in \mathbb{S}^3 / u \overline{u} + v \overline{v} = \frac{1}{2}\} \text{ est un tore } \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Bref on voit que $\mathbb{S}^3$ est obtenue en recollant deux exemplaires de $D^2 \times \mathbb{S}^1$ le long de leur bord.

Si ces deux tores pleins sont feuilletés en composantes de Reeb $\mathcal{R}_c^3$, on obtiendra sur $\mathbb{S}^3$ une structure feuilletée $\mathcal{R}$ de codimension qui a deux types de feuilles :

- une feuille compacte homéomorphe à T^2 .
- toutes les autres homéomorphes au plan.

C'est le **feuilletage de Reeb** de $\mathbb{S}^3$.

ii) Rappelons que le feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ était également obtenu par recollement de deux composantes de Reeb compactes de dimension 3. Il faut donc préciser la différence entre les deux situations.

Pour cela, rappelons encore que $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, c'est à dire que $\mathbb{S}^3$ s'obtient aussi en rajoutant un point à l'infini à $\mathbb{R}^3$ (compactification d'Alexandroff).

Considérons alors la configuration ci-dessous dans le plan (xOz) :

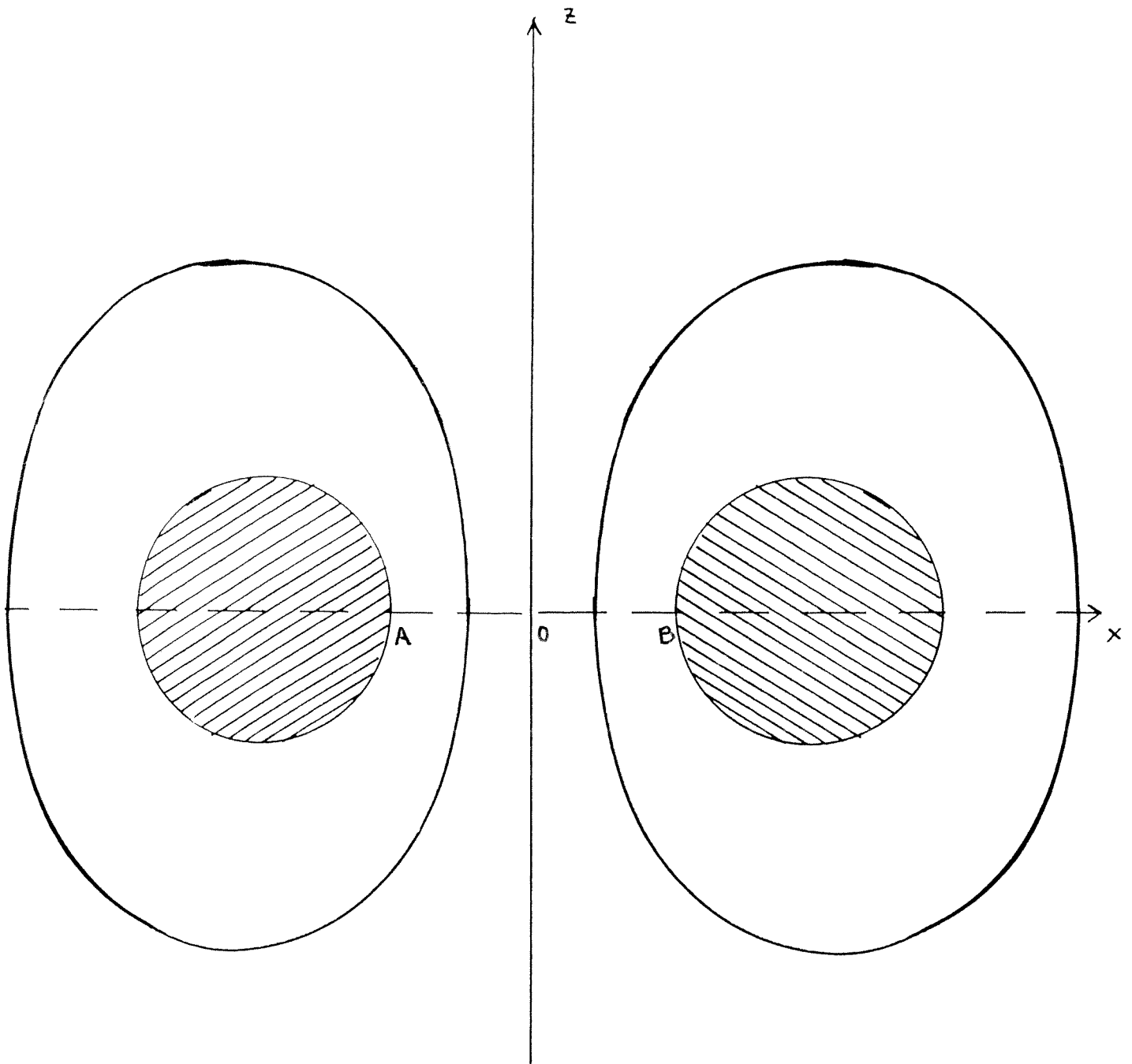


Fig8

Elle est symétrique par rapport aux deux axes et le complémentaire de l'intérieur des deux disques hachurés est feuilletée par un champ de vecteurs $\vec{X}$ dont toutes les orbites (sauf l'axe Oz) sont compactes, homéomorphes à S^1 .

$\rightarrow$
Par rotation autour de Oz,

- les disques hachurés engendrent un tore plein $\hat{\Delta}_1$ de $\mathbb{R}^3$ et le champ X s'étend en un champ $\hat{X}$ sur le complémentaire de l'intérieur de $\hat{\Delta}_1$ avec lequel on retrouve la configuration précédente sur chaque plan contenant $\rightarrow$ Oz.

- le segment AB engendre le disque unité $\hat{D}$ du plan (xOy) et la réunion $\hat{\Delta}_2$ de toutes les orbites de $\hat{X}$ passant par $\hat{D}$ est un tore plein, diminué d'un point (le point à l'infini de $\rightarrow$ l'axe Oz).

Evidemment, la décomposition $\mathbb{R}^3 = \hat{\Delta}_1 \cup \hat{\Delta}_2$ redonne par la compactification d'Alexandroff la décomposition en tores pleins $\mathbb{S}^3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ de $\mathbb{S}^3$. Mais surtout, elle permet de voir que cette dernière est obtenue concrètement en recollant les méridiens du bord de Δ_1 avec les parallèles du bord de Δ_2 (et vice-versa). Au contraire, en recollant entre eux les méridiens (resp. les parallèles) on retrouverait la construction de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ comme en I.4.

Le feuilletage de Reeb sur $\mathbb{S}^3$ définit par restriction un **feuilletage de Reeb** de $\mathbb{R}^3$ grâce auquel on voit que le sens de "*spiralement*" des feuilles planaires sur la feuille tonique change de "*direction*" quand on passe d'une composante de Reeb à l'autre (voir fig.9).

Remarques :

a) En fait, n'importe quel homéomorphisme Ψ de T^2 permet de recoller deux composantes de Reeb compactes et donc de construire une variété compacte M_Ψ de dimension 3 munie d'un feuilletage de Reeb. Ces variétés sont essentiellement différentes deux à deux et on feuillette ainsi tous les **espaces lenticulaires**.

b) Dans les années 60, l'intuition de G. Reeb a reçu une confirmation éclatante par les travaux de S.P. Novikov. Par son étude des **cycles évanouissants**, celui-ci a montré qu'il existe une composante de Reeb $\mathcal{R}_c^3$ dans tout feuilletage de codimension 1 d'une variété compacte de dimension 3 à groupe fondamental fini.

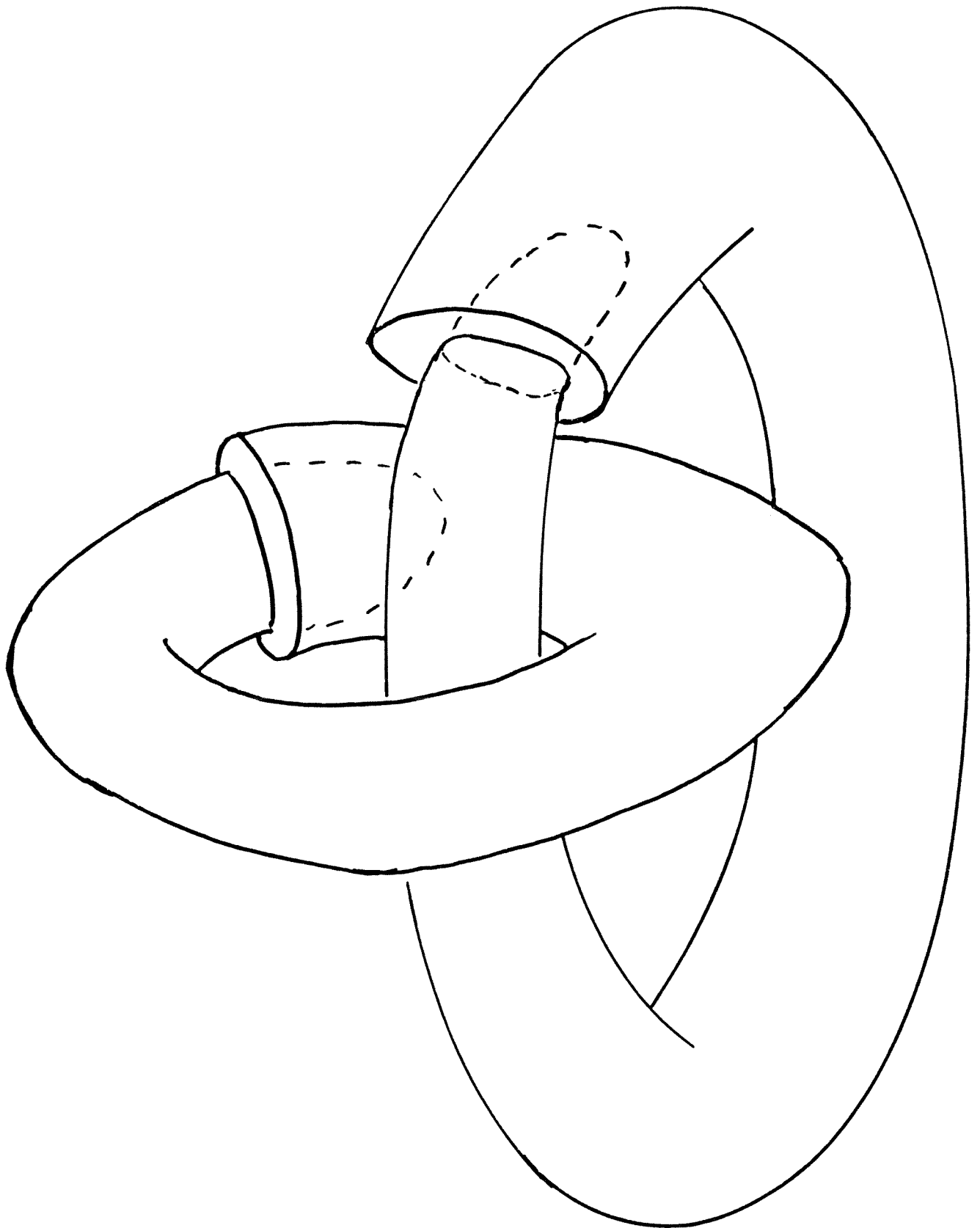


Fig9

II. Les théorèmes de stabilité.

La notion "*d'holonomie*" introduite par Ehresmann et S. Weishu (voir [ES]) généralise pour les feuilletages la notion de "*fonction de premier retour*" bien connue dans le cas des champs de vecteurs (donc des feuilletages de dimension un). C'est la clef pour la formulation des **théorèmes de stabilité** (voir [ER], [R₁], [R₂]) qui constituent la première étape pour toute tentative de classification des structures feuilletées.

Afin d'éviter les complications techniques, nous nous limiterons pour les définitions à deux cas : dimension 1 et codimension 1 tout en énonçant le théorème de stabilité locale dans le cas général.

II.1. Feuilletages de dimension 1 et fonction de premier retour.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension 1 sur une variété M . Pour simplifier encore, nous supposons qu'il est défini par un flot complet :

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

Soit L_0 une feuille compacte (homéomorphe à $\mathbb{S}^1$) et Q une transversale locale à $\mathcal{F}$ qui rencontre L_0 en un point x_0 .

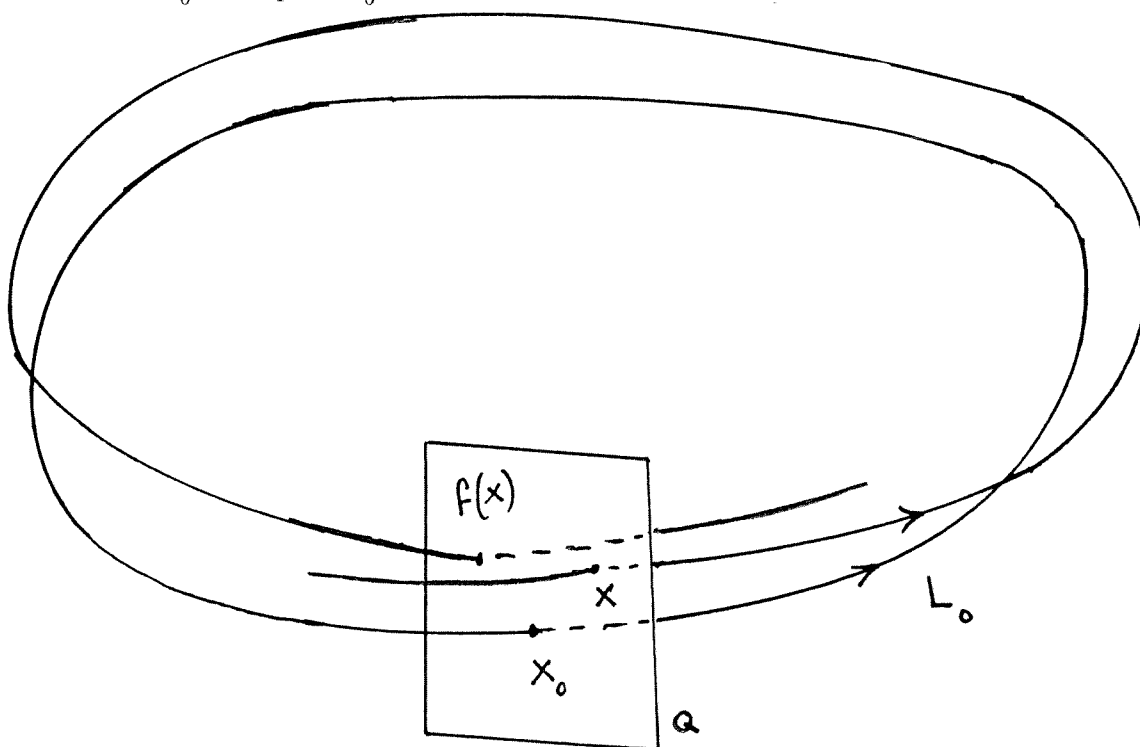


Fig10

Par continuité de ϕ , il existe un voisinage V de x_0 dans Q et une application continue

$$t : V \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout $x \in V$, $f(x) = \phi(t(x), x)$ est le premier point d'intersection de la demi-orbite positive issue de $x \in V$ avec la transversale Q .

Définition : l'application $f : V \rightarrow Q$ est un homéomorphisme local qui fixe x_0 . C'est la **fonction de premier retour** associée à L_0 .

Remarques

a) évidemment f dépend du choix de V , mais son **germe**, c'est à dire sa classe d'équivalence $[f]$ pour la relation :

$$f \rho g \text{ si } f \text{ et } g \text{ coïncident sur un voisinage convenable de } x_0$$

est un invariant bien défini du couple $(\mathcal{F}, L_0)$.

b) on définit de façon analogue le germe $[f^{-1}]$ de la réciproque f^{-1} et le germe $[f^n]$, $n \in \mathbb{Z}$, des itérés f^n de f . Ils forment un groupe cyclique

$$G_{L_0} = \{[f^n]\}, n \in \mathbb{Z}$$

qu'on appellera aussi le **groupe d'holonomie de la feuille compacte** L_0 .

Suivant les cas, le groupe G_{L_0} est fini isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou infini, isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il décrit le comportement de ϕ (ou de $\mathcal{F}$) au voisinage de la feuille compacte L_0 . De façon précise on a la

Proposition 1 : une feuille compacte L_0 possède un voisinage de feuilles compactes si et seulement si G_{L_0} est fini.

En fait si G_{L_0} est fini, L_0 admet un système fondamental de voisinages qui sont réunion de feuilles compactes. En particulier L_0 possède un voisinage "*feuilleté en produit*" si et seulement si $G_{L_0} = \{0\}$.

Pour les feuilles compactes de $\mathcal{R}_c^2$ on a $G_{L_0} \cong \mathbb{Z}$.

II.2. Holonomie et stabilité (cas de la codimension 1).

La proposition ci-dessus est le prototype des théorèmes de stabilité. Pour pouvoir énoncer ceux-ci de façon commode il faut tout d'abord construire un analogue du groupe G_{L_0} pour toute feuille L_0 d'un feuilletage $\mathcal{F}$: ce sera le groupe d'holonomie de L_0 au sens de [ES]. Nous nous limiterons au cas des feuilletages de codimension 1.

i) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur M . Pour simplifier encore, nous supposons qu'il existe un feuilletage $\mathcal{T}$ de dimension 1 sur M défini par un flot complet

$$\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

qui est **transverse** à $\mathcal{F}$ c'est à dire tel que pour tout $x \in M$ il existe un cube

$$\varphi : U \rightarrow J^{n-1} \times J$$

distingué à la fois pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et qui envoie les plaques de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) sur les horizontales $J^{n-1} \times \{\text{pt}\}$ (resp. sur les verticales $\{\text{pt}\} \times J$) (voir I.1.ii).

Soit alors L_0 une feuille (non nécessairement compacte) de $\mathcal{F}$; on prolonge tout lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow L_0$ en une application continue :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (\theta, t) &\rightarrow \phi_t(\gamma(\theta)) \end{aligned}$$

dont l'image est un "cylindre" de base γ transverse à $\mathcal{F}$. La trace de $\mathcal{F}$ sur l'image induit par "image réciproque" un feuilletage $\mathcal{F}_\gamma$ de dimension 1 sur le cylindre de départ $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Ce feuilletage $\mathcal{F}_\gamma$ admet $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ comme feuille compacte et permet d'associer à γ un homéomorphisme local f_γ de $\mathbb{R}$ fixant O .

Notons $\mathcal{G}_0$ le groupe de germes d'homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}$ fixant O . A l'aide d'arguments standards, on montre que :

a) le germe $[f_\gamma]$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ dans L_0 .

b) l'application

$$\begin{aligned} h : \quad \pi_1(L_0, x_0) &\rightarrow \mathcal{G}_0 \\ [\gamma] &\rightarrow [f_\gamma] \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes.

Définition : on dira que h est la **représentation d'holonomie** de L_0 ; son image G_{L_0} est le **groupe d'holonomie** de L_0 .

Evidemment une feuille à groupe fondamental fini a aussi un groupe d'holonomie fini. En codimension > 1 , on aura quelques difficultés techniques pour construire G_{L_0} en raison de l'absence de feuilletage transverse $\mathcal{G}$.

ii) Il y a deux versions du théorème de stabilité. La première "*locale*" due à G. Reeb est valable en toute codimension (voir théorème 1). La seconde (historiquement la plus ancienne) "*globale*", valable seulement en codimension 1, est due à Ehresmann et Reeb (voir théorème 2).

Théorème 1 (voir $[R_1]$, $[R_2]$, $[R_3]$)

Soit L_0 une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Si G_{L_0} est fini, L_0 possède un système fondamental de voisinages qui sont réunion de feuilles compactes.

Corollaire : ce résultat sera valable à fortiori si $\pi_1(L_0, x_0)$ est fini.

Théorème 2 (voir $[ER]$, $[R_3]$)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M . Si $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte à un groupe fondamental fini, alors toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes à un groupe fondamental fini.

Le contenu intuitif des théorèmes de stabilité est encore que le groupe d'holonomie "*contrôle*" le comportement dynamique du feuilletage au voisinage des feuilles compactes.

Le théorème 2 découle du théorème 1 pourvu que l'on remarque que pour les feuilletages de codimension 1 sur une variété compacte, la réunion des feuilles compactes est encore un compact. Cette dernière propriété n'est pas valable en codimension supérieure à 1 (encore un exemple de G. Reeb), ce qui réserve la stabilité globale à la codimension 1.

III. Actualité de la théorie des feuilletages.

Depuis cinquante ans, la théorie des feuilletages n'a cessé de s'approfondir, de s'enrichir et d'envahir les champs mathématiques les plus divers. *"L'immeuble s'est édifié, des centaines d'ouvriers y ont œuvré, l'édifice n'est pas achevé, mais on peut visiter..."* (G. Reeb ; 1985).

De fait, publications, thèses et colloques consacrés aux feuilletages se succèdent sans interruption et attestent de la vitalité de la théorie ; une simple énumération de quelques uns des thèmes abordés dans ces travaux suffira à donner une idée de sa richesse et de sa diversité. Dans tous ces développements, nous retiendrons 4 "*axes*" sur lesquels se branchent des thèmes variés, certains en voie "*d'épanouissement*", d'autres encore à l'état d'ébauche.

Premier Axe : Approfondissement de la théorie.

- Etude dynamique et topologique en dimension 1 et codimension 1 ; cas général (par exemple recherche d'une interprétation géométrique des cycles évanouissants).
- Stabilité, stabilité structurelle.
Invariants : homologie et cohomologie feuilletées.
- Feuilletages à structure transverses : Feuilletages, Riemanniens...
- Feuilletages à singularités ; théorie du contrôle...

Deuxième Axe : Quotients de Feuilletages et Feuilletages en dimension infinie.

- Essais de "*calcul différentiel*" sur les quotients de feuilletages : Q-variétés, QF-variétés, schémas de variétés, espaces difféologiques...
- Feuilletages sur les "*variétés de dimension infinie*" par exemple les feuilletages isodrastiques de Weinstein, ...).

Troisième Axe : Feuilletages en Géométrie symplectique.

- Variables action - angles et feuilletages Lagrangiens.

- Variétés de Poisson et variétés de Jacobi, intégration symplectique des variétés de Poisson...

Quatrième Axe : Feuilletages et théorie des opérateurs.

- C^* -algèbres de Feuilletages et géométrie non commutative.
- K-théorie ; théorie de l'index ; conjecture de Baum-Connes...

En réalité, la théorie des Feuilletages déborde largement du cadre précédent : elle est trop riche pour se laisser enfermer dans un schéma préétabli!

Chaque colloque auquel il participait était pour G. Reeb l'occasion de répéter, avec un plaisir toujours renouvelé, à la fois pour lui-même et pour ses auditeurs, ce qui constitue son deuxième titre de gloire (après le feuilletage de $\mathbb{S}^3$) : **l'histoire du peigne!** Ce sera donc aussi notre conclusion :

Dialogue de G. Reeb et C. Godbillon en promenade aux alentours du Schnepfenrieth :

G : "*Tiens, tu viens de perdre quelque chose.*"

R : "*Non, je n'ai rien perdu, j'ai seulement jeté un peigne!*"

G : "*Ah et pourquoi as-tu jeté ce peigne?*"

R : "*Parce qu'il a perdu une dent!*"

G : "*Mais ce n'est pas une raison de jeter un peigne parce qu'il a perdu une dent!*"

R : "*Oui, mais... c'était la dernière...*"

Quelques références

On ne donnera ici que quelques références historiques concernant le "*Feuilletage de Reeb*". Pour une bibliographie complète, on se reportera aux ouvrages spécialisés.

- [ER] Ch. Ehresmann et G. Reeb
Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables.
C.R. Acad. Sc. Paris, 218(1944), 955-957.
- [ES] Ch. Ehresmann et S. Weishu
Sur les espaces feuilletés : Théorème de Stabilité.
C.R. Acad. Sc. Paris, 243(1956), 344-346.
- [R₁] G. Reeb
Variétés feuilletées, feuilles voisines.
C.R. Acad. Sc. Paris, 224(1947), 1613-1614.
- [R₂] G. Reeb
Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini.
C.R. Acad. Sc. Paris, 228(1949), 47-48.
- [R₃] G. Reeb
Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.
Hermann, Paris (1952).